РГАСНТИ 27.43.51; 27.45.17 ISSN 0202—7488

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Том 27

Научный редактор
член-корр. АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1966 г.

МОСКВА 1990

1—2527

87. *Shale D., Stinespring W. F.* States on the Clifford algebra // Ann. Math.— 1964.— *80*.— С. 365—381.
88. *Spohn H.* Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits // Rev. Mod. Phys.— 1980.— *52*.— С. 569—615.
89. *Störmer E.* Positive linear maps of operator algebra // Acta Math.— 1963. — *110*.— С. 233—278.
90. — Spectra of states, and asymptotically abellian C^*-algebras // Commun. Math. Phys.— 1972.— *28*, № 3.— С. 279—294.
91. *Takesaki M.* Tomita's theory of modular Hilbert-algebras and its applications // Lect. Notes Math.— 1970.— *128*.

УДК 519.248

УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

И. А. Игнатюк, В. А. Малышев, Т. С. Турова

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

§ 0. Введение

Пусть дана эргодическая цепь Маркова L со значениями в множестве U. Это значит, в частности, что для любого начального состояния при $t\to\infty$ имеет место сходимость к единственному стационарному распределению на фазовом пространстве этой цепи. Если мы возьмем теперь счетное число независимых экземпляров L_x цепи L, занумерованных точками x решетки $\mathbf{Z}^\nu$, т. е. для каждой точки x задана начальная случайная величина $\xi_0(x)$ со значениями в U, то развитие процесса происходит в каждой точке x независимо. Это определяет довольно простой марковский процесс со значениями в $U^{\mathbf{Z}^\nu}$, который также обладает свойством сходимости к единственному стационарному распределению для любого начального состояния. Далее мы рассматриваем слабые возмущения процесса, сохраняющие равноправность точек (трансляционная инвариантность), но вводящие зависимость между процессами в разных точках. Мы доказываем теорему устойчивости: сходимость к единственному стационарному распределению для начальных условий, моменты которых не слишком растут при $\|x\|\to\infty$. В действительности мы в некоторых предположениях относительно цепи L получаем существенно больше: экспоненциальную сходимость и явный ряд для стационарного распределения.

Эта задача имеет определенную историю. Для конечного U первые результаты о сходимости были одновременно получены в работах [2], [4], используя метод Добрушина [10]. Новый метод был предложен в [5]. В рамках современной идеологии теории кластерных разложений это было сделано в [27], [25]. Если U бесконечно, то возникают существенные технические трудности. Однако случай, когда L удовлетворяет условию Деблина, прост. Для компактного U и некомпактного U в условиях Деблина это было сделано в [38], [1] соответственно. Условие Деблина означает, что в цепи L имеет место

$$|p_t - \pi| < C e^{-\alpha t}, \qquad (D)$$

где p_t — распределение в момент t, π — стационарное распределение, а константы $C>0$ и $\alpha>0$ не зависят от начального распределения.

Классическим примером, где не выполнено (D), является случайное блуждение на полупрямой (трансляционно-инвариантное с ограниченными скачками). В нем константа C зависит от того, в какой точке мы находились в начальный момент. Этот пример происходит из простейшей системы массового обслуживания. Множество других систем с этим же свойством дают случайные блуждания в $\mathbf{Z}_+^N$ со свойством максимально возможной однородности [24].

Для наших цепей мы должны не просто постулировать оценки (D) с константой $C>0$, зависящей от начального распределения, но иметь конструктивный прием получения такой оценки, который в дальнейшем должен быть обобщен на класс процессов с взаимодействием. Наиболее универсальным таким приемом является использование функций Ляпунова [31], [24]. И мы постулируем, что для нашей цепи такая функция построена. Укажем, что другой подход — использование мажорант — развивался в [20].

Мы рассматриваем два существенно технически различных случая:

1) счетные цепи L с дискретным временем в общем случае, задавая функции Ляпунова аксиоматически; случай непрерывного времени вносит, конечно, ряд модификаций (см. [14]), мы его опускаем в нашем обзоре;

2) системы стохастических уравнений Ито с полиномиальным ростом коэффициентов сноса. Особенность этого случая состоит в том, что мы исследуем сходимость конечномерных плотностей, и нужны довольно тонкие оценки плотностей в конечномерном случае.

Техника довольно громоздка, но общая схема доказательств проста. Мы получаем формальные ряды интегрированием уравнений Колмогорова. Эти ряды являются аналогами кластерных разложений для данного случая. Коэффициенты этих рядов нумеруются диаграммами. Ненулевой вклад дают лишь «связные» диаграммы, число которых оценивается A^n, где n — число ребер диаграммы. Факт связности здесь чрезвычайно прост и не требует никакой техники семиинвариантов. Для диаграммы мы получаем оценки типа $\gamma^t (A\varepsilon)^n$, $0<\gamma<1$, где t — «высота» диаграммы, ε — параметр взаимодействия, что дает сходимость нужного нам ряда. Основные трудности возникают

при получении указанной оценки вклада диаграммы. Эти оценки получаются из оценок одномерной плотности, ее производных и оценок типа (D) с указанием зависимости константы C от точек u, v в переходной плотности $p(t, u, v)$. Оценку типа (D) мы используем для длинных ребер диаграммы.

Случай ограниченных коэффициентов сноса в уравнениях Ито был рассмотрен в [26]. Здесь мы подробно рассматриваем случай их полиномиального роста.

Отметим еще раз, что мы рассматриваем здесь случай малого возмущения независимых процессов. Другой случай — малые возмущения гауссовских (линейных) систем. Чисто гауссовские системы рассматривались в [12], [15], [16], [30], [34]. Малые возмущения гауссовских систем Ито возникают, например, в так называемом методе стохастического квантования [35]. Однако до последнего времени все строгие результаты для метода стохастического квантования были получены в конечном объеме пространства. Доказательство экспоненциальной сходимости соответствующих систем см. в [35]. Там же построена теория уравнения Ито в грассмановом случае и доказана экспоненциальная сходимость. Возмущения гауссовых систем особо интересны, т. к. позволяют сделать предельный переход от решетки к непрерывному пространству.

Кроме метода стохастического квантования, в последнее время такие процессы рассматриваются в модельных задачах магнитной гидродинамики ([21], [15]) и в сетях связи ([20], [14]).

Теоремы существования и единственности бесконечномерных уравнений Ито см. в [9], [21], [28], [33].

Надо сказать о результате Т. В. Гири [8] относительно сходимости к равновесию для систем в бесконечном объеме. Его отличие от нашего случая состоит в использовании свойства монотонности. Остальные результаты относятся к конечному объему. Результат Гири, по-видимому, связан с теми доказательствами сходимости общих процессов с локальным взаимодействием [36], которые основаны на некоторых свойствах монотонности (см. также [37]), но из которых нельзя извлечь даже экспоненциальной скорости сходимости.

Для чтения статьи достаточно базовых понятий из теории цепей Маркова.

§ 1. Формулировка основных результатов

1. Локально взаимодействующие цепи Маркова со счетным множеством состояний и дискретным временем. Здесь U счетно; пусть $p(u, v)$, $u, v \in U$ — вероятность перехода в счетной цепи Маркова L за один шаг из u в v.

Относительно цепи Маркова L предполагаются условия, обеспечивающие ее эргодичность и достаточно быструю сходимость к стационарному распределению [24]:

L — неприводима и непериодична; (A_0)

для цепи L построена функция Ляпунова (A_1)
$f: U \to \mathbf{R}_+$ такая, что

а) ряд $\Sigma_f \exp\{-bf\}$, где суммирование проводится по всем значениям функции f, сходится при любом $b>0$, и для любого $r \in \mathbf{R}_+$ множество $\{u \in U \mid f(u) \leqslant r\}$ конечно;

б) $p(u, v) \neq 0$ только в том случае, если

$$|f(u)-f(v)| \leqslant M$$

для всех $u, v \in U$, где M — некоторая положительная константа;

в) для всех $u \in U \setminus U_0$

$$\sum_{v \in U} p^{(k(u))}(u, v)\, f(v) - f(u) \leqslant -\delta,$$

где множество $U_0 \subset U$ конечно, $\delta>0$ — фиксировано, k — ограниченная функция на U со значениями $1, 2, 3, \ldots,$ $p^{(k)}(u, v)$ — вероятность перехода цепи L из u в v за k шагов; $u, v \in U$.

Многочисленные примеры таких цепей, например, в [24].

Рассмотрим на U дискретную топологию и на $U^{\mathbf{Z}^\nu}$ топологию тихоновского произведения. Пусть $\mathscr{B}$ — наименьшая σ-алгебра борелевских подмножеств $U^{\mathbf{Z}^\nu}$ в этой топологии.

Определим марковский процесс $\xi_t = (\xi_t(z),\ z \in \mathbf{Z}^\nu)$, $t \in \mathbf{Z}_+$, со значениями в $(U^{\mathbf{Z}^\nu}, \mathscr{B})$, задавая:

1. распределение случайных величин $\xi_0(z)$, $z \in \mathbf{Z}^\nu$, на $(U^{\mathbf{Z}^\nu}, \mathscr{B})$, т. е. начальное распределение;

2. переходные вероятности, определенные так, что для каждого $t>0$ при любых фиксированных значениях $\{\xi_t(z) \in U,$ $z \in \mathbf{Z}^\nu\}$ случайные величины $\xi_{t+1}(z)$, $z \in \mathbf{Z}^\nu$, условно независимы для разных z и

$$P\{\xi_{t+1}(z) = u \mid \xi_t\} = p(\xi_t(z), u) + \varepsilon c(\xi_t(z+Q), u), \quad (1.1.1)$$

где множество $Q \subset \mathbf{Z}^\nu$, $|Q| < \infty$, фиксировано, $0 \in Q$;

$$z+Q = \{z+l \mid l \in Q\},$$
$$\xi_t(z+Q) = (\xi_t(x),\ x \in z+Q);$$

$\varepsilon \in \mathbf{R}$ — константа взаимодействия, функция $c: \mathbf{R}^{|Q|+1} \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условиям:

$$0 \leqslant p(u_0, v) + \varepsilon c(u_Q, v) \leqslant 1 \quad (A_2)$$

для всех $v \in U$, $u_Q \in U^{|Q|}$ и $|\varepsilon| < \varepsilon'$, ε' — некоторая положительная константа;

$$\Sigma_{u \in U}\, c(u_Q, u) = 0 \quad (A_3)$$

для любых $u_Q \in U^{|Q|}$.

Условия A_2 и A_3 являются необходимыми и достаточными для того, чтобы (1.1.1) было распределением вероятностей на U при любых $(\xi_t(z) \in U,\ z \in \mathbf{Z}^\nu)$, $|\varepsilon| < \varepsilon'$.

Таким образом процесс $\xi_t = (\xi_t(z),\ z \in \mathbf{Z}^\nu)$, $t \in \mathbf{Z}_+$, является «малым возмущением» набора независимых экземпляров счетной цепи Маркова L, занумерованных точками решетки $\mathbf{Z}^\nu$. Для функции c дополнительно предполагается:

$$|c(u_Q, u)| \leqslant p^{(\tau)}(u_0, u) \quad (A_4)$$

для всех $u \in U$, $u_Q \in U^{|Q|}$, и некоторого $\tau > 0$.

Теорема 1.1.1. Пусть выполнены условия A_0—A_4, и пусть совместное распределение случайных величин $\xi_0(z)$, $z \in \mathbf{Z}^\nu$, удовлетворяет условию

$$M\left\{\exp\left(\alpha_0 \sum_{j=1}^{n} f(\xi_0(z_j))\right)\right\} \leqslant C_0^n \quad (A_5)$$

для любых $n \geqslant 1$, попарно различных $z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{Z}^\nu$, где α_0, $C_0 > 0$ — некоторые константы.

Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, для любых попарно различных $z_1, \ldots, z_k \in \mathbf{Z}^\nu$, $k \geqslant 1$, существуют

$$\lim_{t \to \infty} P\{\xi_t(z_1) = u_1, \ldots, \xi_t(z_k) = u_k\} = p_\infty^{z_1, \ldots, z_k}(u_1, \ldots, u_k)$$

и задают предельное стационарное распределение. Более того, эти пределы являются аналитическими функциями по ε в области $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, и для любого $t \in \mathbf{Z}_+$

$$|P\{\xi_t(z_1) = u_1, \ldots, \xi_t(z_k) = u_k\} - p_\infty^{z_1, \ldots, z_k}(u_1, \ldots, u_k)| \leqslant$$
$$\leqslant C_1^k e^{-\alpha_1 t}$$

для некоторых констант $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_0) > 0$, $C_1 = C_1(\alpha_0, C_0) > 0$ при всех $k \geqslant 1$, $z_1, \ldots, z_k \in \mathbf{Z}^\nu$, $z_i \neq z_j$ при $1 \leqslant i < j \leqslant k$.

2. Диффузионные процессы с локальным взаимодействием. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ — некоторое вероятностное пространство с потоком $(\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$.

Рассмотрим бесконечномерный диффузионный процесс $\xi_t = (\xi_t(z), z \in \mathbf{Z}^\nu) \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^\nu}$ на $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, определенный системой стохастических дифференциальных уравнений

$$d\xi_t(z) = [-P(\xi_t(z)) + \varepsilon b(\xi_t(z+l_1), \ldots, \xi_t(z+l_N))]\,dt +$$
$$+ \sigma(\xi_t(z))\,dw_t(z) \quad (1.1.2)$$

где $w_t(z)$, $t \geqslant 0$, $z \in \mathbf{Z}^\nu$ — стандартные винеровские процессы, согласованные с $\mathscr{F}_t$ и независимые для разных $z \in \mathbf{Z}^\nu$, $Q = \{l_1 = 0, l_2, \ldots, l_N\}$ — подмножество $\mathbf{Z}^\nu$; с начальным условием

$$\xi_0 = \eta = (\eta(z), z \in \mathbf{Z}^\nu), \quad (1.1.2')$$

согласованным с $\mathscr{F}_0$.

Условие (B_1): функция $P(u)$ как при $u > u_0 > 0$, так и при

$-u>u_0>0$ ограничена сверху и снизу многочленами нечетной степени $n\geqslant 1$ с положительными коэффициентами при старшем члене, и $P(u)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно, причем для любого $\alpha>0$

$$\lim_{|u|\to\infty}|P'''(u)|e^{-\alpha u^2}=0. \tag{1.1.3}$$

Отметим, что условие (B_1) обеспечивает эргодичность каждого процесса $\xi_t(z)$, $z\in\mathbf{Z}^\nu$, при $\varepsilon=0$.

Условие (B_2):

$$|b(u_1,\ldots,u_N)|\leqslant B\sum_{i=1}^{N}|u_i|^{n-\delta}$$

для некоторых $B,\delta>0$ (без ограничения общности можно считать, что $0<\delta<1$), и функция b имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, причем для любого $\alpha>0$

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\max_{1\leqslant i,j,k\leqslant N}\left|\frac{\partial^3 b(u_1,\ldots,u_N)}{\partial u_i\partial u_j\partial u_k}\right|e^{-\alpha\|u\|^2}=0. \tag{1.1.4}$$

Условие (B_3): функция σ отделена от нуля и от бесконечности, т. е.

$$0<c_1\leqslant\sigma(u)\leqslant c_2<\infty,\ u\in\mathbf{R},$$

для некоторых $c_2\geqslant c_1>0$ и бесконечно дифференцируема.

Условие (B_4): функция $\left|\sigma'(u)\int_0^u P(v)\,dv\right|$ равномерно ограничена по $u\in\mathbf{R}$, и $P'(u)-\frac{P^2(u)}{\sigma^2(u)}\leqslant -Au^{2n}$, $|u|>u_1$, для некоторых A, $u_1>0$.

Условие (B_5): для каждого $z\in\mathbf{Z}^\nu$ случайные величины $\eta(z)$ ограничены, т. е.

$$\eta(z)\in[-C;C],\ C>0,\ z\in\mathbf{Z}^\nu.$$

Одним из возможных способов определения процесса (1.1.2), (1.1.2$'$) является рассмотрение конечномерного урезания ξ_t^Λ процесса (1.1.2) с нулевыми граничными условиями, т. е. систему (1.1.2) мы рассматриваем лишь для $z\in\Lambda\subset\mathbf{Z}^\nu$ ($|\Lambda|<\infty$) и полагаем $\xi_t(z)=0$, $z\notin\Lambda$. (Существование и единственность решения такой системы доказаны, например, в [21]). Далее можно доказать, что ξ_t^Λ сходится при всех t в смысле конечномерных распределений при $\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^\nu$.

Фактически из наших рассуждений будет следовать существование процесса (1.1.2).

Теорема 1.1.2. Пусть выполнены условия (B_1)—(B_5). Тогда для каждого конечного $X\subset\mathbf{Z}^\nu$ и $t>0$ существует плотность распределения

$$p_\eta(t,v_X),\ v_X\in\mathbf{R}^{|X|},$$

вектора $(\xi_t(z), z\in X)$, где ξ_t — процесс, определенный в (1.1.2), (1.1.2$'$), причем существует такое $\varepsilon_0>0$, что при всех $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ при $t\to\infty$ плотность $p_\eta(t,v_X)$ экспоненциально сходится к некоторой плотности $p(v_X)$ независимо от начального распределения η:

$$|p_\eta(t,v_X)-p(v_X)|<\theta^{|X|}e^{-\gamma t}$$

при $t\geqslant t_0$, t_0, $\theta=\theta(C)$, $\gamma>0$ — некоторые постоянные.

Более того, при $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ функция $p(v_X)$ аналитически зависит от ε.

Сформулируем еще две теоремы, дополняющие результат теоремы 1.1.2.

Теорема 1.1.3. В условиях теоремы 1.1.2 при $n=1$ можно положить в условии (B_2) $\delta=0$, и результат останется справедливым.

Теорема 1.1.4 ([26]). Пусть для функций P, b из уравнения (1.1.2) выполнены условия: найдутся такие C_0, B, $u_0>0$, что

$P(u)\leqslant -C_0$, $u>u_0$,

$P(u)\geqslant C_0$, $u<-u_0$; $|P(u)|$, $|b(\bar{u})|\leqslant B$, $u\in\mathbf{R}$, $\bar{u}\in\mathbf{R}^N$,

и выполнены условия (B_3)—(B_5), (1.1.3) и (1.1.4). Тогда все утверждения теоремы 1.1.2 справедливы.

Глава 2

КЛАСТЕРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

§ 1. Диаграммы и кластеры

Определим понятие диаграммы в двух случаях по-разному. Диаграмма есть пара из множества точек и множества отрезков.

Пусть $t\in\{1,2,\ldots\}$, и пусть $A=\{(z_i,s_i),\ i=1,\ldots,k\}$ для некоторого $k\geqslant 1$ — подмножество $\mathbf{Z}^\nu\times\{1,2,\ldots,t-1\}$. Точками диаграммы $D_1(t,A)$ будут точки множества

$$D_1(A)=A\cup\{z+Q\}\times\{\tau-1\}\,|\,(z,\tau)\in A\}.$$

Пусть $t>0$, и пусть $A=\{(z_i,s_i), i=1,\ldots,k\}$ для некоторого $k\geqslant 1$, $z_i\in\mathbf{Z}^\nu$, $i=1,\ldots,k$, $0\equiv s_{k+1}<s_k<\ldots<s_1<s_0\equiv t$. Точками диаграммы $D_2(t,A)$ будут точки множества

$$D_2(A)=\{(z_i,s_{i-1}),\ \{z_i+Q\}\times\{s_i\},\ i=1,\ldots,k\}.$$

При этом элементы множества A будем называть главными точками диаграммы.

