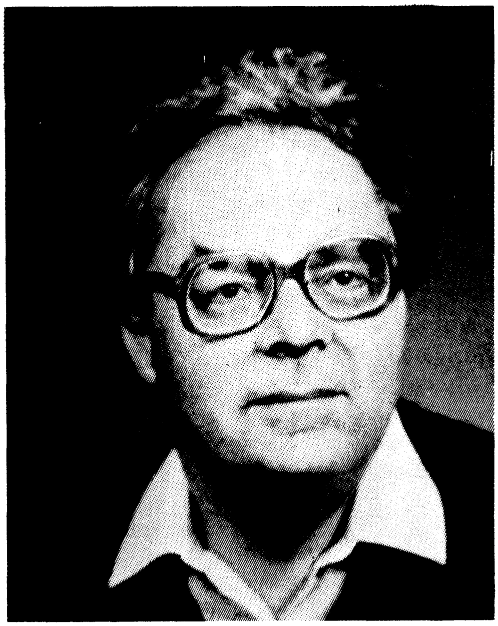
Л. А. Бассалыго, В. А. Малышев, Р. А. Минлос, И. А. Овсеевич, Е. А. Печерский, М. С. Пинскер, В. В. Прелов, А. Н. Рыбко, Ю. М. Сухов, С. Б. Шлосман, Памяти Роланда Львовича Добрушина, *Пробл. передачи информ.*, 1996, том 32, выпуск 3, 3–24



ПАМЯТИ РОЛАНДА ЛЬВОВИЧА ДОБРУШИНА

12 ноября 1995 года после тяжелой болезни умер замечательный математик Роланд Львович Добрушин.

Его математическое дарование было многогранно и плодовито. Он оставил существенный след во многих областях науки – теории вероятностей, теории информации, математической физике, теории сетей связи и даже в лингвистике. В этом небольшом очерке мы проследим за общей линией его научного творчества и опишем наиболее существенные из его научных достижений.

1. Краткая биография

Р. Л. Добрушин родился 20 июля 1929 года в Ленинграде. В шестилетнем возрасте он потерял отца и вместе с матерью переехал в Москву. Вскоре после войны умерла и мать Роланда Львовича, и он воспитывался в семье своих родственников.

Р. Л. Добрушин, еще в школе проявивший склонность и любовь к математике, поступил в 1947 г. на механико-математический факультет Московского университета, который окончил в 1952 г. Начиная с 1-го курса, Р. Л. Добрушин участвует в студенческом семинаре, руководимом Е. Б. Дынкиным, где ему и была привита любовь к теории вероятностей, а также тот особый стиль математического мышления, который присущ обычно специалистам в этой науке. В дальнейшем Р. Л. Добрушин развил эти качества и достиг необычайной глубины в своей "вероятностной" интуиции. На старших курсах Р. Л. Добрушин работал под руководством А. Н. Колмогорова над некоторыми задачами из теории марковских процессов и по окончании университета был оставлен А. Н. Колмогоровым в аспирантуре. Стоит упомянуть, что это потребовало от А. Н. Колмогорова больших усилий и настойчивости, так как в эти годы (время сталинского общегосударственного антисемитизма) евреев практически не принимали в университет даже в качестве студентов.

После окончания аспирантуры в 1955 г. Р. Л. Добрушин защитил кандидатскую диссертацию ("Локальная предельная теорема для марковских цепей") и был принят на работу на кафедру теории вероятностей механико-математического факультета МГУ, где преподавал до 1967 г. Приблизительно в это же время Р. Л. Добрушин начинает заниматься новой тогда областью науки – теорией информации. Итог раннего этапа его деятельности в этом направлении был подведен в докторской диссертации ("Теория информации и кодирование"), защищенной им в 1961 г.

Следует сказать, что Р. Л. Добрушина всегда интересовала "физика" в широком смысле этого понятия – как некое поле реальности, которое можно адекватно описать лишь языком математики (скажем, языком теории вероятностей) и которое наполняет сам этот язык новым содержательным смыслом. И вот, продолжая заниматься теорией информации, Роланд Львович включается в занятия статистической физикой, ставшей до самого конца его жизни основной темой научного творчества.

В 1967 г. Р. Л. Добрушин, будучи приглашен заведовать лабораторией теории кодирования в Институте проблем передачи информации АН СССР (ИППИ), уходит из университета, хотя долгие годы остается одним из руководителей семинара по статистической физике на механико-математическом факультете. Педагогическая работа Роланда Львовича продолжалась также в Физико-техническом институте, где он длительное время читал курсы лекций по теории информации.