Отрезком диаграммы $D_i(t, A)$, $i \in \{1, 2\}$, является любое множество

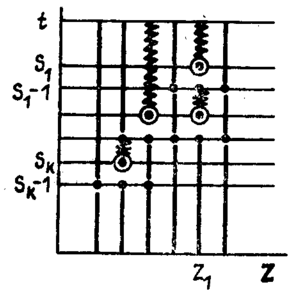
$$I(z, \tau, \tau') = \{z\} \times [\tau, \tau'], \ 0 \leqslant \tau < \tau' \leqslant t,$$

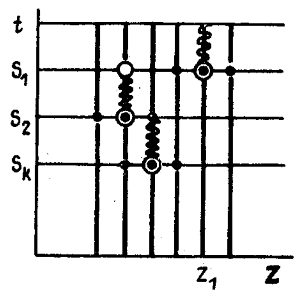
содержащее хотя бы одну точку диаграммы $D_i(t, A)$, и такое, что

$$I(z, \tau, \tau') \cap \{D_i(A) \cup \{\mathbf{Z}^\nu \times \{0, t\}\}\} = \{(z, \tau), (z, \tau')\},$$

причем $(z, \tau') \notin A$, если $i=1$.

Точки (z, τ) и (z, τ') будем называть, соответственно, нижним и верхним концами отрезка. Главным отрезком назовем отрезок диаграммы, нижний конец которого является главной точкой (см. рис.).





• и ○ – *точка диаграммы*

◉ - *главная точка диаграммы*

I - *отрезок*

- *главный отрезок*

Определим понятие кластера. Пусть X — произвольное конечное подмножество $\mathbf{Z}^\nu$, $k \geqslant 1$, $t > 0$, — произвольно фиксированы.

(X, t)-кластером в $\mathbf{Z}^\nu \times \mathbf{R}_+$ мощности k назовем любое множество точек

$$\{(z_i, s_i), i=1, \ldots, k\}, z_i \in \mathbf{Z}^\nu, t > s_i > 0, i=1, \ldots, k,$$

такое, что

1) $z_i \in X$ для всех индексов $1 \leqslant i \leqslant k$, если
$$s_i = \max\{s_1, \ldots, s_k\};$$

2) $z_i \in \bigcup_{j: s_j > s_i} \{z_i + Q\} \cup X$ для остальных индексов $1 \leqslant i \leqslant k$.

§ 2. Кластерное разложение

В этом параграфе, используя диаграммную технику, мы преобразуем ряды для конечномерных распределений в наших случаях.

1. Цепи Маркова с дискретным временем. Пусть ξ_t — процесс, определенный в гл. 1, § 1, п. 1.

Определение. Пусть $(x, t) \in \mathbf{Z}^\nu \times \mathbf{Z}_+$. Конусом с вершиной в точке (x, t) назовем множество $\Lambda(x, t) \subset \mathbf{Z}^\nu \times \mathbf{Z}_+$, определяемое индуктивно так:

$$\Lambda(x, 0) = \{(x, 0)\},$$
$$\Lambda(x, t+1) = \bigcup_{y \in Q} \Lambda(x+y, t) \cup \{(x, t+1)\}.$$

Пусть $\Lambda_0(x, t) = \Lambda(x, t) \setminus (\mathbf{Z}^\nu \times \{0\})$.

Для каждого $X \subset \mathbf{Z}^\nu$, $|X| < \infty$, $t \in \mathbf{Z}_+$, $u_X = (u_x, x \in X) \in U^{|X|}$ по формуле полной вероятности из (1.1.1) получаем:

$$P\{\xi_t(x) = u_x, \ x \in X\} = \sum_{u}{}' \left[\prod_{(y,\tau)} \left(p\left(u_y^{\tau-1}, u_y^\tau\right) + \varepsilon c\left(u_{y+Q}^{\tau-1}, u_y^\tau\right)\right)\right] \times$$
$$\times P\left\{\xi_0(y) = u_y^0, (y, 0) \in \bigcup_{x \in X} \Lambda(x, t)\right\}, \qquad (2.2.1)$$

где $\sum_u{}'$ — сумма по всем конфигурациям:

$$\bar{u} = \left\{u_y^\tau \in U \mid (y, \tau) \in \bigcup_{x \in X} \Lambda(x, t)\right\} \text{ такое, что } u_x{}^t = u_x, \ x \in X;$$

Π — произведение по всем точкам $(y, \tau) \in \bigcup_{x \in X} \Lambda(x, t)$.

Раскроем в (2.2.1) скобки. Тогда

$$P\{\xi_t(x) = u_x, \ x \in X\} = \sum_{u}{}' \sum_{A} \varepsilon^{|A|} \left[\prod_{(y,\tau) \in \bar{A}} p\left(u_y^{\tau-1}, u_y^\tau\right)\right] \times$$
$$\times \left[\prod_{(y,\tau) \in A} c\left(u_{y+Q}^{\tau-1}, u_y^\tau\right)\right] P\left\{\xi_0(y) = u_y^0, \ (y, 0) \in \bigcup_{x \in X} \Lambda(x, t)\right\}, \quad (2.2.2)$$

где $\sum_A$ — сумма по всем подмножествам $A \subseteq \bigcup_{x \in X} \Lambda_0(x, t)$; $\bar{A} = \bigcup_{x \in X} \Lambda_0(x, t) \setminus A$.

Рассмотрим для каждого $A \subseteq \bigcup_{x \in X} \Lambda_0(x, t)$ величины

$$K_A(u_X, t) = \sum{}' \left[\prod_{(y,\tau) \in \bar{A}} p\left(u_y^{\tau-1}, u_y^\tau\right)\right] \left[\prod_{(y,\tau) \in A} c\left(u_{y+Q}^{\tau-1}, u_y^\tau\right)\right] \times$$
$$\times P\left\{\xi_0(y) = u_y^0, \ (y, 0) \in \bigcup_{x \in X} \Lambda(x, t)\right\}.$$

Учитывая условие (A_3) на функцию c (Гл. 1, § 1, п. 1) и воспользовавшись определением кластера, нетрудно понять, что

$$K_A(u_X, t) = 0$$

для всех $u_X \in U^{|X|}$, если множество $A \neq \varnothing$ не является (X, t)-кластером. Следовательно,

$$P\{\xi_t(x) = u_x, \ x \in X\} = \sum_{A - (X, t)\text{-кластер}} \varepsilon^{|A|} K_A(u_X, t) + K_\varnothing(u_X, t), \ (2.2.3)$$

где

$$K_{\varnothing}(u_X, t)=\sum_{u_x\in U,\, x\in X}\left[\prod_{x\in X} p^{(t)}(u_x^0,\ u_x)\right] P\{\xi_0(x)=u_x^0,\ x\in X\},$$

и для каждого (X, t)-кластера A величины $K_A(u_X, t)$ на языке диаграмм выражаются так:

$$K_A(u_X, t)=\sum_{u}\left[\Pi^1\left(c\left(u_{y+Q}^{\tau-1},\ u_y^{\tau}\right) p^{(\tau'-\tau)}(u_y^{\tau},\ u_y^{\tau'})\right)\right]\times$$

$$\times\left[\Pi^2 p^{(\tau'-\tau)}\left(u_y^{\tau},\ u_y^{\tau'}\right)\right] P\{\xi_0(y)=u_y^0,\ (y, 0)\in G(A)\cup\{X\times\{0\}\}\},\quad (2.2.3')$$

где Π^1 — произведение по всем главным отрезкам $I(y,\tau,\tau')$ диаграммы $D_1(t, A)$;

Π^2 — произведение по всем остальным отрезкам $I(y,\tau,\tau')$ диаграммы такое, что $(y,\tau')\in D_1(A)$

$\sum_u$ — сумма по всем конфигурациям

$$\bar{u}=\{u_y^{\tau}\in U \mid (y,\tau)\in D_1(A)\cup\{X\times\{0\}\}\cup G(A),\ u_y^t=u_y,\ y\in X\},$$

$G(A)$ — проекция множества $D_1(A)$ на слой $\mathbf{Z}^{\nu}\times\{0\}$:

$$G(A)=\{(y, 0)\mid \exists\tau>0:\ (y,\tau)\in D_1(A)\}.$$

2. Диффузионные процессы с локальным взаимодействием. Получим разложение в ряд плотности конечномерного распределения для этого случая.

Пусть $X\subset\Lambda\subset\mathbf{Z}^{\nu}$ произвольно фиксированы, $|\Lambda|<\infty$. Из теоремы Гирсанова [22] следует, что процесс $(\xi_t^{\Lambda}(z),\ z\in X)$ (процесс ξ_t^{Λ} определен в гл. 1, § 1 п. 2) обладает плотностью), — обозначим ее через $p^{\Lambda}(t, v_X)$, которая удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова:

$$\frac{\partial}{\partial t} p^{\Lambda}(t,\ v_X)=$$

$$=-\sum_{z\in X}\left\{\frac{\partial}{\partial v_z}\left[-P(v_z) p^{\Lambda}(t,\ v_X)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v_z^2}\left[\sigma(v_z) p^{\Lambda}(t,\ v_X)\right]\right\}-$$

$$-\varepsilon\sum_{z\in X}\ \int\limits_{\mathbf{R}^{|\{z+Q\}\setminus X|}}\delta\left(v_{\{z+Q\}\setminus\Lambda}\right)\frac{\partial}{\partial v_z}\left[b(v_{z+Q}) p(t,\ v_{X\cup\{z+Q\}})\right]\times$$

$$\times\, dv_{\{z+Q\}\setminus X},\qquad (2.2.4)$$

где $\delta(v_Y)$ — δ-функция на $\mathbf{R}^Y$, $Y\subset\mathbf{Z}^{\nu}$, $|Y|<\infty$.

Обозначим далее через H_0 и H_1^{Λ} операторы, действующие на $|Y|$ — частичные плотности $p^{\Lambda}(t, v_Y)$, — $Y\subset\Lambda$ — произвольно, следующим образом:

$$H_0 p^{\Lambda}(t,\ v_Y)=-\sum_{z\in Y}\left\{\frac{\partial}{\partial v_z}\left[-P(v_z) p^{\Lambda}(t,\ v_Y)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v_z^2}\left[\sigma(v_z) p^{\Lambda}(t,\ v_Y)\right]\right\}\qquad (2.2.5)$$

$$H_1^{\Lambda} p^{\Lambda}(t,\ v_Y)=-\sum_{z\in Y}\ \int\limits_{\mathbf{R}^{|\{z+Q\}\setminus X|}}\delta\left(v_{\{z+Q\}\setminus\Lambda}\right)\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial v_z}\left\{b(v_{z+Q}) p(t,\ v_{X\cup\{z+Q\}})\right\} dv_{\{z+Q\}\setminus X}.$$

Тогда уравнение (2.2.4) можно переписать так:

$$\frac{\partial}{\partial t} p^{\Lambda}(t,\ v_X)=(H_0+\varepsilon H_1^{\Lambda})\, p(t,\ v_X).\qquad (2.2.6)$$

Обозначим через $e^{H_0 t}$, $t\geqslant 0$, полугруппу операторов, связанную с «невозмущенным» процессом ξ_t^{Λ} (т. е. в (2.2.4) $\varepsilon=0$). Тогда решение уравнения (2.2.4), обозначим его через $p_0^{\Lambda}(t, v_X)$ при $\varepsilon=0$, можно представить в виде:

$$p_0^{\Lambda}(t,\ v_X)=e^{H_0 t} p^{\Lambda}(0,\ v_X)$$

либо

$$p_0^{\Lambda}(t,\ v_X)=\int\limits_{\mathbf{R}^{|X|}} p_0^{\Lambda}(t,\ u_X,\ v_X)\, p^{\Lambda}(0,\ u_X)\, du_X,\qquad (2.2.7)$$

где $p_0^{\Lambda}(t, u_X, v_X)$ — фундаментальное решение уравнения (2.2.4) при $\varepsilon=0$, т. е. плотность переходной вероятности «невозмущенного» процесса $(\xi_t^{\Lambda}(z),\ z\in X)$.

Ясно, что для всех Λ, $\Lambda'\supset X$, $|\Lambda|$, $|\Lambda'|<\infty$,

$$p_0^{\Lambda}(t,\ v_X)=p_0^{\Lambda'}(t,\ v_X).$$

Поэтому далее мы будем использовать обозначение $p_0(t, v_X)$ (и $p_0(t, u_X, v_X)$) для плотности (переходной плотности) процесса $(\xi_t(z), z\in X)$ при $\varepsilon=0$.

Уравнение (2.2.4) при $\varepsilon\neq 0$ эквивалентно уравнению

$$p^{\Lambda}(t,\ v_X)=e^{H_0 t} p^{\Lambda}(0,\ v_X)+\varepsilon\int\limits_0^t e^{H_0(t-s)} H_1^{\Lambda} p^{\Lambda}(s,\ v_X)\, ds.\ (2.2.8)$$

Очевидно, что решение уравнения (2.2.8) можно представить в виде

$$p^{\Lambda}(t,\ v_X)=e^{H_0 t} p^{\Lambda}(0,\ v_X)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\int\limits_0^t\int\limits_0^{s_1}\ldots\int\limits_0^{s_{k-1}} e^{H_0(t-s_1)} H_1^{\Lambda} e^{H_0(s_1-s_2)}\ldots$$

$$\ldots H_1^{\Lambda} e^{H_0 s_k} p^{\Lambda}(0,\ v_X)\, ds,\qquad (2.2.9)$$

если последний ряд сходится при всех $t>0$, $v_X\in\mathbf{R}^{|X|}$.

Далее мы докажем равномерную сходимость ряда (2.2.9) по Λ, что позволит перейти к пределу при $\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^\nu$. Иными словами, мы построим процесс ξ_t, определив все его конечномерные распределения.

Центральным пунктом доказательства равномерной сходимости является кластерное разложение.

В этом случае удобнее воспользоваться следующим понятием кластера в $\mathbf{Z}^\nu$.

Пусть X — некоторое конечное подмножество $\mathbf{Z}^\nu$, $k \geqslant 1$. Назовем X-кластером в $\mathbf{Z}^\nu$ мощности k любое упорядоченное множество точек из $\mathbf{Z}^\nu$ $z=(z_1, \ldots, z_k)$ такое, что

1) $z_1 \in X$;

2) $z_i \in \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} \{z_j+Q\} \cup X$.

Ясно, что если z — X-кластер в $\mathbf{Z}^\nu$ мощности k, то для произвольного $\bar{s}=(s_1, \ldots, s_k)$, $t > s_1 > \ldots > s_k > 0$ множество $(\bar{z}, \bar{s})=\{(z_i, s_i), i=1, \ldots, k\}$ является (X, t)-кластером в $\mathbf{Z}^\nu \times \mathbf{R}_+$ мощности k. Обратное утверждение также верно.

Теперь, используя представление (2.2.7), как и в предыдущем случае, ряд (2.2.9) можно переписать на языке диаграмм так:

$$p^\Lambda(t, v_X)=Mp_0(t, \eta_X, v_X)+\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Phi_\Lambda^k p_0(t, v_X), \qquad (2.2.10)$$

здесь для каждого $k \geqslant 1$

$$\Phi_\Lambda^k p_0(t, v_X)=\sum_{\substack{z-X\text{-кластер}\\ \text{мощности } k}} \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{k-1}} \int_{\mathbf{R}} \cdots \int_{\mathbf{R}} \Big\{ \prod_{\substack{(y,j):(y,s_j)\in\\ \in \Lambda(z)\setminus\Lambda}} \delta(u_y^j) \Big\} \times$$

$$\times \Big\{ \Pi_1 b(u_{y+Q}^j) \frac{\partial}{\partial u_y^j} p_0(s_{j-1}-s_j, u_y^j, u_y^{j-1}) \Big\} \{\Pi_2 p_0(s_i-s_j, u_y^j, u_y^i)\} \times$$

$$\times \Big\{ \prod_{y \in X\setminus\Lambda(z)} p_0(t, u_y^{k+1}, v_y) \Big\} P_{\eta^\Lambda}(du^{k+1}_{\{\Lambda(z)\cup X\}\cap\Lambda}) \Pi_3 du_y^j,$$

где для каждого z

$$\Lambda(z)=\bigcup_{i=1}^{k} \{z_i+Q\}; \quad \eta^\Lambda=(\eta_z, \ z\in\Lambda)$$

$$u_y^0=v_y, \quad y \in X;$$

и для всех $s=(s_1, \ldots, s_k)$, $t \equiv s_0 > s_1 > \ldots > s_k > s_{k+1} \equiv 0$,

$$(\bar{z}, \bar{s})=\{(z_i, s_i), i=1, \ldots, k\},$$

Π_1 — произведение по всем главным отрезкам $I(y, s_j, s_{j-1})$ диаграммы $D_2(t, (\bar{z}, \bar{s}))$;

Π_2 — произведение по всем остальным отрезкам $I(y, s_j, s_i)$ таким, что $(y, s_i) \in D_2(\bar{z}, \bar{s}) \cup \{X \times t\}$;

Π_3 — произведение по всем точкам (y, s_j) диаграммы.

(При выводе этого ряда мы воспользовались тем фактом, что $\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial u} p_0(t, u, v)\, dv \equiv 0$, $u \in \mathbf{R}$, $t > 0$.)

Таким образом, из приведенных (формальных) разложений ясно, что для дальнейшего изучения взаимодействующих процессов ξ_t необходимо рассмотреть свойства «невозмущенных» процессов. Невозмущенным (одномерным) процессам и посвящена следующая глава.

Глава 3

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НЕВОЗМУЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Экспоненциальная сходимость переходных вероятностей цепи Маркова с дискретным временем

Рассмотрим счетную цепь Маркова $L=\{\eta_t\}_{t\in \mathbf{Z}_+}$, определенную в главе 1, § 1, п. 1.

Утверждение 3.1.1. Для любого $h > 0$ можно указать такие $\beta_1 > 0$ и $d_1 > 0$, что для любого $t \in \mathbf{Z}_+$

$$P\{\eta_\tau \notin U_0, \ \tau \in \mathbf{Z}_+, \ 0 < \tau \leqslant t \mid \eta_0=u\} \leqslant d_1 e^{hf(u)-\beta_1 t},$$

где f, U_0 — из условия (A_1).

Утверждение 3.1.2. Существуют такие постоянные q, β_2, $d_2 > 0$, что для любого $u \in U$, $t \in \mathbf{Z}_+$ при $t > q^{-1} f(u)$

$$|p^{(t)}(u, u_0)-\pi_0(u_0)| \leqslant d_2 e^{-\beta_2 t},$$

где $u_0 \in U_0$ и $\{\pi_0(u), u \in U\}$ — стационарные вероятности для цепи L.

Оба эти утверждения доказаны в [24].

Замечание 3.1.1. Заметим, что в условии (A_1) в) без ограничения общности можно считать, что $|U_0|=1$ и $U_0=\{u_0\}$.

Действительно, цепь Маркова L неприводима и непериодична, значит существуют $n_0 \in \mathbf{Z}_+$ и $\delta_0 > 0$ такие, что для любого $u \in U_0$

$$p^{(n_0)}(u, u_0) \geqslant \delta_0 > 0.$$

Поэтому, если для функции f множество $U_0 \subset U$ состоит более чем из одной точки, можем рассмотреть другую функцию

$$f_1 : U \to \mathbf{R}_+,$$

положив

$$f_1(u_0)=f(u_0),$$

$$f_1(u)=f(u)+\frac{Mn_0}{\delta_0}+\delta_1+f(u_0),\quad u_0\neq u\in U,$$

где $\delta_1>0$ и $M>0$ — константа из условия А$_1$б), а также вместо функции k — функцию $k_1: U\to \mathbf{Z}_+$,

$$k_1(u)=\begin{cases} k(u), & u\in U\setminus U_0,\\ n_0, & u\in U_0.\end{cases}$$

Тогда для любого $u\in U$, $u\neq u_0$

$$\sum_{v\in V} p^{(k_1(u))}(u,v)f(v)-f(u)\leqslant -\delta',\quad \delta'>0.$$

При этом в условии ограниченности «скачков» (А$_1$б)) изменится лишь константа M.

Отметим, что утверждение 3.1.2 эквивалентно следующему утверждению.

Утверждение 3.1.2′. Для любого $h>0$ можно указать такие $\beta_2'>0$ и $d_2'>0$, что для любого $u\in U$ и $t\in\mathbf{Z}_+$

$$|p^{(t)}(u,u_0)-\pi_0(u_0)|\leqslant d_2'\exp\{hf(u)-\beta_2't\}.$$

Рассмотрим теперь важные следствия из этих утверждений.

Утверждение 3.1.3. Для любого $h>0$ можно указать такие константы $\beta_3>0$ и $d_3>0$, что для любого $u\in U$ и любого набора t_j, $t_j'\in\mathbf{Z}_+$, $j=0,\ldots,N$, $0\leqslant t_0\leqslant t_0'\leqslant\ldots\leqslant t_N\leqslant t_N'$ имеет место неравенство

$$P\{\eta_t\neq u_0,\ t_j\leqslant t\leqslant t_j',\ j=0,\ldots,N,\ t\in Z_+\mid \eta_0=u\}\leqslant$$

$$\leqslant d_3^{N+1}\exp\left\{hf(u)-\beta_3\sum_{j=1}^{N}(t_j'-t_j)\right\}.$$

Доказательство. При $N=0$ это утверждение легко следует в силу замечания 3.1.1 из утверждения 3.1.1; поскольку

$$P\{\eta_\tau\neq u_0,\ \tau=t_0,\ldots,t_0'\mid\eta_0=u\}\leqslant$$

$$\leqslant P\{\eta_\tau\neq u_0,\ \tau=1,\ldots,t_0'\mid\eta_0=u\}+$$

$$+\sum_{\tau=1}^{t_0-1}p^{(\tau)}(u,u_0)P\{\eta_t\neq u_0,\ t=\tau+1,\ldots,t_0'\mid\eta_\tau=u_0\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\tau=1}^{t_0-1}d_1\exp\{-\beta_1(t_0'-\tau-1)+hf(u_0)\}+d_1\exp\{-\beta_1t_0'+hf(u)\}.$$

Аналогично для $N=m+1$, $m\in\mathbf{Z}_+$:

$$P\{\eta_\tau\neq u_0,\ \tau=t_j,\ldots,t_j',\ j=0,\ldots,m+1\mid\eta_0=u\}\leqslant$$

$$\leqslant P\{\eta_\tau\neq u_0,\ \tau=t_j,\ldots,t_j',\ j=0,\ldots,m-1,$$

$$\tau=t_m,\ldots,t_{m+1}'\mid\eta_0=u\}+$$

$$+\sum_{t=t_m'+1}^{t_{m+1}-1}P\{\eta_\tau=u_0,\ \tau=t_j,\ldots,t_j',\ j=0,\ldots,m\mid\eta_0=u\}\times$$

$$\times P\{\eta_\tau\neq u_0,\ \tau=t+1,\ldots,t_{m+1}'\mid\eta_t=u_0\}.$$

Из последнего неравенства индукцией по m получим утверждение 3.1.3.

Утверждение доказано.

Из этого утверждения в силу условия ограниченности скачков цепи L (условие (А$_1$б)) вытекают также следующие два утверждения.

Утверждение 3.1.4. Для любого $h>0$ можно указать такие α_4, h', $\beta_4>0$, что для любого $t\in\mathbf{Z}_+$ и любого $u\in U$

$$\sum_{v\in U}p^{(t)}(u,v)e^{h'f(v)}\leqslant d_4e^{hf(u)}$$

и

$$\sum_{v\in \Omega}F^{(t)}(u,v)e^{h'f(v)}\leqslant d_4e^{hf(u)-\beta_4t},$$

где $F^{(t)}(u,v)=P\{\eta_\tau\neq u_0,\tau=1,\ldots,t-1,\eta_t=v\mid\eta_0=u\}$.

Утверждение 3.1.5. Существуют такие $h_5>0$ и $d_5>0$, что

$$\sum_{u\in U}\pi_0(u)e^{h_5f(u)}\leqslant d_5.$$

Докажем последнее (здесь) утверждение относительно цепи L.

Утверждение 3.1.6. Для любого $h>0$ можно указать такие h_6, d_6, $\beta_5>0$, что для любого $u\in U$, $t\in\mathbf{Z}_+$

$$\sum_{v\in U}|p^{(t)}(u,v)-\pi_0(v)|e^{h_6f(v)}\leqslant d_6e^{hf(u)}.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$p^{(t)}(u,v)=F^{(t)}(u,v)+\sum_{\tau=1}^{t}p^{(\tau)}(u,u_0)F^{(t-\tau)}(u_0,v)$$

и

$$\pi_0(v)=\sum_{u\in U}\pi_0(u)F^{(t)}(u,v)+\sum_{\tau=1}^{t}\pi_0(u_0)F^{(t-\tau)}(u_0,v).$$

Тогда

$$|p^{(t)}(u, v)-\pi_0(v)|\leqslant F^{(t)}(u, v)+\sum_{u'\in U}\pi_0(u')F^{(t)}(u', v)+$$

$$+\sum_{\tau=1}^{t}|p^{(\tau)}(u, u_0)-\pi_0(u_0)|\,F^{(t-\tau)}(u_0, v).$$

В силу утверждения 3.1.4 для любого $h>0$ найдутся такие h', β_4, $d_4>0$, что

$$\sum_{v\in U}|p^{(t)}(u, v)-\pi_0(v)|\,e^{h'f(v)}\leqslant$$

$$\leqslant d_4 e^{hf(u)-\beta_4 t}+\sum_{u'\in U}\pi_0(u')e^{hf(u')-\beta_4 t}+$$

$$+\sum_{\tau=1}^{t}|p^{(\tau)}(u, u_0)-\pi_0(u_0)|\,e^{hf(u_0)-\beta_4(t-\tau)}.$$

Используя теперь утверждение 3.1.5 и 3.1.2, получаем утверждение 3.1.6.

Утверждение доказано.

§ 2. Экспоненциальная сходимость плотностей одномерного диффузионного процесса

В этом параграфе мы будем изучать процесс, заданный уравнением

$$d\xi_t=-P(\xi_t)\,dt+\sigma(\xi_t)\,dw_t,\quad t>0, \tag{3.2.1}$$

$$\xi_0=u\in\mathbf{R}, \tag{3.2.1'}$$

где P, σ — функции из (1.1.2).

1. Оценка плотности. Обозначим через $\tilde{\xi}_t$ процесс, заданный уравнением

$$d\tilde{\xi}_t=\sigma(\tilde{\xi}_t)\,dw_t,\quad t>u, \tag{3.2.2}$$

$$\tilde{\xi}_0=u. \tag{3.2.2'}$$

Из теоремы Гирсанова [22] следует, что процессы ξ_t и $\tilde{\xi}_t$ обладают плотностями переходных вероятностей (обозначим их соответственно через $p(t, u, v)$ и $\tilde{p}(t, u, v)$, $u, v\in\mathbf{R}$, $t>0$), причем

$$p(t, u, v)=$$

$$=\tilde{p}(t, u, v)\,M\left\{\exp\left\{\int_0^t\frac{-P(\tilde{\xi}_s)}{\sigma(\tilde{\xi}_s)}\,dw_s-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{P^2(\tilde{\xi}_s)}{\sigma^2(\tilde{\xi}_s)}\,ds\right\}\Big|\,\tilde{\xi}_t=v\right\} \tag{3.2.3}$$

для всех $t>0$, u, $v\in\mathbf{R}$.

Лемма 3.2.1. Существуют такие a, α, β, β_1, $\beta_2>0$, что

$$p(t, u, v)\leqslant\frac{ae^{\beta_1 t}}{\sqrt{t}}\,e^{-\frac{(u-v)^2}{2t}\beta_2-B(u)+B(v)}\times$$

$$\times\begin{cases}e^{-\beta u^{n+1}}, & t\geqslant u^{-(n-1)},\\ e^{-\beta u^{n+1}}+e^{-t\alpha u^{2n}}, & t<u^{-(n-1)};\end{cases} \tag{3.2.4}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial u}\,p(t, u, v)\right|\leqslant a\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t}\right)e^{\beta_1 t}\,e^{-\frac{(u-v)^2}{t}\beta_2-B(u)+B(v)}\times$$

$$\times\begin{cases}e^{-\beta u^{n+1}}, & t\geqslant u^{(n-1)},\\ e^{-\beta u^{n+1}}+e^{-t\alpha u^{2n}}, & t<u^{-(n-1)};\end{cases} \tag{3.2.5}$$

где

$$B(v)=-\frac{1}{\sigma^2(v)}\int_0^v P(u)\,du,\quad t>0,\quad u, v\in\mathbf{R}.$$

Доказательство. Используя формулу Ито, преобразуем правую часть выражения (3.2.3):

$$p(t, u, v)=\tilde{p}(t, u, v)\,e^{B(v)-B(u)}\times$$

$$\times M\left\{\exp\left[-\int_0^t 2\overline{P}(\tilde{\xi}_s)\,\frac{\sigma'(\tilde{\xi}_s)}{\sigma^2(\tilde{\xi}_s)}\,dw_s+\int_0^t g(\tilde{\xi}_s)\,ds\right]\tilde{\xi}_t=v\right\}, \tag{3.2.6}$$

где

$$\overline{P}(u)=\int_0^u P(v)\,dv,$$

$$g(u)=-\frac{1}{2}\,\frac{P^2(u)}{\sigma^2(u)}+\frac{1}{2}\,P'(u)-2P(u)\,\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}-$$

$$-2\overline{P}(u)\,\sigma^2(u)\left(\frac{\sigma'(u)}{\sigma^3(u)}\right)'.$$

Найдем оценки для $\bar{p}(t, u, v)$ и математического ожидания в (3.2.6). С помощью случайной замены меры (см., например, [6]) процесс $\tilde{\xi}_t$ можем представить так:

$$\tilde{\xi}_t=u+w_{\varphi_t^{-1}}, \tag{3.2.7}$$

где φ_t^{-1} — обратная функция к $\varphi_t=\int_0^t\sigma(u+w_s)^{-2}\,ds$.

Отсюда легко понять, что найдутся такие $a', a''>0$, что

$$\tilde{p}(t,u,v)\leqslant \frac{e^{a't}}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{(u-v)^2}{t}a''} \tag{3.2.8}$$

для всех $t>0$, u, $v\in\mathbf{R}$.

Учитывая ограничения на функцию $\sigma(B_3, B_4)$, нетрудно вывести:

$$\mathrm{M}\left\{\exp\left[-\int_0^t 2\bar{P}(\tilde{\xi}_s)\frac{\sigma'(\tilde{\xi}_s)}{\sigma^2(\tilde{\xi}_s)}\,dw_s+\int_0^t g(\tilde{\xi}_s)\,ds\right]\middle|\,\tilde{\xi}_t=v\right\}\leqslant$$

$$\leqslant e^{\beta' t}\left(\mathrm{M}\left\{\exp\int_0^t 2g(\tilde{\xi}_s)\,ds\,\middle|\,\tilde{\xi}_t=v\right\}\right)^{1/2} \tag{3.2.9}$$

для некоторой $\beta'>0$.

Пусть далее $|u|\geqslant u_0$, $u_0>0$ — произвольно фиксировано. Рассмотрим последнее математическое ожидание в (3.2.9):

$$\mathrm{M}\left\{\exp\int_0^t 2g(\tilde{\xi}_s)\,ds\,\middle|\,\tilde{\xi}_t=v\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\mathbf{R}}\max_{|y|<x}\exp\left\{2\int_0^{t\wedge u^{-(n-1)}} g(u+y)\,ds+\right.$$

$$\left.+m\,(t-t\wedge u^{-(n-1)})\right\}P(dx), \tag{3.2.10}$$

где $m=\max\limits_{u\in\mathbf{R}} g(u)$;

$$P(dx)=P\{\max_{0\leqslant\varphi_s^{-1}\leqslant\varphi_t^{-1}\wedge\varphi^{-1}_{u^{-(n-1)}}}|w_{\varphi_s^{-1}}|\in dx\,|\,w_{\varphi_t^{-1}}=v-u\};$$

$$u\wedge v=\min\{u,v\},\quad u,\ v\in\mathbf{R}.$$

Используя известную формулу плотности распределения $\max\limits_{0<s<t} w_s$ (см., например, [19]), легко вывести оценку для $P(dx)$:

$$\begin{cases} P(dx)\leqslant\dfrac{a_3}{t}\,e^{-\frac{(2x-|v-u|)^2}{t}a_4}(2x-|v-u|)\,e^{\frac{(v-u)^2}{t}a_4}\,dx, \\ \qquad x\geqslant|v-u|, \\ P(dx)\equiv 0,\quad x<|v-u|, \end{cases} \tag{3.2.11}$$

если $t\leqslant u^{-(n-1)}$, и

$$P(dx)\leqslant\frac{a_3}{\tau}\sqrt{t}\,e^{\frac{(v-u)^2}{t}a_4}\times$$

$$\times\int_{\mathbf{R}^2}\frac{e^{-\frac{(2x-|y|)^2 a_4}{\tau}}}{\sqrt{\tau}}(2x-|y|)\frac{e^{-\frac{(y-(v-u))^2}{t-\tau}a_4}}{\sqrt{t-\tau}}\,dy\,dx, \tag{3.2.12}$$

если $t>u^{-(n-1)}$, где $a_3, a_4>0$ — некоторые постоянные, $\tau=u^{-(n-1)}$.

Пусть $t\leqslant u^{-(n-1)}$, $\frac{1}{3}|u|>|v-u|$. Подставляя (3.2.11) в (3.2.10), находим

$$\mathrm{M}\left\{\exp\int_0^t 2g(\tilde{\xi}_s)\,ds\,\middle|\,\tilde{\xi}_t=v\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\int_{|v-u|}^{|u|/3} e^{2t\max\limits_{|y|\leqslant x} g(u+y)}P(dx)+$$

$$+\int_{\frac{|u|}{3}}^{\infty} e^{2tm}\frac{a_3}{t}\,e^{-\frac{(2x-|v-u|)^2}{t}a_4}(2x-|v-u|)\,e^{\frac{(v-u)^2}{t}a_4}\,dx. \tag{3.2.13}$$

Поскольку $g(u)\leqslant -A_1u^{2n}+A_2$ для некоторых $A_1, A_2>0$, неравенство (3.2.13) можно продолжить так, что

$$\mathrm{M}\left\{\exp\int_0^t 2g(\tilde{\xi}_s)\,ds\,\middle|\,\tilde{\xi}_t=v\right\}\leqslant$$

$$\leqslant e^{-2tA_1\left(\frac{1}{2}u\right)^{2n}+2tA_2}+a_5e^{\frac{(v-u)^2}{t}a_4-\frac{(|u|-|v-u|)^2}{t}a_4}, \tag{3.2.14}$$

где $a_5>0$ — некоторая постоянная. Учитывая, что $|v-u|<\frac{|u|}{3}$ и $t<u^{-(n-1)}$, из (3.3.14), (3.3.9), (3.3.8) и (3.3.6) находим:

$$p(t,u,v)\leqslant$$

$$\leqslant a_6\frac{e^{\beta''t}}{\sqrt{t}}\,e^{-\frac{(u-v)^2}{t}a''+B(v)-B(u)}\{e^{-\alpha tu^{2n}}+e^{-\beta u^{n+1}}\} \tag{3.2.15}$$

для некоторых a_6, α, β, $\beta''>0$.

Если же $|u-v|>\frac{1}{3}|u|$ и $t<u^{-(n-1)}$, то требуемая оценка (3.2.4) для плотности $p(t, u, v)$ вытекает сразу из (3.2.6), (3.2.8) и (3.2.9).

Чтобы получить оценку (3.2.4) в случае $t>u^{-(n-1)}$, надо подставить в (3.2.10) оценку (3.2.12).

Случай $|u|\leqslant u_0$ тривиален.

Аналогично доказывается утверждение (3.2.5) леммы, если учесть все ограничения на функцию σ.

Лемма доказана.

2. Экспоненциальность сходимость.

Теорема 3.2.1. Пусть ξ_t — решение уравнения (3.2.1), (3.2.1′), $p(t, u, v)$ — плотность переходной вероятности процесса ξ_t.

Тогда для каждого $t_0>0$ найдутся такие Γ, $\gamma>0$, что для всех $t\geqslant t_0$, $t'>0$, $u, v, w\in\mathbb{R}$

$$p(t+t', u, w)-p(t, v, w)|<\Gamma e^{-\gamma t}e^{B(w)}\max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\} \tag{3.2.16}$$

$$\int\limits_{x>|w|}|p(t+t', u, x)-p(t, v, x)|\,dx< \\ <\Gamma e^{-\gamma t}e^{B(|w|)}\max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}, \tag{3.2.17}$$

$$\int\limits_{x<-|w|}|p(t+t', u, x)-p(t, v, x)|\,dx< \\ <\Gamma e^{-\gamma t}e^{B(-|w|)}\max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}. \tag{3.2.18}$$

Доказательство. Идея здесь та же, что и в доказательстве теоремы 2 из [26].

Зафиксируем произвольно t_1, $D>0$ и введем в рассмотрение процесс $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ на $\mathbb{R}^2$, $t=0, t_1, 2t_1, \ldots$, заданный плотностями вероятностей переходов за время t_1 из точки (u, v) в точку (u', v'):

$$p(t_1;\ u,\ v;\ u',\ v')=p(t_1,\ u,\ u')\,\delta_{u'v'},$$

если $u=v$;

$$p(t_1, u, v; u', v')=[p(t_1, u, u')- \\ -\chi(u, v; u', u')][p(t_1, v, v')- \\ -\chi(u, v; v', v')]\ \frac{1}{1-X(u, v)}+\chi(u, v; u', v')\,\delta_{u'v'},$$

если $u\neq v$ и $(u, v)\in[-D;\ D]^2$;

$$p(t_1;\ u,\ v;\ u',\ v')=p(t_1,\ u,\ u')\,p(t_1,\ v,\ v'),$$

если $u\neq v$ и $(u, v)\notin[-D, D]^2$, где

$$\chi(u, v; u', v')=\min\{p(t_1, u, u'), p(t_1, v, v')\},$$

$$X(u, v)=\int\limits_{\mathbb{R}}\chi(u, v; u', u')\,du',$$

δ_{uv}—δ-функция на $\mathbb{R}$, если одна из переменных (u или v) фиксирована.

Отметим некоторые свойства процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$:

1) $\int\limits_{\mathbb{R}}p(t;\ u,\ v;\ u',\ v')\,dv'=p(t, u, u')$, $\int\limits_{\mathbb{R}}p(t; u, v; u', v')\,du'=$ $=p(t,\ v,\ v')$, $t=t_1,\ 2t_1, \ldots;$

2) если $(u, v)\in[-D, D]^2$, то $P\{\xi_1(t+t_1)=\xi_2(t+t_1)|(\xi_1(t), \xi_2(t))=$ $=(u, v)\}=\int\limits_{\mathbb{R}}p(t_1, u, v; u', u')\,du'\geqslant\int\limits_{\mathbb{R}}\chi(u, v; u', u')\,du'>0.$

Лемма 3.2.2. Величину $D>0$ в определении процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ можно выбрать так, что

$$P\{\xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\notin[-D, D]^2, \tau=t_1, 2t_1, \ldots, t-t_1, |\xi_1(t)|>U, \\ |\xi_2(t)|>V\,|\,\xi_1(0)=u, \xi_2(0)=v\}\leqslant \\ \leqslant Ae^{-\alpha t}\max\{e^{B(\max\{U,V\})},\ e^{B(-\max\{U,V\})}\}\times \\ \times\max\{e^{-B(u)},\ e^{-B(v)}\} \tag{3.2.19}$$

для некоторых A, $\alpha>0$, $t\in\{t_1, 2t_1, \ldots\}$ всех $u, v\in R$, $U, V>0$.