В ИППИ Р. Л. Добрушин собрал в своей лаборатории замечательный коллектив математиков, активно работающих в самых разных направлениях этой науки. При этом, сам имея вкус к разным содержательным ее приложениям, он старался ориентировать сотрудников своей лаборатории на занятия прикладными задачами. И здесь он всегда подчеркивал, что всякая задача прикладного характера должна быть включена в некоторый более общий научный контекст, и только тогда она может быть полностью прояснена. После его смерти лаборатория, возглавлявшаяся им, стала называться "Добрушинской математической лабораторией". В этом названии отразилось признание огромных математических достижений Роланда Львовича и его недюжинных организаторских способностей.

Математический талант Р. Л. Добрушина неразрывно был связан с редким педагогическим даром. Его лекции, доклады на семинарах всегда были очень продуманы и содержательны и собирали большую аудиторию. У него было много учеников и сотрудников, с ним всегда было поучительно разговаривать на математические темы.

Для всех нас – друзей, сотрудников, учеников и коллег – его смерть явилась тяжелым ударом, и к этой потере мы вряд ли сможем привыкнуть. Роланд Львович останется в нашей памяти обаятельно-умным, добрым и оптимистичным человеком, внимательным и открытым к людям, ненавидившим фальшь и "липу", с не пропадавшим никогда чувством юмора. Ему было присуще также повышенное чувство гражданственности и общественной ответственности, что многократно проявлялось в его словах и поступках, в его прозорливых раздумьях о судьбе окружавшего его общества.

Теперь мы несколько подробнее опишем конкретные научные достижения Роланда Львовича, разбив это описание на три части сообразно трем периодам его научной карьеры: "марковский", "теоретико-информационный" и, наконец, период "статистической физики".

2. Марковские процессы

Начальный “марковский” период научной жизни Р. Л. Добрушина, как уже было сказано, приходится на его студенческие и аспирантские годы. Самое удивительное, что бросается в глаза в его ранних работах, – абсолютная законченность и фундаментальность. Этот стиль – научная глубина, добросовестность, изобретательность и стремление к полной ясности в изучаемом предмете – отличает всю его последующую научную деятельность. В эти годы ему были привиты не только любовь к теории вероятностей и “вероятностный” способ мышления, но и взгляд на теорию вероятностей как на своего рода “физику”: за многочисленными ее абстрактными схемами, ее тонким аналитическим аппаратом он уже тогда учится улавливать некую грань реальности, адекватно выражаемую языком теории вероятностей и неотторжимую от этого языка.

В самых первых своих работах по марковским цепям [**1953**, 2; **1956**, 2, 3] Р. Л. Добрушин решил следующую задачу. Пусть

$$S_n = X_1^{(n)} + X_2^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)},$$

где случайные величины $X_i^{(n)}$ связаны при каждом n в неоднородную цепь Маркова (схема серий), и все $X_i^{(n)}$ равномерно ограничены. Р. Л. Добрушин доказал, что условие

$$\alpha_n n^{1/3} \to \infty, \quad n \to \infty,$$

достаточно для справедливости центральной предельной теоремы для величин S_n. Здесь

$$\alpha_n = \min_{1 \leqslant t \leqslant n} \left(1 - \sup_{a,b,A} \left| P_t^{(n)}(a, A) - P_t^{(n)}(b, A) \right| \right),$$

где $P_t^{(n)}(a, A)$ – переходная мера для t-го шага n-й серии. Этот результат обобщает результаты многих его предшественников (Марков, Бернштейн, Линник, Сапогов). Далее в работах [**1952**, 1; **1953**, 1; **1954**, 1; **1956**, 4] Р. Л. Добрушиным были получены необходимые и достаточные условия конечности числа скачков для неоднородного по времени марковского процесса с конечным числом состояний. В работе [**1955**, 2] рассматривалось симметрическое блуждание по однородной решетке $\mathbb{Z}^1$ и изучалось распределение для величины $\mu_n(a, b)$ – числа попаданий на интервал $[a, b] \subset \mathbb{Z}^1$ за n шагов. Оказывается, что $\dfrac{\mu_n(a,b)}{\sqrt{n}}$ имеет асимптотически нормальное распределение (при $n \to \infty$), а разность $\dfrac{\mu_n(a,b) - \mu_n(c,d)}{n^{1/4}}$ также имеет некоторое предельное распределение, если длины отрезков (a, b) и (c, d) совпадают. В небольшой работе [**1955**, 1], в которой изучалась предельная теорема для суммы случайного числа независимых слагаемых, Р. Л. Добрушин применил изящный прием, сводящий эту задачу к сумме уже неслучайного числа слагаемых. Все эти работы лежат в русле классической проблематики теории вероятностей тех времен. Но вот последняя работа Р. Л. Добрушина по марковским процессам [**1956**, 5] уже относится к новой теме и служит прототипом его поздних работ по стохастической эволюции бесконечных систем. Рассматривается случайное марковское движение бесконечного числа частиц в пространстве $\mathbb{R}^n$ такое, что смещения $\xi_j(t) - \xi_j(0)$, $j = 1, \ldots$, частиц за время t независимы и одинаково распределены при любых t и j. Для такого марковского процесса пуассоновское распределение для начального положения всех частиц, как показал Дж. Дуб, является стационарным. Р. Л. Добрушин в своей работе привел общие условия, при которых произвольное начальное распределение для положения частиц сходится при $t \to \infty$ к пуассоновскому.