Доказательство. Пусть $t=kt_1$, для некоторого $k\geqslant1$. Пусть $D=[-D; D]$, $D^2=[-D; D]^2$, D — произвольно фиксировано. Очевидна следующая оценка:

$$P\equiv P\{(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\notin\tilde{D}^2,\ \tau=t_1, \ldots, (k-1)t_1,\ |\xi_1(t)|>U, \\ |\xi_2(t)|>V\,|(\xi_1(0),\ \xi_2(0))=(u,\ v)\}\leqslant \\ \leqslant\sum_{k_0=\left[\frac{k}{2}\right]}^{k}\ \sum_{\bar{s}=s(k_0)}(P_1(\bar{s})+P_2(\bar{s})), \tag{3.2.20}$$

где для каждого k_0

$$\sum_{\bar{s}(k_0)} \text{— сумма по всем наборам}$$

$$\bar{s}(k_0)=\{s_1, \ldots, s_{k_0}\}\subseteq\{t_1, \ldots, kt_1\}$$

таким, что $2t_1\leqslant s_1<s_2<\ldots<s_{k_0}\leqslant(k-1)t_1$;

$$P_j(\bar{s})=P\{\xi_j(\tau)\notin\tilde{D},\ \tau\in\bar{s}(k_0);\ \xi_j(\tau)\in\tilde{D}^2,\ \tau\in\{2t_1, \ldots, (k-1)t_1\}\setminus\bar{s}; \\ (\xi_1(\tau),\ \xi_2(\tau))\notin\tilde{D}^2,\ \tau=t_1, \ldots, (k-1)t_1;\ |\xi_1(t)|>U, \\ |\xi_2(t)|>V\,|(\xi_1(0),\ \xi_2(0))=(u,\ v)\}.$$

Пусть $u\neq v$. Представим $P_j(\bar{s})$ в виде

$$P_j(\bar{s})=\iint\limits_{(u^1,u^2)\notin\tilde{D}^2}p(t_1;\ u,\ v;\ u^1,\ u^2)P_j'(\bar{s},\ u^1,\ u^2)\,du^1du^2, \tag{3.2.21}$$

где обозначили

$$P_j'(\bar{s},\ u^1,\ u^2)=P\{\xi_j(\tau)\notin\tilde{D},\ \tau\in\bar{s};\ \xi_j(\tau)\in\tilde{D},$$

$$\tau\in\{2t_1,\ldots,(k-1)t_1\}\setminus\bar{s};\ (\xi_1(\tau),\ \xi_2(\tau))\notin\tilde{D}^2,\ \tau=2t_1,\ \ldots,\ t-t_1;$$
$$|\xi_1(t)|>U,\ |\xi_2(t)|>V\,|(\xi_1(t_1),\ \xi_2(t_1))=(u^1,\ u^2)\},\quad j=1,\ 2.$$

Представим $P'_j(\bar{s},\ u^1,\ u^2)$ в виде суммы:

$$\begin{aligned}
P'_j(\bar{s},\ u^1,\ u^2)&=P\{\xi_j(\tau)\notin\tilde{D},\ \tau\in\bar{s},\ \xi_j(\tau)\in\tilde{D},\\
&\tau\in\{2t_1,\ \ldots,(k-1)t_1\}\setminus\bar{s},\ \xi_{\bar{j}}(\tau)\notin\tilde{D},\ (\xi_1(\tau),\ \xi_2(\tau))\in\tilde{D}^2,\\
&\tau=2t_1,\ \ldots,(k-1)t_1,\ |\xi_1(t)|>U,\ |\xi_2(t)|>V\,|(\xi_1(t_1),\ \xi_2(t_1))=\\
&=(u^1,\ u^2)\}+P\{\xi_j(\tau)\notin\tilde{D},\ \tau\in\bar{s},\ \xi_j(\tau)\in\tilde{D},\ \tau\in\{2t_1,\ \ldots,(k-1)t_1\}\setminus\bar{s};\\
&(\xi_1(\tau),\ \xi_2(\tau))\notin\tilde{D}^2,\ \tau\in\{2t_1,\ \ldots,\ t-t_1\};\\
&\exists\ t_1\leqslant T\leqslant(k-1)t_1:\xi_{\bar{j}}(T)\in\tilde{D},\ \xi_{\bar{j}}(\tau)\notin\tilde{D},\ \tau>T;\\
&|\xi_1(t)|>U,\ |\xi_2(t)|>V\,|(\xi_1(t_1),\ \xi_2(t_1))=(u^1,\ u^2)\},\quad j=1,\ 2.
\end{aligned}\tag{3.2.22}$$

Отсюда, учитывая определение процесса $(\xi_1(t),\ \xi_2(t))$, получаем:

$$\begin{aligned}
P'_j(\bar{s},\ u^1,\ u^2)&\leqslant\min_{j=1,2}(P\{\xi_j(\tau)\notin\tilde{D},\ \tau\in\bar{s},\\
&|\xi_j(t)|>V_j\,|\,\xi_j(t_1)=u^j\},\ P\{\xi_{\bar{j}}(\tau)\notin\tilde{D},\ \tau=2t_1,\ \ldots,\ (k-1)t_1,\\
&|\xi_{\bar{j}}(t)|>V_{\bar{j}}\,|\,\xi_{\bar{j}}(t_1)=u^{\bar{j}}\})+\\
&+P\{\xi_j(\tau)\notin\tilde{D},\ \tau\in\bar{s},\ |\xi_j(t)|>V_j,|\,\xi_j(t_1)=u^j\}\cdot P\{\xi_{\bar{j}}(T)\in\tilde{D},\\
&\xi_j(\tau)\notin\tilde{D},\ T<\tau\leqslant(k-1)t_2,\ |\xi_{\bar{j}}(t)|>V_{\bar{j}}\,|\,\xi_{\bar{j}}(t_1)=u^{\bar{j}}\},
\end{aligned}\tag{3.2.23}$$

где для удобства обозначений положили $V_1=U,\ V_2=V,\ \bar{j}=$
$=\begin{cases}1,\ j=2,\\ 2,\ j=1.\end{cases}$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned}
P\{\xi_j(\tau)\notin\tilde{D},\ \tau\in\bar{s},\ |\xi_j(t)|>V_j\,|\,\xi_j(t_1)=u^j\}&=\\
=\int\limits_{G_2}\cdots\int\limits_{G_{k-1}}\int\limits_{|v^k|>V_j}p(t_1,\ u^j,\ v^2)\,p(t_1,\ v^2,\ v^3)\ldots&\\
\ldots p(t_1,\ v^{k-1},\ v^k)\,dv^k\ldots dv^2,&
\end{aligned}\tag{3.2.24}$$

где

$$G_l=\begin{cases}\mathrm{R}\setminus\tilde{D},\ \text{если}\ t_1l\in\bar{s},\\ \mathrm{R},\ t_1l\notin\bar{s};\ l=1,\ \ldots,\ k-1.\end{cases}$$

Подставляя в (3.2.24) оценку (3.2.4), находим, что

$$\begin{aligned}
P\{\xi_j(\tau)\notin\tilde{D},\ \tau\in\bar{s},\ |\xi_j(t)|>V_j\,|\,\xi_j(t_1)=u^j\}&\leqslant\\
\leqslant e^{\beta t}\left(A_1e^{-a'D^{n+1}}\right)^k\max\left\{e^{B(V_j)},\ e^{B(-V_j)}\right\}e^{-B(u^j)},&
\end{aligned}\tag{3.2.25}$$

где $A_1,\ a'>0$ — некоторые константы, поскольку $k_0\geqslant\left[\frac{k}{2}\right]$.

Выберем D так, чтобы выполнялось

$$-a'D^{n+1}+\ln A_1+\beta_1t_1<-\bar{\alpha}\tag{3.2.26}$$

для некоторой $\bar{\alpha}>\ln 2$.

Теперь из (3.2.25) получаем

$$\begin{aligned}
P\{\xi_j(\tau)\notin\tilde{D},\ \tau\in\bar{s},\ |\xi_j(t)|>V_j\,|\,\xi_j(t_1)=u^j\}&\leqslant\\
\leqslant\bar{A}e^{-\bar{\alpha}\frac{t}{t_1}}\max\left\{e^{B(V_j)},\ e^{B(-V_j)}\right\}e^{-B(u^j)}.&
\end{aligned}\tag{3.2.27}$$

Заметим, что из (3.2.24)—(3.2.26) вытекают также следующие неравенства при $V_j\geqslant 0$:

$$P\{\xi_j(\tau)\notin\tilde{D},\ \tau\in\bar{s},\ \xi_j(t)>V_j\,|\,\xi_j(t_1)=u^j\}\leqslant\bar{A}e^{-\bar{\alpha}\frac{t}{t_1}}e^{B(V_j)-B(u^j)},\tag{3.2.28}$$

$$P\{\xi_j(\tau)\notin\tilde{D},\ \tau\in\bar{s},\ \xi_j(t)<-V_j\,|\,\xi_j(t_1)=u^j\}\leqslant\bar{A}e^{-\bar{\alpha}\frac{t}{t_1}}e^{B(-V_j)-B(u^j)}.$$

С помощью (3.2.27) из (3.2.23) находим

$$\begin{aligned}
P'_j(\bar{s},\ u^1,\ u^2)\leqslant A_2e^{-\bar{\alpha}\frac{t}{t_1}}\Big(\min_{j=1,2}\max\left\{e^{B(V_j)},\ e^{B(-V_j)}\right\}+&\\
+\exp\{\max(B(U),\ B(-U))\}\exp\{\max(B(V),\ B(-V))\}\Big)\max_{j=1,2}e^{-B(u^j)}&
\end{aligned}$$

для некоторой $A_2>0$, откуда

$$P'_j(\bar{s},\ u^1,\ u^2)\leqslant A_3e^{-\bar{\alpha}\frac{t}{t_1}}\max\left\{e^{B(\max\{U,V\})},\ e^{B(-\max\{U,V\})}\right\}\max_{j=1,2}e^{-B(u^j)}$$

для некоторой $A_3>0$.

Подставив последнюю оценку в (3.2.21), получаем:

$$P_j(\bar{s})\leqslant A_4e^{-\bar{\alpha}\frac{t}{t_1}}\max\left\{e^{B(\max\{U,V\})},\ e^{B(-\max\{U,V\})}\right\}\max\left\{e^{-B(u)},\ e^{-B(v)}\right\}.$$

С использованием последней оценки из (3.2.20), находим:

$$\begin{aligned}
P\leqslant\left(\frac{k}{2}+1\right)2^k\,2\max_{\substack{s(k_0),\ j=1,2\\ \frac{k}{2}<k_0\leqslant k}}P_j(\bar{s})\leqslant Ae^{-\alpha t}\max e^{B(\pm\max\{U,V\})}\times&\\
\times\max\left\{e^{-B(u)},\ e^{-B(v)}\right\}&
\end{aligned}$$

для некоторых $A,\ \alpha>0$ $\left(\text{т. к. } k=\frac{t}{t_1},\ \bar{\alpha}>\ln 2\right)$, что и доказывает утверждение леммы при $u\neq v$. Доказательство в случае $u=v$ тривиально следует из рассуждений при $u\neq v$.

Лемма доказана.

Лемма 3.2.3. Пусть λ — момент первого попадания процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ на множество $d=\{(u, v)\in\mathbf{R}^2 \mid u=v\}$. Тогда найдутся такие γ', $\Gamma'>0$, что

$$P\{\lambda>t, |\xi_1(t)|>U, |\xi_2(t)|>V \mid (\xi_1(0), \xi_2(0))=(u, v)\}\leqslant\Gamma' e^{-\gamma' t}\times$$
$$\times\max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}\max\{e^{B(\max\{U,V\})}, e^{B(-\max\{U,V\})}\}, \quad (3.2.28)$$
$$u, v\in\mathbf{R}, \quad UV>0,$$

в частности,

$$\left.\begin{aligned} &P\{\lambda>t, \xi_1(t)>U \mid (\xi_1(0), \xi_2(0))=(u, v)\}\leqslant\\ &\leqslant\Gamma' e^{-\gamma' t}e^{B(U)}\max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\},\\ &P\{\lambda>t, \xi_1(t)<-U \mid (\xi_1(0), \xi_2(0))=(u, v)\}\leqslant\\ &\leqslant\Gamma' e^{-\gamma' t}e^{B(-U)}\max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}.\end{aligned}\right\} \quad (3.2.28')$$

Доказательство. Пусть $t=mt_1$ для некоторого $m\geqslant 1$. Положим

$$\bar p(t; u_0, v_0; u, v; T_1, \ldots, T_k)\equiv$$
$$\equiv\begin{cases}\displaystyle\int_{G_1}\cdots\int_{G_{m-1}}\left[\prod_{l=1}^{m}p(t_1; u_{l-1}, v_{l-1}; u_l, v_l)\right]\prod_{j=1}^{m-1}du_j dv_j, & u\neq v,\\ 0, & u=v,\end{cases}$$

где $k\in\{1,\ldots,m\}$; $0<T_1<T_2<\ldots<T_k\leqslant t$; $u_m\equiv u$, $v_m\equiv v$;

$$G_l=\begin{cases}(\mathbf{R}^2\setminus\tilde D^2)\setminus d, & \text{если } lt_1\notin\{T_1,\ldots,T_k\},\\ \tilde D^2\setminus d, & \text{если } lt_1\in\{T_1,\ldots,T_k\};\end{cases}$$

$$\bar p(t; u_0, v_0; u, v)\equiv\sum_{k=1}^{m}\sum_{0<T_1<\ldots<T_k\leqslant t}\bar p(t; u_0, v_0; u, v; T_1, \ldots, T_k),$$

$$\bar p(t, u_0, v_0; G, T_1, \ldots, T_k)\equiv$$
$$\equiv\int_{G\setminus d}\bar p(t; u_0, v_0; u, v; T_1, \ldots, T_k)\,du\,dv, \quad G\subseteq\mathbf{R}^2,$$

$$\bar p(t; u_0, v_0; G)\equiv\sum_{k=1}^{m}\sum_{0<T_1<\ldots<T_k\leqslant t}\bar p(t; u_0, v_0; G, T_1, \ldots, T_k)=$$
$$=\int_{G\setminus d}\bar p(t; u_0, v_0; u, v)\,du\,dv.$$

Покажем, что для всех $(u_0, v_0)\in\tilde D^2$

$$\bar p(t; u_0, v_0; \tilde D^2)\leqslant\Gamma_1 e^{-\gamma_1 t} \quad (3.2.29)$$

для некоторых Γ_1, $\gamma_1>0$.

В силу леммы 3.2.2 и определения процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ для любых U, $V>0$ и $(u, v)\notin\tilde D^2$ имеет место оценка:

$$P\{(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\notin\tilde D^2,\ t_1\leqslant\tau\leqslant(m-1)t_1,\ |\xi_1(t)|>U,$$
$$|\xi_2(t)|>V \mid (\xi_1(0), \xi_2(0))=(u, v)\}\leqslant$$
$$\leqslant Ae^{-\alpha t}\max\{e^{B(\max\{U,V\})}, e^{B(-\max\{U,V\})}\}\max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}. \quad (3.2.30)$$

Пусть $(u, v)\in\tilde D^2$. Тогда из (3.2.30) и свойств процесса $\xi_1(t), \xi_2(t))$ выводим:

$$P\{(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\notin\tilde D^2,\ t_1\leqslant\tau\leqslant(m-1)t_1,\ |\xi_1(t)|>U,$$
$$|\xi_2(t)|>V \mid (\xi_1(0), \xi_2(0))=(u, v)\}\leqslant$$
$$\leqslant\iint_{(u^1,v^1)\notin\tilde D^2}p(t_1, u, v; u^1, v^1)P\{(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\notin\tilde D^2,$$
$$2t_1\leqslant\tau\leqslant(m-1)t_1,\ |\xi_1(t)|>U,\ |\xi_2(t)|>V \mid (\xi_1(t_1), \xi_2(t_1))=$$
$$=(u^1, v^1)\}du^1dv^1\leqslant Ae^{-\alpha(t-t_1)}\max\{e^{B(\max\{U,V\})}, e^{B(-\max\{U,V\})}\}\times$$
$$\times\max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}. \quad (3.2.30')$$

Из свойств процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bar p(kt_1; u_0, v_0; \tilde D^2, kt_1)\leqslant 1-\varepsilon$$

для некоторого $0<\varepsilon<1$, причем из (3.2.30) и (3.2.30') следует существование таких $z>1$, $0<\varepsilon_1<1$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}z^k\bar p(kt_1; u_0, v_0; \tilde D^2, kt_1)\leqslant 1-\varepsilon_1 \quad (3.2.31)$$

для всех $(u_0, v_0)\in\tilde D^2$.

Используя (3.2.31), получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}z^k\bar p(kt_1, u_0, v_0; \tilde D^2\setminus d)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\sum_{m_1=1}^{\infty}\ \ldots\sum_{m_1+\ldots m_l=k\,m_l=1}^{\infty}$$
$$\int_{(\tilde D^2\setminus d)^l}\left\{\prod_{i=1}^{l}z^{m_i}\bar p(m_it_1; u_{i-1}, v_{i-1}; u_i, v_i; m_it_1)du_idv_i\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{m_k=1}^{\infty}\int_{(\tilde D^2\setminus d)^k}\prod_{i=1}^{k}z^{m_i}\bar p(m_it_1; u_{i-1}, v_{i-1}; u_i, v_i;$$

$$m_i t_1)\,du_i dv_i \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}\dots\sum_{m_{k-1}=1}^{\infty}\int\limits_{(\tilde{D}^2\setminus d)^{k-1}}(1-\varepsilon_1)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{k-1} z^{m_i}\bar{p}(m_i t_1; u_{i-1}, v_{i-1};\ u_i, v_i;\ m_i t_1)\,du_i dv_i.$$

Проделав аналогичную выкладку еще $(k-1)$ раз, находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k\bar{p}(kt_1; u_0, v_0; \tilde{D}^2)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(1-\varepsilon_1)^k<\infty,$$

что и доказывает оценку (3.2.29).

Рассмотрим теперь

$$P\{\lambda>t,\ |\xi_1(t)|>U,\ |\xi_2(t)|>V\,|\,(\xi_1(0), \xi_2(0))=(u, v)\}=$$
$$=\int\limits_{|x|>U}\int\limits_{|y|>V}\bar{p}(t; u, v; x, y)\,dxdy.$$

Пусть $\tau=lt_1$ (для некоторого $l\geqslant 1$) — момент последнего попадания процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ в $\tilde{D}^2$ в моменты времени $0, t_1, \dots, mt_1=t$. Тогда из (3.2.29) — (3.2.30′) следует:

$$P\{\lambda>t,\ |\xi_1(t)|>U,\ |\xi_2(t)|>V\,|\,(\xi_1(0), \xi_2(0))=(u, v)\}\leqslant$$
$$\leqslant Ae^{-\alpha t}\max\{e^{B(\max\{U,V\})}, e^{B(-\max\{U,V\})}\}\max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}+$$
$$+\sum_{l=1}^{m-1}\iint\limits_{\tilde{D}^2\setminus d}\bar{p}(\tau; u, v; u', v')\,Ae^{-\alpha(t-\tau)}\times$$
$$\times\max\{e^{B(\max\{U,V\})}, e^{B(-\max\{U,V\})}\}\max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}\leqslant$$
$$\leqslant\Gamma' e^{-\gamma' t}\max\{e^{B(\max\{U,V\})}, e^{B(-\max\{U,V\})}\}$$

для некоторых Γ', $\gamma'>0$, и всех $(u, v)\in\tilde{D}^2$.

Пусть теперь $\tau_1=l_1t_1$ — момент первого попадания процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ из $(u, v)\in\mathrm{R}^2$ в $\tilde{D}^2$. Из последней выкладки и (3.2.30), (3.2.30′) вытекает:

$$P\{\lambda>t,\ |\xi_1(t)|>U,\ |\xi_2(t)|>V\,|\,(\xi_1(0), \xi_2(0))=(u, v)\}\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{|x|>U}\int\limits_{|y|>V}\bar{p}(t; u, v; x, y)\,dxdy\leqslant Ae^{-\alpha(t-t_1)}\max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}\times$$
$$\times\max\{e^{B(\max\{U,V\})},\ e^{B(-\max\{U,V\})}\}+$$
$$+\sum_{l_1=1}^{m-1}Ae^{\alpha t_1}e^{-\alpha\tau_1}\max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}\,\Gamma' e^{-\gamma'(t-\tau_1)}\max e^{B(\pm\max\{U,V\})}$$

для всех $(u, v)\in\mathrm{R}^2$.

Отсюда и следует утверждение (3.2.28).

Аналогично доказывается утверждение (3.2.28′).

Лемма доказана.

Теперь на основании лемм 3.2.2 и 3.2.3 проведем доказательство теоремы.

Пусть $t=kt_1$ для некоторого $k\geqslant 1$ и пусть $t_1\leqslant\tau\leqslant 2t_1$. Заметим, что из свойств процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ вытекает:

$$|p(t, u, w)-p(t, v, w)|=$$
$$=\left|\int\limits_{\mathrm{R}}p(t; u, v; w, w')\,dw'-\int\limits_{\mathrm{R}}p(t; u, v; w', w)\,dw'\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{\mathrm{R}}\bar{p}(t, u, v; w, w')\,dw'+\int\limits_{\mathrm{R}}\bar{p}(t; u, v; w', w)\,dw'.$$

Следовательно, в силу леммы 3.2.3

$$\int\limits_{x>|\omega|}|p(t, u, x)-p(t, v, x)|\,dx\leqslant\iint\limits_{x\vee y>|w|}|\bar{p}(t; u, v; w', w)\,dw'\leqslant$$
$$\leqslant 2\Gamma e^{-\gamma t}e^{B(|w|)}\max\{e^{-B(u)}, e^{-B(v)}\}.$$

Далее для $0<\tau\leqslant 2t_1$

$$\int\limits_{x>|w|}|p(t+\tau, u, x)-p(t, v, x)|\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{x>|w|}\int\limits_{\mathrm{R}}p(\tau, u, y)\,|p(t, y, x)-p(t, v, x)|\,dydx\leqslant$$
$$\leqslant\Gamma' e^{-\gamma t}e^{B(|w|)}\exp(\max\{-B(u), -B(v)\})\qquad(3.2.32)$$

для некоторой $\Gamma'>0$, что следует из предыдущей выкладки и оценки (3.2.4).

Пусть $t'>2t_1$. Положим $T=\left[\frac{t'}{2t_1}\right]+1$. Тогда из (3.2.32) находим:

$$\int\limits_{x>|w|}|p(t+t', u, x)-p(t, v, x)|\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{x>|w|}\sum_{k=1}^{T}\left|p\left(t+k\frac{t'}{T}, u, x\right)-p\left(t+(k-1)\frac{t'}{T}, v, x\right)\right|dx\leqslant$$
$$\leqslant\Delta_1 e^{-\gamma' t}, e^{B(|w|)}\max\{e^{-B(u)}, e^{-B(|v|)}\}\qquad(3.2.32')$$

для некоторой $\Delta_1>0$.

Таким образом оценка (3.2.17) доказана. В точности так же получаем оценку (3.2.18).

Пусть $t_0>0$ произвольно фиксировано. При $t>t_0$, $t'>0$ имеем:

$$|p(t+t', u, w)-p(t, v, w)|\leqslant$$
$$\leqslant\int_{\mathbf{R}}\left|p\left(t+t'-\frac{t_0}{2}, u, x\right)-p\left(t-\frac{t_0}{2}, v, x\right)\right|p\left(\frac{t_0}{2}, x, w\right)dx.$$

Отсюда с учетом оценок (3.2.17), (3.2.18′) и леммы 3.2.1 следует неравенство (3.2.16).

Теорема доказана.

3. Некоторые свойства плотности. Как следствие теоремы 3.2.1 получим некоторые оценки для переходной плотности.

Лемма 3.2.4. Для каждого $t_0>0$ найдутся такие A, α, $q>0$, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial u}p(t, u, v)\right|<Ae^{-\alpha t}e^{B(v)-B(u)-qu^{n+1}}, \tag{3.2.33}$$

$$p(t, u, v)<Ae^{B(v)-B(u)-qu^{n+1}-\frac{(u-v)^2}{t}\beta_2} \tag{3.2.34}$$

для всех $t\geqslant t_0$, u, $v\in\mathbf{R}$.

Доказательство. Фиксируем произвольно $t_0>0$. Рассмотрим при $t\geqslant t_0$

$$\frac{\partial}{\partial u}p(t, u, v)=\frac{\partial}{\partial u}\int_{\mathbf{R}}p\left(\frac{t_0}{2}, u, u'\right)\left[p\left(t-\frac{t_0}{2}, u', v\right)-p(t, 0, v)\right]du'.$$

Ясно, что мы можем перейти к дифференцированию справа под знаком интеграла. Тогда, применяя оценки (3.2.5) и (3.2.16), из неравенства

$$\left|\frac{\partial}{\partial u}p(t, u, v)\right|\leqslant\int_{\mathbf{R}}\left|\frac{\partial}{\partial u}p\left(\frac{t_0}{2}, u, u'\right)\right|\left|p\left(t-\frac{t_0}{2}, u', v\right)-p(t, 0, v)\right|du'$$

выводим (3.2.33).

Оценка (3.2.34) следует из леммы 3.2.1 и теоремы 3.2.1, если рассмотреть неравенство

$$p(t, u, v)\leqslant p\left(\frac{t_0}{2}, u, v\right)+\left|p(t, u, v)-p\left(\frac{t_0}{2}, u, v\right)\right|$$

при $t\geqslant t_0$

Лемма доказана.

Лемма 3.2.5. Для каждого $t_0>0$ найдутся такие $A, \alpha>0$, что

$$\int_{\mathbf{R}}p(t, u, v)|v|^{n-\delta}e^{-B(v)}dv\leqslant Ae^{-B(u)}, \tag{3.2.35}$$

$$\int_{\mathbf{R}}\left|\frac{\partial}{\partial u}p(t, u, v)\right||v|^{n-\delta}e^{-B(v)}dv\leqslant Ae^{-B(u)-\alpha t} \tag{3.2.36}$$

при всех $t\geqslant t_0$, u, $v\in\mathbf{R}$.

Доказательство очевидным образом следует из леммы 3.2.4.

Доказательство закончено.

Глава 4

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ КОНЕЧНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В этой главе мы докажем сходимость кластерных разложений конечномерных распределений процессов $\xi_t=(\xi_t(z), z\in\mathbf{Z}^\nu)$, построенных во второй главе, с помощью оценок для каждого независимого (при $\varepsilon=0$) процесса $\xi_t(z)$, $z\in\mathbf{Z}^\nu$, выведенных в третьей главе.

§ 1. Локально взаимодействующие процессы

1. Кластерные оценки. Пусть $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$ — конечное подмножество $\mathbf{Z}^\nu$. Определим для любой ограниченной функции $g: U^{|X|}\to\mathbf{R}$ величины

$$K_A(g, X, t)=Mg(u_X)K_A(u_X, t), \ t>0, \tag{4.1.1}$$

где A — (X, t)-кластер и величины $K_A(u_X, t)$ определены в (2.2.3′).

Тогда из (2.2.3) получаем

$$Mg(\xi_t(x), x\in X)=\sum_{k=0}^{N_t}\varepsilon^k\sum_{\substack{A-(X,t)\text{-кластер}\\ \text{мощности } k}}\bar{K}_A(g, X, t), \tag{4.1.2}$$

$$N_t=\left|\bigcup_{x\in X}\Lambda_0(x, t)\right|.$$

Положим далее

$$C_k(g, X, t)=\begin{cases}\sum\limits_{\substack{A-(X,t)\text{-кластер}\\ \text{мощности } k}}K_A(g, X, t), & 0\leqslant k\leqslant N_t,\\ 0, & k>N_t.\end{cases}$$

Рассмотрим для каждого $h>0$ функцию

$$g_h: U^{|X|}\to\mathbf{R}_+, \quad g_h(u_1, \ldots, u_n)=\exp\left\{h\sum_{j=1}^n f(u_j)\right\},$$

где f — функция Ляпунова для цепи L из условия (A_1).

Лемма 4.1.1. Существуют такие постоянные h, c_1, b_1, $\varkappa_1>0$, что для каждого конечного $X\subset \mathbf{Z}^\nu$, каждого $k\geqslant 1$ и любых t, $t'\in \mathbf{Z}_+$

$$|C_k(g_h, X, t)|\leqslant c_1^{|X|}\, b_1^k, \tag{4.1.3}$$

$$|C_k(g, X, t)|\leqslant b_1^k c_1^{|X|}\,|g|_\infty, \tag{4.1.3'}$$

$$|C_k(g, X, t)-C_k(g, X, t+t')|\leqslant b_1^k c_1^{|X|} e^{-\varkappa_1 t}\,|g|_\infty, \tag{4.1.4}$$

g — произвольная ограниченная функция,

$$g: U^{|X|}\to \mathbf{R},\ |g|_\infty=\sup_{u_1,\ldots,u_{|X|}} |g(u_1, \ldots, u_{|X|})|.$$

Для доказательства леммы 4.1.1 нужна

Лемма 4.1.2. Существуют такие h, c_2, b_2, $\varkappa_2>0$, что для каждого конечного $X\subset \mathbf{Z}^\nu$, любых $t, t'\in \mathbf{Z}_+$, любого (X, t)-кластера A мощности k

1) $|K_A(g_h, X, t)|\leqslant c_2^{|X|} b_2^k \exp\{-\varkappa_2 \Sigma^1(\tau'-\tau)\}$, $|K_A(g, X, t)|\leqslant$ $\leqslant c_2^{|X|} b_2^k |g|_\infty \exp\{-\varkappa_2\Sigma^1(\tau'-\tau)\}$;

2) $|K_{A_{t'}}(g, X, t+t')-K_A(g, X, t)|\leqslant C_2^{|X|} b_2^k |g|_\infty\times$ $\times \exp\{-\varkappa_2\Sigma^1(\tau'-\tau)\}$, $g: U^{|X|}\to \mathbf{R}$ — произвольная ограниченная функция,

Σ^1 — сумма по всем главным отрезкам $I(y,\tau,\tau')$ диаграммы $D_1(t, A)$,

$$A_{t'}=\{(z, \tau+t') \mid (z,\tau)\in A\}.$$

Доказательство леммы 4.1.2 опирается на следующие две леммы.

Лемма 4.1.3. Существуют такие h_3, $\varkappa_3$, b_3, $q_3>0$, что для всех $u_Q\in U^{|Q|}$, $t>q_3 f(u_0)$, $t\in \mathbf{Z}_+$, выполнены неравенства:

$$\sum_{v\in U} \left|\sum_{u\in U} c(u_Q, u)\, p^{(t)}(u, v)\right| e^{h_3 f(v)}\leqslant b_3 e^{-\varkappa_3 t},$$

и

$$\sum_{v\in U} |p^{(t)}(u, v)-\pi_0(v)|\, e^{h_3 f(v)}\leqslant b_3 e^{-\varkappa_3 t},$$

где $f: U\to \mathbf{R}_+$ — функция Ляпунова для цепи L из условия (A_1), π_0 — стационарное распределение вероятностей для цепи L.

Доказательство. Эти неравенства очевидным образом следуют из утверждения 3.1.6, поскольку в силу условия (A_4)

$$\left|\sum_{u\in U} c(u_Q, u)\, p^{(t)}(u, v)\right|\leqslant \sum_{u\in U} p^{(\tau)}(u_0, u)\, |p^{(t)}(u, v)-\pi_0(v)|.$$

Доказательство закончено.

Лемма 4.1.4. Обозначим цепь L через $\{\eta_t\}_{t\geqslant 0}$. Тогда для любого $h>0$ и любого $q>1$ можно указать такие $\varkappa_5$, $b_5>0$, что для любого $u\in U$, для любого набора t_j, $t_j'\in \mathbf{Z}_+$, $j=0, \ldots, N$, $N\in \mathbf{Z}_+$, $0\leqslant t_0\leqslant t_0'\leqslant \ldots\leqslant t_N\leqslant t_N'$, имеет место неравенство

$$P\{f(\eta_{t_j})\geqslant q^{-1}(t_j'-t_j),\ j=0, \ldots, N \mid \eta_0=u\}\leqslant$$
$$\leqslant b_5^N \exp\left\{hf(u)-\varkappa_5\sum_{j=0}^{N}(t_j'-t_j)\right\}.$$

Доказательство. Эта оценка следует из утверждения 3.1.3 в силу ограниченности скачков цепи (условие A_1б)).

Доказательство закончено.

Доказательство леммы 4.1.2. Зафиксируем произвольно $t\in \mathbf{Z}_+$; $X\subset \mathbf{Z}^\nu$, $|X|<\infty$, A — (X, t)-кластер мощности $|A|<\infty$.

Пусть $\sigma\in\{0, 1\}^{|A|}$. Определим на множестве конфигураций

$$u_B=\{u(z,\tau)\in U \mid (z,\tau)\in B\},\quad \text{где}\quad B\supseteq D_1(A),$$

конфигурацию $u_B(\sigma)=\{u(z,\tau)\in U \mid (z,\tau)\in B\}$, и $q_3 f(u_y^{\tau-1})<\tau'-$ $-\tau$, если $\sigma(y,\tau)=0$, $q_3 f(u_y^{\tau-1})>\tau'-\tau$, если $\sigma(y,\tau)=1$, для всех главных отрезков $I(y,\tau,\tau')$ диаграммы $D_1(t, A)$}, где q_3 — константа из леммы 4.1.3.

Для каждого $\sigma\in\{0, 1\}^{|A|}$ и для любой ограниченной функции $g: U^{|X|}\to \mathbf{R}$ положим

$$K_A^\sigma(g, X, t)=\sum_{u_{\Lambda(A)}(\sigma)}\left[\Pi^1\left(\sum_{u\in U} c(u_{y+Q}^{\tau-1}, u)\, p^{(\tau'-\tau)}(u, u_y^{\tau'})\right)\right]\times$$
$$\times[\Pi^2 p^{(\tau'-\tau)}(u_y^\tau, u_y^{\tau'})]\, P\{\xi_0(y)=u_y^0,\ (y, 0)\in G(A)\cup\{X\times\{0\}\}\}, \tag{4.1.5}$$

где $\Lambda(A)=D_1(A)\cup G(A)\cup\{X\times\{0\}\}$, Π^1, Π^2 — произведения, определенные в (2.2.3′).

Тогда для любой ограниченной функции $g: U^{|X|}\to \mathbf{R}$

$$K_A(g, X, t)=\sum_{\sigma\in\{0,1\}^{|A|}} K_A^\sigma(g, X, t). \tag{4.1.6}$$

Из (4.1.5) следует, что при любом фиксированном $\sigma\in\{0, 1\}^{|A|}$

$$|K_A^\sigma(g, X, t)|\leqslant \sum_{u_{\Lambda(A)}(\sigma)} |g(u_x^t,\ x\in X)|\times$$
$$\times\left\{\Pi^1\left|\sum_{u\in U} c(u_{y+Q}^{\tau-1}, u)\, p^{(\tau'-\tau)}(u, u_y^{\tau'})\right|\right\}\{\Pi^2 p^{(\tau'-\tau)}(u_y^\tau, u_y^{\tau'})\}\times$$
$$\times P\{\xi_0(y)=u_y^0,\ (y, 0)\in G(A)\cup\{X\times\{0\}\}\}. \tag{4.1.7}$$

Рассмотрим произведение Π^1 в (4.1.7). Каждый множитель здесь соответствует некоторому главному отрезку $I(y,\tau,\tau')$

диаграммы $D_1(t, A)$ и, если $\sigma(y,\tau)=1$, для его оценки мы воспользуемся оценкой

$$\left|\sum_{u\in U} c(u_Q, u)\, p^{(t)}(u, v)\right| \leqslant p^{(t+\tau)}(u_0, v) \tag{4.1.8}$$

для всех $u_Q \in U^{|Q|}$, $v\in U$, $t\in \mathbf{Z}_+$, которая следует из условия (A_4), а затем — леммой 4.1.4, положив $q=q_3$ и выбрав $h>0$ так, что $h<\alpha_0$, $h<h_3$ (q_3, h_3 — константы из леммы 4.1.3, α_0 — константа из условия (A5)). В результате получаем:

$$|K_A^{\sigma}(g, X, t)| \leqslant \tilde{C}^{|X|} \sup_{f_x, x\in X}\ \sup_{u_X\in U^{|X|}: f(u_x)=f_x} |g(u_X)|\, e^{-h\sum_{x\in X} f_x} \times$$
$$\times \left(\Pi' \sup_{u_Q^{\tau-1}\in U^{|Q|}} \left\{\sum_{v\in U}\left|\sum_{u\in U} c(u_Q^{\tau-1}, u)\, p^{(\tau'-\tau)}(u, v)\right| e^{hf(v)}\right\}\right) \times$$
$$\times \{\Pi'' b_5 e^{-\varkappa_6(\tau'-\tau)}\}\, M \exp\left\{\sum_{(y,0)} h f(\xi_0(y))\right\}, \tag{4.1.9}$$

где $\sup\limits_{f_x, x\in X}$ берется по всем $f_x \in f(U)$, $x\in X$; $f(U)$ — множество значений функции f; Π' — произведение по всем главным отрезкам $I(y, \tau, \tau')$ диаграммы $D_1(t, A)$ таким, что $\sigma(y,\tau)=0$; Π'' — произведение по всем остальным главным отрезкам диаграммы; $\sum\limits_{(y,0)}$ — сумма по всем $(y, 0) \in G(A) \cup \{X\times\{0\}\}$; $h=\min\{h, \varkappa_5 q\}$; b_5, $\varkappa_6$ — постоянные из леммы 4.1.4; $\tilde{C}>0$ — некоторая константа.

Далее для оценки множителей Π' в (4.1.9) воспользуемся леммой 4.1.3. В силу условия (A_5) тогда из (4.1.9) получаем: $|K_A^{\sigma}(g, X, t)| \leqslant c_2'^{|X|} b_2'^{|k|} |g|_\infty \exp\{-\varkappa_2' \Sigma^1(\tau'-\tau)\}$ для некоторых $c_2', b_2', \varkappa_2' > 0$, не зависящих от $\sigma \in \{0, 1\}^{|A|}$.

Из последней оценки в силу (4.1.6) следует первое утверждение леммы. Докажем второе.

Рассмотрим при произвольно фиксированном $t' \in \mathbf{Z}_+$

$$|K_{A_{t'}}(g, X, t+t') - K_A(g, X, t)| \leqslant \sum_{u_{\Lambda(A)}} |g|_\infty \left\{\Pi^{(1)}\left|\sum_{u\in U} c(u_{y+Q}^{\tau-1}, u)\times\right.\right.$$
$$\times p^{(\tau'-\tau)}(u, u_y^{\tau})\,|\}\,\{\Pi^{(2)} p^{(\tau'-\tau)}(u_y^{\tau}, u_y^{\tau'})\}\,|\,\Pi^{(3)} p^{(\tau)}(u_y^0, u_y^{\tau}) -$$
$$-\Pi^3 p^{(t'+\tau)}(u_y^0, u_y^{\tau})\,|\, P\{\xi_0(y)=u_y^0,\ (y, 0)\in G(A)\cup\{X\times\{0\}\}\}, \tag{4.1.10}$$

где $\Pi^{(1)}$ — произведение по всем главным отрезкам $I(y, \tau, \tau')$ диаграммы $D_1(t, A)$;

$\Pi^{(2)}$ — произведение по всем остальным отрезкам $I(y, \tau, \tau')$ диаграммы $D_1(t, A)$ таким, что

$$(y, \tau') \in D_1(A) \cup \{X\times\{t\}\};$$

$\Pi^{(3)}$ — произведение по всем точкам (y, τ) таким, что либо $I(y, 0, \tau)$ — отрезок диаграммы $D_1(t, A)$, либо

$$(y, \tau)\in\{(x, t) \mid (x, 0)\in\{X\times\{0\}\}\setminus G(A)\}.$$

Очевидна следующая оценка:

$$|\Pi^{(3)} p^{(\tau+t')}(u_y^0, u_y^{\tau}) - \Pi^{(3)} p^{(\tau)}(u_y^0, u_y^{\tau})| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{(y,\tau)} \{\,|p^{(t'+\tau)}(u_y^0, u_y^{\tau}) - \pi_0(u_y^{\tau})| + |p^{\tau}(u_y^0, u_y^{\tau}) - \pi_0(u_y^{\tau})|\,\}\times$$
$$\times \Pi'_{(y',\tau'):(y',\tau')\neq(y,\tau)} \max_{s\in\{t'+\tau', \tau'\}} p^{(s)}(u_{y'}^0, u_{y'}^{\tau'}),$$

где $\sum\limits_{(y,\tau)}$ — сумма по всем точкам (y, τ), по которым берется произведение $\Pi^{(3)}$, Π' — произведение по тем же точкам, что и произведение $\Pi^{(3)}$, но без точки (y, τ).

Рассуждая далее так же, как и при доказательстве первого утверждения леммы и учитывая, что число точек, по которым берется произведение $\Pi^{(3)}$, не превосходит величины

$$|Q|\cdot|A|+|X|,$$

для любого $t\in\mathbf{Z}_+$ получим:

$$|K_{A_{t'}}(g, X, t+t') - K_A(g, X, t)| \leqslant \tilde{C}_2^{|X|} \tilde{b}_2^{|A|} e^{-\tilde{\varkappa}_2\Sigma^1(\tau'-\tau) - \tilde{\varkappa}_2 \tau_{\min}},$$

где $\tau_{\min}=\min\{\tau>0 \mid$ существует отрезок $I(y, 0, \tau)$ диаграммы $D_1(t, A)\}$; $\tilde{\varkappa}_2$, $\tilde{b}_2$, $\tilde{c}_2>0$ — некоторые постоянные.

Для завершения доказательства достаточно заметить, что

$$\Sigma^1(\tau'-\tau) + \tau_{\min} \geqslant t - |A| - 1.$$

Лемма 4.1.2 доказана.

Из результатов [25] нетрудно вывести, что число (X, t) — кластеров мощности $k\geqslant 1$ при любом $X\subset \mathbf{Z}^{\nu}$, $|X|<\infty$, $t>0$ не превосходит величины

$$\mu^{|X|+|Q|\cdot k}, \tag{4.1.11}$$

где $\mu>0$ — некоторая постоянная.

В силу (4.1.11), неравенства (4.1.3)—(4.1.4) следуют из леммы 4.1.2.

Лемма доказана.

2. Предельный переход при $t\to\infty$. Докажем теперь, используя кластерное разложение и кластерные оценки, теорему 1.1.1. Предварительно докажем следующие два утверждения.

Утверждение 4.1.1. Существуют такие ε_1, $h>0$, что для всех $|\varepsilon|<\varepsilon_1$, для любого конечного $X\subset\mathbf{Z}^{\nu}$

$$M \exp\left\{h\sum_{x\in X} f(\xi_t(x))\right\} \leqslant C^{|X|} \tag{4.1.11}$$

при всех $t \in \mathbf{Z}_+$, где $C>0$ — некоторая постоянная, f — функция Ляпунова из условия (A_1).

Доказательство. Представим $M \exp\left\{h \sum_{x \in X} f(\xi_t(x))\right\}$ (формально) в виде ряда (4.1.2).

Тогда в силу неравенств (4.1.3), (4.1.10), если $0<\varepsilon_1<b_1^{-1}$, ряд сходится абсолютно и равномерно по $t>0$. Отсюда и следует оценка (4.1.11).

Утверждение доказано.

Утверждение 4.1.2. Пусть $|\varepsilon|<\varepsilon_1$. Тогда существует такая последовательность $t_m \in \mathbf{Z}_+$, $m \in \mathbf{Z}_+$, что

$$t_m \to \infty \text{ при } m \to \infty,$$

и для любого конечного $X \subset \mathbf{Z}^\nu$, любой ограниченной функции $g: U^{|X|} \to \mathbf{R}$

$$Mg(\xi_{t_m}(x),\ x \in X) \underset{m \to \infty}{\to} Mg(\xi_\infty(x),\ x \in X),$$

где $\xi_\infty = (\xi_\infty(z),\ z \in \mathbf{Z}^\nu)$ — некоторое случайное поле со значениями в $U^{\mathbf{Z}^\nu}$ и для некоторого $h>0$

$$M \exp\left\{h \sum_{x \in X} f(\xi_\infty(x))\right\} \leqslant C^{|X|}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что для каждого $X \subset \mathbf{Z}^\nu$, $|X|<\infty$, функция

$$\exp\left\{h \sum_{x \in X} f(u_x)\right\}, \quad u_x \in U, \quad x \in X,$$

компактна при $h>0$, поскольку компактна (в силу условия (A_1a)) функция $f: U \to \mathbf{R}_+$. Затем, используя утверждение 4.1.1, надо воспользоваться критерием слабой компактности [3].

Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 1.1.1. В силу (4.1.2) при $|\varepsilon|<b_1^{-1}$ (b_1 — константа из леммы (4.1.1))

$$Mg(\xi_t(x),\ x \in X) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{\substack{A-(X,t)\text{-кластер} \\ \text{мощности } k}} K_A(g, X, t) \quad (4.1.12)$$

для каждого конечного $X \in \mathbf{Z}^\nu$, $t \in \mathbf{Z}^\nu$, для любой ограниченной функции $g: U^{|X|} \to \mathbf{R}$.

В силу леммы 4.1.1 при $|\varepsilon|<b_1^{-1}$ ряд (4.1.12) сходится абсолютно и равномерно по $t \in \mathbf{Z}_+$.

Следовательно, в формуле

$$\lim_{t \to \infty} Mg(\xi_t(x),\ x \in X) = \lim_{t \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_A K_A(g, X, t)$$

справа можем перейти к пределу по $t \to \infty$ почленно для каждого $k \geqslant 1$ и получить

$$Mg(\xi_\infty(x),\ x \in X) \equiv \lim_{t \to \infty} Mg(\xi_t(x),\ x \in X) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lim_{t \to \infty} \sum_{A-(X,t)\text{-кластер}} K_A(g, X, t). \quad (4.1.14)$$

Для каждого $k \geqslant 0$ предел справа существует в силу эргодичности L, и ряд в (4.1.14) сходится абсолютно при $|\varepsilon|<b_1^{-1}$. Следовательно, существует и предел слева.

Легко видеть, что вероятностная мера на $(V^{\mathbf{Z}^\nu}, B)$, соответствующая случайному полю $\xi_\infty = (\xi_\infty(z),\ z \in \mathbf{Z}^\nu)$, является стационарной для процесса $\xi_t = (\xi_t(z),\ z \in \mathbf{Z}^\nu)$. Отсюда следует первое утверждение теоремы 1.1.1.

Аналитичность конечномерных распределений ξ_∞ при $|\varepsilon|<b_1^{-1}$ сразу следует из абсолютной сходимости ряда (4.1.14) при всех $|\varepsilon|<b_1^{-1}$, всех конечных $X \subset \mathbf{Z}^\nu$ и любой ограниченной функции $g: U^{|X|} \to \mathbf{R}$.

Пусть $|\varepsilon|<b_1^{-1}$. Для оценки скорости сходимости рассмотрим

$$|Mg(\xi_t(x),\ x \in X) - Mg(\xi_{t+t'}(x),\ x \in X)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N_t} |\varepsilon|^k |C_k(g, X, t) - C_k(g, X, t+t')| +$$

$$+ \sum_{k>N_t} |\varepsilon|^k |C_k(g, X, t)|, \quad (4.1.15)$$

где $t, t' \in \mathbf{Z}_+$, X — конечное подмножество $\mathbf{Z}^\nu$, $g: U^{|X|} \to \mathbf{R}$ — ограниченная функция, — произвольны.

В силу леммы 4.1.1. первая сумма в (4.1.15) справа не превосходит величины

$$C_1^{|X|} |g|_\infty \sum_{k=0}^{N_t} |\varepsilon|^k b_1^k \exp\{-\varkappa_1 t\},$$

а вторая — величины

$$C_1^{|X|} |g|_\infty \sum_{k>N_t} |\varepsilon|^k b_1^k.$$

Отсюда, поскольку $N_t = |\bigcup_{x \in X} \Lambda_0(x, t)| \geq t-1$, вытекает: при $|\varepsilon| < b_1^{-1}$

$$|Mg(\xi_t(x), x \in X) - Mg(\xi_{t+t'}(x), x \in X)| \leq C^{|X|} e^{-\varkappa t} |g|_\infty,$$

где $\varkappa = \min\left\{\varkappa_1, \ln \frac{1}{|\varepsilon| b_1}\right\}$, $C > 0$ — некоторая постоянная.

Отсюда очевидным образом следует утверждение теоремы 1.1.1 об экспоненциальной скорости сходимости конечномерных распределений.

Теорема доказана.

§ 2. Системы стохастических уравнений

1. Существование плотности. Прежде всего докажем справедливость разложения (2.2.10).

Лемма 4.2.1. Ряд (2.2.10) сходится при всех $t > 0$, $X \subset \mathbf{Z}^\nu$, $|X| < \infty$ равномерно по $\Lambda \subset \mathbf{Z}^\nu$, $v_X \in \mathbf{R}^{|X|}$, начальному распределению η_Λ, если $\eta_\Lambda \in [-C; C]^{|\Lambda|}$.

Существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что при всех $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ сходимость также равномерна по $t \in [T, \infty)$ для любого фиксированного $T > 0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольно $t > 0$. Оценим k-й ($k \geq 1$) член ряда (2.2.10). Воспользовавшись условием на функцию b

$$|b(u_1, \ldots, u_N)| \leq B \sum_{i=1}^{N} |u_i|^{n-\delta}, \quad (u_1, \ldots, u_N) \in \mathbf{R}^N,$$

находим

$$|\Phi_\Lambda^k p_0(t, v_X)| \leq |\varepsilon B|^k \sum_{z - X\text{-кластер}} \sum_{\substack{l_i \in Q \\ i=1,\ldots,k}} \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{k-1}} \int_{\mathbf{R}} \cdots$$

$$\cdots \int_{\mathbf{R}} \left[\prod_{(y, s_j) \in \Lambda(z) \setminus \Lambda} \delta(u_y^j)\right] \times \left[\prod_{i=1}^{k} |u_{z_i + l_i}^i|^{n-\delta}\right] \times$$

$$\times \left[\Pi_1 \left| \frac{\partial}{\partial u_y^j} p_0(s_{j-1} - s_j, u_y^j, u_y^{j-1}) \right| \right] [\Pi_2 p_0(s_i - s_j, u_y^j, u_y^i)] \times$$

$$\times [\Pi_3 du_y^j] \left[\prod_{y \in X - \Lambda(\bar{z})} p_0(t, u_y^{k+1}, v_y)\right] P_{\eta_\Lambda}(du_\Lambda^{k+1}) ds_k \ldots ds_1,$$

где $\Lambda(\bar{z}) = \bigcup_{i=1}^{k} \{z_i + Q\}$ и Π_1, Π_2, Π_3 — произведения, определенные в (2.2.10).

Положим далее $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}) \in \{0, 1\}^{k+1}$. Пусть $t_0 > 0$ —

произвольно фиксировано. Определим множества

$$U_\alpha = \{\bar{s} = (s_1, \ldots, s_k) : t \equiv s_0 > s_1 > \ldots > s_k > s_{k+1} \equiv 0,$$
$$s_{i-1} - s_i \leq t_0, \text{ если } \alpha_i = 0,$$
$$s_{i-1} - s_i > t_0, \text{ если } \alpha_i = 1, i = 0, \ldots, k+1\}.$$

Обозначим через φ следующую функцию

$$\varphi(t, \bar{z}, l, \bar{\alpha}, v_X) = \int_{U_\alpha} \left\{ \prod_{y \in \{z_i, z_i + l_i, i = \overline{1,k}\}} \int_{\mathbf{R}} \cdots \right.$$

$$\cdots \int_{\mathbf{R}} \left\{ \prod_{1 \leq i \leq k; z_i + l_i = y} |u_y^i|^{n-\delta} \right\} \times \left\{ \Pi_1' \left| \frac{\partial}{\partial u_y^j} p_0(s_{j-1} - s_j, u_y^j, u_y^{j-1}) \right\} \times \right.$$

$$\times \{\Pi_2' p_0(s_i - s_j, u_y^j, u_y^i)\} \{\Pi_3' du_y^j\} \times$$

$$\times \left\{ \prod_{y \in X \setminus \{z_i, z_i + l_i, i = \overline{1,k}\}} p_0(t, u_y^{k+1}, v_y) \right\} P_{\eta_\Lambda}(du_\Lambda^{k+1}) \Big\} ds_k \ldots ds_1, \quad (4.2.2)$$

где $l = (l_1, \ldots, l_k)$ и для каждого y $v_y \equiv u_y^0$; Π_1' — произведение по всем главным отрезкам $I(y, s_j, s_{j-1})$ диаграммы $D_2(t, (\bar{z}, \bar{s}))$; Π_2' — произведение по всем остальным отрезкам $I(y, s_j, s_i)$ диаграммы $D_2(t, (\bar{z}, \bar{s}))$ таким, что

$$(y, s_i) \in D_2((\bar{z}, \bar{s})) \cup \{X \times \{t\}\};$$

Π_3' — произведение по всем точкам (y, s_j) диаграммы $D_2(t, (\bar{z}, \bar{s}))$

Используя лемму 3.2.4, находим при $\bar{\alpha} = (1, \ldots, 1)$

$$\varphi(t, \bar{z}, \bar{l}, \bar{\alpha}, v_X) \leq C_1^k \frac{t^{k/2}}{\left[\frac{k}{2}\right]!} M \prod_{y \in \Lambda(\bar{z}, \bar{l})} p_0(t, \eta_y, v_y) \quad (4.2.3)$$

для некоторой $C_1 = C_1(C) > 0$, где $\Lambda(\bar{z}, \bar{l}) = X \setminus \{z_i, z_i + l_i, i = \overline{1, k}\}$.

Из леммы 3.2.4 следует также, что при $t > T$, $T > 0$ — произвольно фиксировано,

$$\varphi(t, \bar{z}, \bar{l}, \bar{\alpha}, v_X) \leq C_2^k C_2'^{|X|} \quad (4.2.3')$$

для некоторых $C_2 = C_2(C)$, $C' = C'(C) > 0$, если $\alpha = (1, \ldots, 1)$.

Наибольшую сложность представляет оценка φ, если $z_1 = \ldots = z_k$, $\bar{l} = (0, \ldots, 0)$, $\bar{\alpha} = (0, \ldots, 0)$. В этом случае, учитывая лемму 3.2.1, имеем

$$\varphi(t, \bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{l}, v_X) \leq$$

$$\leqslant C_3^k \int\limits_{U_{\bar\alpha}} \int\limits_{\mathbf{R}^k} \frac{1}{\sqrt{s_k}} e^{-\frac{(u_z-u^k)^2}{2s_k}\beta_1 - B(u_z)+B(u^k)} \left[\prod_{y\in X\setminus\{z_k\}} p_0(t, u_y, v_y)\right] \times$$

$$\times\left[\prod_{i=k}^{1} \frac{|u^i|^{n-\delta}}{s_{i-1}-s_i} \exp\left\{-\frac{(u^i-u^{i-1})^2}{2(s_{i-1}-s_i)}\beta_2 - \alpha(s_{i-1}-s_i)|u^i|^{2n}\right\}\right]\times$$

$$\times P(du_\Lambda)\, du^k \ldots du^1 d\bar{s},$$

для некоторой $C_3 = C_3(C) > 0$; $d\bar{s} = ds_k \ldots ds_1$.

Отсюда, используя очевидную оценку

$$|u|^{n-\delta} e^{-\tau\alpha u^{2n}} \leqslant A\tau^{-\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2n}}$$

для всех $u\in\mathrm{R}$, $0<\tau\leqslant t_0$, где $A>0$ — постоянная, получаем:

$$\varphi(t, \bar z, \bar l, \bar\alpha, v_X) \leqslant C_4^k \int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^{s_{k-1}} \left[\prod_{i=1}^{k} (s_{i-1}-s_i)^{-1+\frac{\delta}{2n}}\right] ds_k \ldots$$

$$\ldots ds_1\, Mp_0(t, \eta_{X\setminus\{z_k\}}, v_{X\setminus\{z_k\}}) \qquad (4.2.4)$$

для некоторой $C_4 = C_4(C) > 0$.

С помощью формулы Дирихле

$$\int\limits_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geqslant 0\\ x_1+\ldots+x_n\leqslant 1}} \ldots \int x_1^{p_1-1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n-1} dx_1 \ldots dx_n = \frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\ldots+p_n+1)},$$

$p_i>0$, $i=1,\ldots,n$, $n\geqslant 1$, $\Gamma(p)$ — гамма-функция, из (4.2.4) находим:

$$\varphi(t, \bar z, \bar l, \bar\alpha, v_X) \leqslant C_5^k \frac{t^{\frac{k\delta}{2n}}}{\left[\frac{k\delta}{2n}\right]!} Mp_0(t, \eta_{X\setminus\{z_k\}}, v_{X\setminus\{z_k\}})$$

для некоторой $C_5 = C_5(C) > 0$.

Аналогично рассуждая в остальных случаях, из (4.2.2) и (4.2.1) выводим

$$|\Phi_\Lambda^k p_0(t, v_X)| \leqslant |\varepsilon B|^k \sum_{\bar z - X\text{-кластер}} \sum_{\bar l, \bar\alpha} \varphi(t, \bar z, \bar l, \bar\alpha, v_X) \leqslant$$

$$\leqslant |\varepsilon B|^k C_6^k \left(\frac{t^{k/2}}{\left[\frac{k}{2}\right]!} + \frac{t^{\frac{k\delta}{2n}}}{\left[\frac{k\delta}{2n}\right]!}\right) \max_{\bar z, \bar l} Mp_0(t, \eta_{X\setminus\{z_i, z_i+l_i,\ i=\overline{1,k}\}},$$

$$v_{X\setminus\{z_i, z_i+l_i,\ i=\overline{1,k}\}}) \qquad (4.2.5)$$

для некоторой $C_6 = C_6(C) > 0$.

Отсюда в силу леммы 3.2.1 и следует первое утверждение леммы. Второе утверждение доказывается аналогично, если использовать оценки типа (4.2.3').

Лемма доказана.

Следовательно, плотность $p^\Lambda(t, v_X)$ действительно представима в виде ряда (2.2.10) для всех $t>0$, $X\subset\Lambda\subset\mathbf{Z}^\nu$, $|\Lambda|<\infty$, $v_X\in\mathbf{R}^{|X|}$.

Теорема 4.2.1. Существует

$$p(t, v_X) = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^\nu} p^\Lambda(t, v_X)$$

для каждого $X\subset\mathbf{Z}^\nu$, $|X|<\infty$, $v_X\subset\mathbf{R}^{|X|}$, $t>0$.

Доказательство. В силу леммы 4.2.1 в формуле

$$\lim_{\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^\nu} p^\Lambda(t, v_X) = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Phi_\Lambda^k p_0(t, v_X)$$

можем перейти к пределу почленно:

$$\lim_{\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^\nu} p^\Lambda(t, v_X) = Mp_0(t, \eta^X, v_X) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \lim_{\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^\nu} \Phi_\Lambda^k p_0(t, v_X). \qquad (4.2.6)$$

Положим

$$\Lambda_0(k, X) = \bigcup_{\bar z - X\text{-кластер мощности } k} \bigcup_{i=1}^{k} \{z_i + Q\}, \quad k\geqslant 1.$$

Тогда из (2.2.10) следует, что

$$\Phi_\Lambda^k p_0^\Lambda(t, v_X) = \Phi_{\Lambda_0}^k(k, X)\, p_0^{\Lambda_0}(t, v_X), \quad k\geqslant 1, \qquad (4.2.7)$$

для всех $\Lambda\geqslant\Lambda_0(k, X)$, что влечет существование пределов справа в (4.2.6) для каждого $k\geqslant 1$ и, следовательно, предела слева.

Теорема доказана.

Таким образом мы получили систему согласованных конечномерных распределений процесса ξ_t, удовлетворяющего уравнению (1.1.2), (1.1.2'), т. е. фактически построили процесс ξ_t.

Следствие 4.2.1. Пусть $X\subset\mathbf{Z}^\nu$, $|X|<\infty$. Для каждого $t>0$, $v_X\in\mathbf{R}^{|X|}$ плотность процесса $(\xi_t(x), x\in X)$, ξ_t — из уравнения (1.1.2) с начальным условием $\xi_0=\eta$, $\eta\in[-C, C]^{\mathbf{Z}^\nu}$ можно выразить в виде ряда:

$$p(t, v_X) = Mp_0(t, \eta^X, v_X) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{\substack{\bar z - X\text{-кластер}\\ \text{в } \mathbf{Z}^\nu \text{ мощности } k}} \int\limits_0^t \int\limits_0^{s_1} \ldots$$

$$\ldots \int\limits_0^{s_{k-1}} \Psi_t(\bar s, \bar z, k, v_X)\, d\bar s, \qquad (4.2.8)$$

где $\eta^X = (\eta(z), z\in X)$,

$$\Psi_t(\bar s, \bar z, k, v_X)=\int\limits_R\dots\int\limits_R\left\{\Pi_1 b\,(u^j_{y+Q})\frac{\partial}{\partial u_y^j}\,p_0(s_{j-1}-s_j, u^j_y, u^{j-1}_y)\right\}\times$$
$$\times\{\Pi_2 p_0(s_i-s_j, u^j_y, u^i_y)\}\left\{\prod_{X\setminus\Lambda(\bar z)} p_0(t, u^{k+1}_y, v_y)\right\}\times$$
$$\times P_{\eta\Lambda(z)\bigcup X}(du^{k+1}_{\Lambda(z)\bigcup X})\,\Pi_3 du^j_y,$$

Π_1 — произведение по всем главным отрезкам $I(y, s_j, s_{j-1})$ диаграммы $D_2(t, (\bar z, \bar s))$; Π_2 — произведение по всем остальным отрезкам $I(y, s_j, s_i)$ таким, что

$$(y, s_i)\in D_2(t(\bar z, \bar s))\cup\{X\times\{t\}\};$$

Π_3 — произведение по всем точкам (y, s_j) диаграммы $D_2(t, (\bar z, \bar s))$; $\Lambda(\bar z)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}\{z_i+Q\}$.

Доказательство. Формула (4.2.8) следует из (4.2.7) и (2.2.10).

Доказательство закончено.

2. Доказательство теоремы 1.1.2. Пусть $0<t_0\leqslant t$, $t'>0$, $X\subset\mathbf Z^\nu$, $|X|<\infty$, произвольно фиксированы. Обозначим через $p_\eta(t, v_X)$ и $p_{\eta'}(t, v_X)$ плотности процессов, заданных системой (1.1.2) с начальными распределениями η и η' соответственно. (Считаем, что η и η' удовлетворяют условию теоремы).

Из формулы (4.2.8) следует

$$p_\eta(t+t', v_X)-p_{\eta'}(t, v_X)=M(p_0(t+t', \eta_X, v_X)-p_0(t, \eta'_X, v_X))+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{z-X\text{-кластер}}\left(\int\limits_0^{t+t'}\int\limits_0^{s_1}\dots\int\limits_0^{s_{k-1}}\psi_{t+t'}(\bar s, \bar z, k, v_X)\,d\bar s-\right.$$
$$\left.-\int\limits_0^{t}\dots\int\limits_0^{s_{k-1}}\psi_t(\bar s, \bar z, k, v_X)\,d\bar s\right).\qquad(4.2.9)$$

Обозначим через σ_1 и σ_2 следующие функции:

$$\sigma_1(k, \bar z, t, t', v_X)=\int\limits_0^{t}\dots\int\limits_0^{s_{k-1}}\int\limits_R\dots\int\limits_R\left\{\int\limits_{R(x\bigcup\Lambda(\bar z))} p_0(t+t'-s_1, u_{\Lambda(z)}, u^1_{\Lambda(z)})\times\right.$$
$$\times p_0(t+t', u_{X\setminus\Lambda(\bar z)}, v_{X\setminus\Lambda(\bar z)})\,P_\eta(du_{X\bigcup\Lambda(\bar z)})-$$
$$-\int\limits_{R(x\bigcup\Lambda(\bar z))} p_0(t-s_1, u'_{\Lambda(\bar z)}, u^1_{\Lambda(\bar z)})\,p_0(t, u'_{X\setminus\Lambda(\bar z)}, v_{X\setminus\Lambda(\bar z)})\times$$
$$\left.\times P_{\eta'}(du'_{X\bigcup\Lambda(\bar z)})\right\}\left\{\Pi^1 b\,(u^j_{y+Q})\frac{\partial}{\partial u^j_y}\,p_0(s_j-s_{j+1}, u^j_y, u^{j+1}_y)\right\}\times$$
$$\times\{\Pi^2 p_0(s_1-s_j, u^1_y, u^j_y)\}\{\Pi^3 p_0(s_j-s_i, u^j_y, u^i_y)\}\times$$
$$\times\{\Pi^4 du^j_y\}\,ds_k\dots ds_1,\qquad(4.2.10)$$

где для каждого $\bar s, \bar z$: $\Lambda(\bar z)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}\{z_i+Q\}$; Π^1 — произведение по всем главным отрезкам $I(y, t-s_j, t-s_{j+1})$ диаграммы $D_2(t, \{(z_i, t-s_i), i=\overline{1, k}\})$; Π^2 — произведение по всем отрезкам $\{y\}\times[t-s_1, t-s_j]$ таким, что $(y, t-s_j)\in D_2(\{(z_i, t-s_i), i=\overline{1, k}\})\cup\cup\{X\times t\}$; Π^3 — произведение по всем остальным отрезкам $I(y, t-s_j, t-s_i)$, $j>1$, диаграммы $D_2(t, \{(z_i, t-s_i), i=\overline{1, k}\})$ таким, что их верхний конец либо является точкой диаграммы, либо принадлежит множеству $\{X\times t\}$; Π^4 — произведение по всем точкам $(y, t-s_j)$ той же диаграммы, включая точки $(y, t-s_1)$, $y\in\Lambda(\bar z)$.

$$\sigma_2(k, \bar z, t, t', v_X)=\int\limits_t^{t+t'}\int\limits_0^{s_1}\dots\int\limits_0^{s_{k-1}}\Psi_{t+t'}(\bar s, \bar z, k, v_X)\,d\bar s.$$

Сделав в (4.2.9) справа преобразование $s_i\to t-s_i$, $i=\overline{1, k}$, нетрудно получить

$$p_\eta(t+t', v_X)-p_{\eta'}(t, v_X)=Mp_0(t+t', \eta_X, v_X)-Mp_0(t, \eta'_X, v_X)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{\substack{\bar z=(z_k,\dots,z_1)-\\-X\text{-кластер}}}(\sigma_1(k, \bar z, t, t', v_X)+\sigma_2(k, z, t, t', v_X)).\ (4.2.11)$$

Оценим сверху $|\sigma_1|$ и $|\sigma_2|$.

Преобразуем σ_1:

$$\sigma_1(k, \bar z, t, t', v_X)=\int\limits_0^{t}\int\limits_0^{s_1}\dots\int\limits_0^{s_{k-1}}\int\limits_R\dots\int\limits_R M\left[p_0(t+t'-s_1, \eta_{\Lambda(\bar z)\bigcup X},\right.$$
$$\left.u^1_{\Lambda(\bar z)\bigcup X})-p_0(t-s_1, \eta'_{\Lambda(\bar z)\bigcup X}, u^1_{\Lambda(\bar z)\bigcup X})\right]p_0(s_1, u^1_{X\setminus\Lambda(\bar z)}, v_{X\setminus\Lambda(\bar z)})\times$$
$$\times\left\{\Pi^1 b\,(u^j_{y+Q})\frac{\partial}{\partial u^j_y}\,p_0(s_j-s_{j+1}, u^j_y, u^{j+1}_y)\right\}\{\Pi^2 p_0(s_1-s_j, u^1_y, u^j_y)\}\times$$
$$\times\{\Pi^3 p_0(s_j-s_i, u^j_y, u^i_y)\}\{\Pi^4 du^j_y\}\{\Pi_{y\in X\setminus\Lambda(\bar z)}du^1_y\}\,d\bar s.\qquad(4.2.12)$$

Заметим, что для каждых $t>0$, $z\in\mathbf Z^\nu$, $v_z\in\mathbf R$ найдется такое значение $\omega_z(t, v_z)\in[-C, C]$, зависящее от распределения η_z, что

$$Mp_0(t, \eta_z, v_z)=p_0(t, \omega_z(t, v_z), v_z).$$

Воспользовавшись этим замечанием и оценкой (3.2.34), из

(4.2.12) выводим:

$$|\bar\sigma_1(k,\bar z,t,t',v_X)|\leqslant B^k\sum_{\bar\alpha}\sum_{\substack{\bar l=(l_1,\dots,l_k)\\ l_i\in\{z_i+Q\},\,i=\overline{1,k}}}\int_{U_{\bar\alpha}}\int_R\dots$$

$$\dots\int_R\Big\{\sum_{y\in\Lambda(\bar z)\cup X}|Mp_0(t+t'-s_1,\eta_y,u_y^1)-Mp_0(t-s_1,\eta'_y,u'_y)|\times$$

$$\times\prod_{z\in\{\Lambda(\bar z)\cup X\}\setminus\{y\}}\max\{p_0(t+t'-s_1,\omega_z(t+t'-s_1,u_z^1),u_z^1),$$

$$p_0(t-s_1,\omega'_z(t-s_1,u_z^1),u_z^1)\}\Big\}A^{|X\setminus\{z_i,l_i,\,i=\overline{1,k}\}|}\times$$

$$\times\Big\{\prod_{i:l_i=y}|u^i_{l_i}|^{n-\delta}\Big\}|\Phi_y p_0(s_1-s_m,u_y^1,u_y^m)|\times \qquad (4.2.13)$$

$$\times\Big\{\Pi_y^1\Big|\frac{\partial}{\partial u_y^j}p_0(s_j-s_{j+1},u_y^j,u_y^{j+1})\Big|\Big\}\{\Pi_y^2 p_0(s_i-s_j,u_y^i,u_y^j)\}\times$$

$$\times\{\Pi_y^3\, du_y^j\}\Big\{\prod_{y\in\Lambda(z)\cup X}du_y^1\Big\}d\bar s,$$

где для каждых $y\in\{z_i,\ l_i,\ i=1,\dots,k\}$, $\bar s$

$$\Phi_y=\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial u_{\hat y}}, & \text{если } y=z_1,\\ E, & \text{если } y\neq z_1;\end{cases}$$

индекс m таков, что множество $\{y\}\times[0,\ t-s_m]$ является главным отрезком диаграммы $D_2(t,\{z_i,\ t-s_i),\ i=\overline{1,k}\})$ и

$$(y,\ s_m)\in\{(l_i,\ t-s_i),\ (z_i,\ t-s_i),\ i=\overline{1,k}\};$$

Π_y^1 — произведение по всем главным отрезкам $I(y,\ t-s_j,\ t-s_i)$ диаграммы $D_2(t,\ \{(z_i,\ t-s_i),\ i=\overline{1,k}\})$; Π_y^2 — произведение по всем остальным отрезкам $I(y,\ t-s_i,\ t-s_j)$ диаграммы таким, что $i\geqslant1$ и

$$(y,\ t-s_j)\in\{(l_i,\ t-s_i),\ (z_i,\ t-s_i),\ i=1,\dots,k\}\cup\{X\times t\};$$

Π_y^3 — произведение по всем точкам $(y,\ t-s_j)$, $j>1$, диаграммы таким, что $(y,\ t-s_j)\in\{(l_i,\ t-s_i),\ (z_i,\ t-s_i),\ i=\overline{1,k}\}$; $\bar\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{k+1})\in\{0,1\}^{k+1}$ и $U_{\bar\alpha}$ — множества, определенные выше.

Обозначив для каждых $\bar\alpha$, $\bar l$ через $\sigma_{\bar\alpha,\bar l}(k,\bar z,t,t',v_X)$ соответствующий член суммы в (4.2.13), получим

$$|\sigma_1(k,\bar z,t,t',v_X)|\leqslant B^k\sum_{\bar\alpha,\bar l}\sigma_{\bar\alpha,\bar l}(k,\bar z,t,t',v_X). \qquad (4.2.14)$$

Воспользовавшись далее леммами 3.2.1 и 3.2.5, оценкой (3.2.16) (см. также вывод оценки (4.2.4)), нетрудно получить

$$\sigma_{\bar\alpha,\bar l}(k,\bar z,t,t',v_X)\leqslant A_1^kA_2^{|X|}\Big\{\sum_{\bar\alpha\in\{0,1\}^{k+1}}\int_{U_{\bar\alpha}:\alpha_1=0}\Big[\prod_{i=1}^kF(s_i-s_{i+1})\Big]d\bar s+$$

$$+\sum_{\bar\alpha:\alpha_1=1}\int_{U_{\bar\alpha}}e^{-\gamma(t-s_1)}\Big[\prod_{i=1}^kF(s_i-s_{i+1})\Big]d\bar s\Big\}, \qquad (4.2.15)$$

где

$$F(\tau)=\begin{cases}\tau^{-1+\frac{\delta}{2n}}, & 0<\tau\leqslant t_0,\\ e^{-\gamma\tau}, & \tau>t_0;\end{cases}$$

$A_1=A_1(C)$, $A_2=A_2(C)>0$ — некоторые постоянные.

Рассмотрим каждую сумму в (4.2.15) справа отдельно:

$$\sum_{\bar\alpha:\alpha_1=0}\int_{U_{\bar\alpha}}\Big[\prod_{i=1}^kF(s_i-s_{i+1})\Big]d\bar s\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^kC_k^j\int\!\dots\!\int_{\substack{t-t_0<\tau_1+\dots+\tau_k<t\\ \tau_i<t_0,\,i=1,\dots,j;\\ \tau_i>t_0,\,i=j+1,\dots,k}}e^{-\gamma\sum_{i=j+1}^k\tau_i}\Big[\prod_{i=1}^j\tau_i^{-1+\frac{\delta}{2n}}\Big]d\bar\tau,$$

где $C_k^j=\dfrac{k!}{j!\,(k-j)!}$.

Используя формулу Дирихле, из последней оценки выводим:

$$\sum_{\bar\alpha:\alpha_1=0}\int_{U_{\bar\alpha}}\Big[\prod_{i=1}^kF(s_i-s_{i+1})\Big]d\bar s\leqslant e^{-\gamma t}\sum_{j=0}^ke^{\gamma t_0(j+1)}C_k^jA_3^j\times$$

$$\times\int\!\dots\!\int_{\substack{\tau_{j+1}+\dots+\tau_k<t\\ \tau_i>t_0,\,i=j+1,\dots,k}}\frac{\Big(t-\sum_{i=j+1}^k\tau_i\Big)^{\frac{j\delta}{2n}}}{\Big[\frac{j\delta}{2n}\Big]!}\,d\tau_{j+1}\dots d\tau_k\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\gamma t}A_4^k\sum_{j=0}^k\frac{t^{k-j\left(1-\frac{\delta}{2n}\right)}}{\Big[k-j\Big(1-\frac{\delta}{2n}\Big)\Big]!}$$

для некоторых A_3, $A_4>0$.

Отсюда получаем

$$\sum_{\bar{\alpha}:\alpha_1=0}\int_{U_{\bar{\alpha}}}\left[\prod_{i=1}^{k}F(s_i-s_{i+1})\right]d\bar{s}\leqslant e^{-\gamma t}A_5^k\left(\min\left\{1,\frac{\gamma}{2}\right\}\right)^{-k}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^j\frac{t^j}{j!}\leqslant e^{-\frac{\gamma}{2}t}A_6^k \qquad (4.2.16)$$

для некоторых $A_5, A_6>0$.

Аналогичными рассуждениями находим оценку для второй суммы в (4.2.15):

$$\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\{0,1\}^k}\int_{U(1,\alpha_1,\dots,\alpha_{k+1})}e^{-\gamma(t-s_1)}\left[\prod_{i=1}^{k}F(s_i-s_{i+1})\right]d\bar{s}\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{\gamma}{2}t}A_7^k, \qquad (4.2.17)$$

для некоторой $A_7>0$.

Таким образом, из (4.2.14) — (4.2.17) находим:

$$|\sigma_1(k,\bar{z},t,t',v_X)|\leqslant B_1^kA_2^{|X|}e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \qquad (4.2.18)$$

где $B_1=B_1(C)>0$ — некоторая постоянная.

Найдем оценку для $|\sigma_2|$.

Так же, как и в предыдущем случае, из результатов § 2 главы 3 выводим:

$$|\sigma_2(k,\bar{z},t,t',v_X)|\leqslant B^kA_2^{|X|}A_8^k\int_t^{t+t'}\int_0^{s_1}\dots$$

$$\dots\int_0^{s_{k-1}}\left[\prod_{i=1}^{k}F(s_i-s_{i+1})\right]d\bar{s}, \qquad (4.2.19)$$

где $A_8=A_8(C)>0$ — некоторая постоянная.

Найдем оценку последнего интеграла. Выделим в области интегрирования множество:

$$U=\{s=(s_1,\dots,s_k):s_1-s_2\leqslant t_0,\dots,s_k\leqslant t_0,\ s_1\geqslant t,$$

$$t+t'>s_1\dots>s_k>0\}$$

и обозначим

$$U_1=\{\bar{s}:s_1\geqslant t,\ t+t'>s_1>\dots>s_k>0\}\setminus U.$$

Тогда

$$\int_t^{t+t'}\dots\int_0^{s_{k-1}}\left[\prod_{i=1}^{k}F(s_i-s_{i+1})\right]d\bar{s}\leqslant$$

$$\leqslant\int_U\left[\prod_{i=1}^{k}F(s_i-s_{i+1})\right]d\bar{s}+\int_{U_1}\left[\prod_{i=1}^{k}F(s_i-s_{i+1})\right]d\bar{s}. \qquad (4.2.20)$$

Рассмотрим последние два интеграла отдельно:

$$\int_U\prod_{i=1}^{k}F(s_i-s_{i+1})ds_i\leqslant\left(\int_0^{t_0}\tau^{-1+\frac{\delta}{2n}}d\tau\right)^k\leqslant(2nt_0^{\frac{\delta}{2n}})^k. \qquad (4.2.21)$$

Заметим, что если $k<\frac{t}{t_0}$, то $U=\varnothing$, поскольку

$$(s_1-s_2)+\dots+s_k\equiv s_1\geqslant t.$$

В интеграле

$$\int_{U_1}\prod_{i=1}^{k}F(s_i-s_{i+1})ds_i,$$

сделав необходимую замену переменных, легко получить:

$$\int_{U_1}\prod F(s_i-s_{i+1})ds_i\leqslant k\int_t^{t+t'}\Bigg\{\int\dots\int_{\substack{\tau_1+\dots+\tau_{k-1}\leqslant s_1\\ \tau_i>0,\ i=\overline{1,k-1}}}F(\tau_1)\dots$$

$$\dots F(\tau_{k-1})e^{-\gamma\left(s_1-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\tau_i\right)}d\bar{\tau}\Bigg\}ds_1. \qquad (4.2.22)$$

Для выражения в фигурных скобках мы уже нашли оценку (см. (4.2.15)—(4.2.17)). Поэтому из (4.2.22) получаем:

$$\int_{U_1}\prod_{i=1}^{k}F(s_i-s_{i+1})ds_i\leqslant A_7^k\int_t^{t+t'}e^{-\frac{\gamma}{2}s_1}ds_1\leqslant A_9^ke^{-\frac{\gamma}{2}t}, \qquad (4.2.23)$$

где $A_9>0$ — некоторая постоянная

Объединяя (4.2.23) и (4.2.21), из (4.2.10) и (4.2.19) выводим:

$$|\sigma_2(k,\bar{z},t,t',v_X)|\leqslant A_2^{|X|}B_2^k(e^{-\frac{\gamma}{2}t}+g_t(k)\cdot t_0^{\frac{k\delta}{2n}}), \qquad (4.2.24)$$

где $B_2 = B_2(C) > 0$ — некоторая постоянная,

$$g_t(k) = \begin{cases} 0, & k < \left[\dfrac{t}{t_0}\right], \\ 1, & k \geqslant \left[\dfrac{t}{t_0}\right]. \end{cases}$$

Таким образом, подставляя в (4.2.11) оценки (4.2.24), (4.2.18), а также используя теорему 3.2.1, получаем:

$$|p_\eta(t+t', v_X) - p_{\eta'}(t, v_X)| \leqslant$$

$$\leqslant A_3^{|X|}\left\{e^{-\gamma t} + \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon|^k B_3^k \left(e^{-\frac{\gamma}{2}t} + t_0^{\frac{k\delta}{2n}} g_t(k)\right)\right\}$$

для некоторых $A_3 = A_3(C)$, $B_3 = B_3(C) > 0$. Отсюда ясно, что, выбрав $\varepsilon' > 0$ достаточно малым ($\varepsilon' B_3 < 1$; $\varepsilon' B_3 t_0^{\frac{\delta}{t_0 2n}} < 1$), при всех $|\varepsilon| < \varepsilon'$ будем иметь:

$$|p_\eta(t+t', v_X) - p_{\eta'}(t, v_X)| \leqslant \theta^{|X|} e^{-\gamma t}$$

для некоторых $\theta = \theta(C)$, $\gamma > 0$, не зависящих от распределений η, η' и множества X.

Из этой оценки и последнего утверждения леммы 4.2.1 и следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 1.1.3. Предыдущее доказательство теоремы 1.1.2 полностью проходит, если везде считать $\delta = 0$, $n = 1$, и вместо оценок (1.2.4) и (4.2.5) использовать следующую лемму.

Лемма. Для любых α, $\delta_0 > 0$, u, $v \in \mathbf{R}$, $k \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\substack{t \equiv s_0 > s_1 > \ldots > s_k > s_{k+1} \equiv 0 \\ s_l - s_{l+1} < \delta_0,\ l = 0, \ldots, k}} \!\!\!\ldots\!\!\! \int \int\limits_{\mathbf{R}^k} \frac{e^{-\frac{(u-u_1)^2}{2(t-s_1)}}}{\sqrt{t-s_1}} \prod_{l=1}^{k} |u_l|\, e^{-(s_l - s_{l+1})u_l^2} \times$$

$$\times \frac{e^{-\frac{(u_l-u_{l+1})^2}{2(s_l-s_{l+1})}}}{s_l - s_{l+1}}\, du_l\, ds_l \leqslant C^k e^{\alpha u^2}$$

для некоторой $C = C(\delta_0) > 0$.

Доказательство. Обозначим через $f(\bar u, \bar s)$ подынтегральную функцию в выражении слева, $\bar u = (u_1, \ldots, u_k)$, $\bar s = (s_1, \ldots, s_k)$.

Определим множества $U_{\bar\alpha}$, $\bar\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \{0, 1\}^k$:

$$U_{\bar\alpha} = \{(\bar u, \bar s) = (u_1, \ldots, u_k, s_1, \ldots, s_k) : t \equiv s_0 > s_1 > \ldots$$
$$\ldots > s_k > s_{k+1} \equiv 0,$$
$$s_i - s_{i+1} < \delta_0,\ i = 0, \ldots, k;$$
$$|u_i - u_{i+1}| \leqslant 1, \text{ если } \alpha_i = 0,$$
$$|u_i - u_{i+1}| > 1, \text{ если } \alpha_i = 1,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

Ясно, что

$$\int\limits_{\substack{0 \\ s_l - s_{l+1} < \delta_0,\, l = \overline{0,k}}}^{t} \!\!\ldots\! \int\limits_0^{s_{k-1}} \int\limits_{R^k} f(\bar u, \bar s)\, d\bar u\, d\bar s \leqslant \sum_{\bar\alpha} \int\limits_{U_{\bar\alpha}} f(\bar u, \bar s)\, d\bar u\, d\bar s.$$

Зафиксируем произвольно $\bar\alpha \in \{0, 1\}^k$ и разобьем вектор $\bar\alpha$ на серии из нулей и единиц:

$$(0, \ldots, 0, \underset{i_1}{1}, \ldots, 1, \underset{i_1+j_1}{0}, \ldots, 0, \underset{i_2}{1}, \ldots, 1, \underset{i_2+j_2}{0}, \ldots).$$

Теперь, используя оценку

$$|u_l|\, \frac{e^{-(s_l - s_{l+1})u_l^2}}{s_l - s_{l+1}}\, e^{-\frac{(u_l-u_{l+1})^2}{2(s_l-s_{l+1})}} \leqslant A_1 \frac{e^{-\frac{(u_l-u_{l+1})^2}{4(s_l-s_{l+1})}}}{\sqrt{s_l - s_{l+1}}}$$

для некоторой $A_1 > 0$ в случае $\alpha_l = 1$, в интеграле

$$\int\limits_{U_{\bar\alpha}} f(\bar u, \bar s)\, d\bar u\, d\bar s,$$

произведем интегрирование по всем u_j, $j \geqslant 1$, таким, что $\alpha_j = 1$.

В результате получим оценку

$$\int\limits_{U_{\bar\alpha}} f(\bar u, \bar s)\, d\bar u\, d\bar s \leqslant A_2^k \int\limits_{\substack{0 \\ s_l - s_{l+1} < \delta_0, \\ l = \overline{0,k}}}^{t} \!\!\ldots\! \int\limits_0^{s_{k-1}} \int\limits_R \ldots \int\limits_R \frac{e^{-\frac{(u-u_1)^2}{2(t-s_1)}}}{\sqrt{t-s_1}} \times$$

$$\times \left[\prod_{l=1}^{i_1-2} (|u|+l) \frac{e^{-\frac{(u_l-u_{l+1})^2}{2(s_l-s_{l+1})}}}{s_l - s_{l+1}}\right] \frac{e^{-\frac{(u_{i_1-1}-u_{i_1+j_1})^2}{4(s_{i_1-1}-s_{i_1+j_1})}}}{\sqrt{s_{i_1-1} - s_{i_1+j_1}}} \times$$

$$\times\left[\prod_{l=i_1+j_1}^{i_2-2}(|u_{i_1+j_1}|+l)\,\frac{e^{-\frac{(u_l-u_{l+1})^2}{2(s_l-s_{l+1})}}}{s_l-s_{l+1}}\right]\dots$$

$$\dots\left\{\prod_{i:\alpha_i=0} du_i\right\}d\bar{s},$$

где интегрирование ведется по всем u_i таким, что $\alpha_i=0$, $A_2>0$ — некоторая постоянная. Отсюда нетрудно получить, что

$$\int\limits_{U_{\bar{\alpha}}} f(\bar{u},\bar{s})\,d\bar{u}\,d\bar{s} \leqslant A_3^k \underset{\substack{|s_l-s_{l+1}|<\delta_0\\ l=0,\dots,k}}{\int\limits_0^t\dots\int\limits_0^{s_{k-1}}} \frac{1}{\sqrt{t-s_1}}\left[\prod_{i:\alpha_i=0}\frac{1}{\sqrt{s_i-s_{i+1}}}\right]\times$$

$$\times\left(|u|^{k-\sum\limits_{l=1}^{k}\alpha_l}+\left(k-\sum_{l=1}^{k}\alpha_l\right)!\right)\leqslant$$

$$\leqslant A_k^4\,\frac{1}{k!}\left(|u|^{k-\sum\limits_{l=1}^{k}\alpha_l}+\left(k-\sum_{l=1}^{k}\alpha_l\right)!\right)$$

для некоторых $A_3>0$, $A_4=A_4(\delta)>0$.

Используя последнюю выкладку, находим, что

$$\underset{\substack{t>s_1>\dots>s_k>0\\ s_l-s_{l+1}<\delta_0,\ l=\overline{0,k}}}{\int\dots\int}\ \int\limits_{\mathbf{R}^k} f(\bar{u},\bar{s})\,d\bar{u}\,d\bar{s}\leqslant\sum_{l=0}^{k}\mathrm{C}_k^l A_4^k\,\frac{1}{k!}\left(|u|^{k-n}+(k-n)!\right),$$

где $\mathrm{C}_k^l=\dfrac{k!}{l!\,(k-l)!}$, откуда и следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Басис В. Я.* О стационарности и периодичности многокомпонентных марковских процессов с локальным взаимодействием // Многокомпонент. случайные системы.— М.— 1978.— С. 31—46 (РЖМат, 1978, 7В284)
2. *Беляев Ю. К., Громак Ю. И., Малышев В. А.* Об инвариантных случайных булевских полях // Мат. заметки.— 1969.— *6*, № 5.— С. 555—566 (РЖМат, 1970, 6В58)
3. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.— 351 с.
4. *Васерштейн Л. Н.* Марковские процессы на счетном произведении пространств, описывающие большие системы автоматов // Пробл. передачи инф.— 1969.— *5*, № 3.— С. 64—72 (РЖМат, 1970, 2В388)
5. —, *Леонтович А. М.* Об инвариантных мерах некоторых марковских операторов, описывающих однородную случайную среду // Пробл. передачи инф.— 1970.— *6*, № 1.— С. 71—80 (РЖМат, 1970, 10В49)

6. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. Пер. с англ. М.: Наука, 1986.— 445 с. (РЖМат, 1987, 3В2К)
7. Взаимодействующие марковские процессы и их применение в биологии // Сб. докл. шк.-семин., Пущино.— 1977, 1979, 1982, 1986
8. *Гиря Т. В.* Стабилизация стохастических решений нелинейного параболического уравнения с белым шумом // Успехи мат. наук.— 1981.— *36*, № 2.— С. 177—178 (РЖМат, 1981, 10В117)
9. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.— 370 с. (РЖМат, 1983, 11Б1002 К)
10. *Добрушин Р. Л.* Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности // Теория вероятностей и ее применения.— 1968.— *13*, № 2.— С. 201—229 (РЖМат, 1969, 7В119)
11. —, Марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент — Существование предельного процесса и его эргодичность // Пробл. передачи инф.— 1971.— 7, № 2.— С. 70—87 (РЖМат, 1971, 12В460)
12. *Жалис А. И.* Гауссовские марковские случайные последовательности с локальным взаимодействием // Лит. мат. сб.— 1986.— *26*, № 1.— С. 38—52
13. *Игнатюк И. А., Малышев В. А.* Кластерное разложение для локально взаимодействующих цепей Маркова // Вестн. МГУ. Сер. 1.— 1988.— № 5.— С. 3—7 (РЖМат, 1989, 3В233)
14. —, —, Процессы с локальным взаимодействием и сети связи // Пробл. передачи инф.— 1989.— *25*, № 1.— С. 65—77 (РЖМат, 1989, 7В315)
15. —, —, *Молчанов С. А.* Моментно-замкнутые процессы с локальным взаимодействием / Препр. М. Ин-т пробл. передачи инф.— 1988.— 43 с. (РЖМат, 1988, 12В58)
16. —, *Турова Т. С.* Гауссовские процессы с локальным взаимодействием // Взаимодейств. марк. процессы и их применение в биол. Сб. докл. 4 шк.-семин., Пущино, 1984, Пущино.— 1986.— С. 13—25 (РЖМат, 1987, 11В33)
17. *Ильясов Я. Ш., Комеч А. И.* Теорема Гирсанова и эргодические свойства статистических решений нелинейных параболических уравнений // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. МГУ.— 1987.— № 12.— С. 90—117 (РЖМат, 1988, 5В376)
18. *Имайкин В. М., Комеч А. И.* О больших уклонениях решений нелинейных стохастических уравнений // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— МГУ.— 1988.— № 13.— С. 177—196 (РЖМат, 1988, 9В395)
19. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. Перев. с англ.— М.: Мир, 1968.— 394 с. (РЖМат, 1968, 8В56К)
20. *Кельберт М. Я., Сухов И. М.* Условия существования и единственности случайного поля, описывающего состояния коммутационной сети // Пробл. передачи инф.— 1983.— *13*, № 4.— С. 50—71
21. *Крылов Н. В., Розовский Б. Л.* Об эволюционных стохастических уравнениях // Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. // ВИНИТИ.— 1979.— *14*.— С. 71—146 (РЖМат, 1980, 4В69)
22. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М.: Наука, 1974.— 696 с. (РЖМат, 1974, 7В292К)
23. *Малышев В. А., Игнатюк И. А.* Локально взаимодействующие процессы с некомпактным множеством значений // Вест. МГУ. Сер. 1.— 1987.— № 2. — С. 3—6 (РЖМат, 1987, 6В59)
24. —, *Меньшиков М. В.* Эргодичность, непрерывность и аналитичность счетных цепей Маркова // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1979.— *39*.— С. 3—48 (РЖМат, 1979, 9В47)
25. —, *Минлос Р. А.* Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений.— М.: Наука, 1985.— 288 с. (РЖМат, 1986, 1В420К)

26. —, *Подорольский В. А., Турова Т. С.* Эргодичность бесконечных систем стохастических уравнений // Мат. заметки.— 1989.— *45*, № 4.— С. 78—88 (РЖМат, 1989, 7В96)
27. *Пирогов С. А.* Кластерные разложения для систем автоматов // Пробл. передачи инф.— 1986.— *22*, № 4.— С. 60—66 (РЖМат, 1987, 3Г42)
28. *Розовский Б. Л.* Эволюционные стохастические системы. Линейная теория и приложения к статистике случайных процессов.— М.: Наука, 1983.— 208 с. (РЖМат, 1984, 2В1К)
29. *Ставская О. Н., Пятецкий-Шапиро И. И.* Об однородных сетях из спонтанно активных элементов // Пробл. кибернетики. М., Наука, 1968.— *20*.— С. 91—106 (РЖМат, 1969, 7В502)
30. *Турова Т. С.* Диффузионные процессы с локальным взаимодействием. Автореферат дис. канд. физ.-мат. наук, М., 1989.— 14 с.
31. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М.: Наука, 1969.— 367 с. (РЖМат, 1970, 6В94К)
32. *Штойян Д.* Качественные свойства и оценки стохастических моделей. Пер. с нем.— М.: Мир, 1979.— 268 с. (РЖМат, 1980, 6В61)
33. *Holley R., Stroock D.* Diffusions on an infinite dimensional torus // J. Funct. Anal.— 1981.— *42*, № 1.— С. 29—63 (РЖМат, 1982, 1Б1223)
34. *Hsiao C. T.* Stochastic processes with Gaussian interaction of components // Z. Wahrsch. Gebiete.— 1982.— *59*.— С. 39—53
35. *Ignatyuk I. A., Malyshev V. A., Sidoravitchus V.* Convergence of the method of stochastic quantization // Proceedings of the Fifth Vilnius Conference of Probability NVS Science Press— 1989.— *1*
36. *Liggett T.* Interacting particle systems. New York e. a.: Springer.— XVI. 488 c. (Grundl. math. Wiss., Bd 276) Лиггетт Т. Марковские процессы с локальным взаимодействием. Пер. с англ.— М.: Мир, 1989.— 550 с. (РЖМат, 1989, 7В312)
37. *Royer G.* Processus de diffusion associe a certains modeles d'Asing a spin continus // Z. Wahrsch. und Verw. Gebiete.— 1979.— *46*, № 2.— С. 165—176.
38. *Wick W. D.* Convergence to equilibrium of the stochastic Heisenberg model // Commun. Math. Phys.— 1981.— *81*, № 3.— С. 361—377 (РЖМат, 1982, 3В252)

УДК 519.171+519.179.3

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ И СЕТЕЙ (КОДИРОВАНИЕ, УКЛАДКИ И ВЛОЖЕНИЯ)

В. П. Козырев, С. В. Юшманов

При решении многих дискретных задач, имеющих теоретическое или прикладное значение и сформулированных на языке теории графов, большое значение приобретает выбор способов задания графов и получаемых решений. Один и тот же способ задания (представления) графов по-разному эффективен для различных задач. Общепринятыми и универсальными способами являются задание графов с помощью матрицы смежности, списка ребер и структуры смежностей, определяемой списками вершин, смежными с каждой. В начале 60-х годов изучалось строение графов, обладающих некоторыми заданными свойствами, с точки зрения их экономного представления. Однако относительно таких естественных свойств, как наличие в графе симметричных частей или небольшого разреза, были построены предельно «плохие» графы и было показано, что большинство графов (например, в классе графов с фиксированным числом вершин n и ребер m для достаточно большого числа ребер $m=m(n)$) являются «плохими».

Для отдельных классов графов можно найти более экономные способы задания, чем общепринятые. Таким классы образуют деревья, параллельно-последовательные сети, плоские графы и ряд других графов. Оказывается, что для каждого из этих классов (за исключением одного) некоторые NP-полные задачи становятся полиномиально разрешимыми (обычно строится алгоритм решения, имеющий полиномиальную сложность), другие задачи остаются NP-полными. И только для одного класса — класса интервальных графов — все известные NP-полные задачи становятся полиномиальными.

Установить принадлежность рассматриваемого графа к данному классу — это, как правило, значит построить специальное представление графов этого класса. Такие представления для известных (и описываемых в данной статье) классов строятся с полиномиальной сложностью. Отметим, что и каноническое представление для графов из этих классов, т. е. задание графов