3. Теория информации

После появления в 1948 г. основополагающей работы К. Шеннона "Математическая теория связи" теория информации становится весьма привлекательным полем деятельности для многих математиков. Чувствовалось, что результаты Шеннона могут быть существенно углублены и доказаны в значительно более общей ситуации. Это и побудило Р. Л. Добрушина и группу других талантливых молодых математиков заняться разработкой математических основ новой теории. Инициатива такой работы принадлежала А. Н. Колмогорову, и на первом этапе он направлял всю эту деятельность.

Вначале основные усилия Р. Л. Добрушина были сосредоточены на выяснении того, при каких наиболее общих и естественных условиях относительно каналов и источников информации верна теорема Шеннона. Эти условия в самой общей форме были сформулированы Р. Л. Добрушиным [**1959**, 1, 2] в терминах изобретенного им понятия информационной устойчивости последовательности пар случайных величин. Он доказал, что при некоторых дополнительных условиях информационная устойчивость последовательности передающих устройств, задающих канал, и последовательности сообщений является достаточным условием для справедливости теоремы кодирования Шеннона для рассматриваемого канала. Аналогичный результат был получен Роландом Львовичем и применительно к источнику сообщений.

Ряд последующих работ Р. Л. Добрушина был посвящен развитию самой концепции, заключенной в теореме Шеннона, на случай более общих ситуаций. Ранее обычно предполагалось, что кодирование и декодирование основано на полном знании статистических свойств используемого канала связи (источника сообщений). Однако во многих реальных ситуациях такое предположение не оправдано, и естественно считать, что известны лишь некоторые частичные сведения об их статистике, которые можно математически описать, указав, что рассматриваемый канал, или источник сообщений, принадлежит некоторому классу G. Р. Л. Добрушин [**1963**, 2, 3; **1970**, 3], [**1975**, 2 (с С. З. Стамблером)] предложил следующий общий принцип, который в случае каналов без памяти выглядит так: теорема кодирования остается справедливой, если пропускную способность $C(G)$ определить формулой $C(G) = \sup_X \inf_{g \in G} I(X; Y_g)$, где Y_g – сигнал на выходе канала g, когда X – сигнал на его входе. Аналогичная идея применима и к источникам сообщений, и для них Р. Л. Добрушин также предложил подобный же принцип: в этом случае скорость как функцию искажения следует определить формулой $R(F) = \sup_{f \in F} R(f)$, где $R(f)$ – скорость как функция искажения для заданного источника сообщений $f \in F$. Он указал достаточные условия применимости этих принципов. Другую более общую ситуацию представляли каналы с ошибками синхронизации. Р. Л. Добрушин дал математическое описание таких каналов, ввел их пропускную способность и доказал теорему Шеннона [**1967**, 2]. Для каналов с выпадением символов в работе, написанной совместно с Н. Д. Введенской [**1968**, 4], он предложил приближенные методы для вычисления их пропускной способности.

Наряду с нахождением наиболее общих условий справедливости теоремы Шеннона Р. Л. Добрушин очень продуктивно исследовал и другие теоретико-информационные понятия и характеристики (энтропия, информация, ε-энтропия, пропускная способность, функция надежности) и открыл ряд важных фактов, связанных с этими понятиями. В частности, он доказал, что для любых случайных величин X, Y

и Z имеет место равенство $I((X,Y);Z) + I(X,Y) = I(Y;(X,Z)) + I(X;Z)$, известное как формула Добрушина [**1959**, 2], вывел достаточные условия для возможности перехода к пределу под знаками информации и энтропии [**1960**, 1], предложил простой и эффективный метод статистического оценивания энтропии стационарной последовательности по наблюдениям [**1958**, 3]. Были также получены [**1963**, 4 (с М. С. Пинскером, А. Н. Ширяевым)] выражения для информационной дивергенции одного гауссовского процесса по другому, обобщающие соответствующие выражения для количества информации, и показано [**1987**, 3 (с Л. А. Бассалыго)], что разность между ε-энтропией и энтропией высокотемпературных гиббсовских полей при достаточно малых ε вычисляется довольно просто, подобно тому, как это имеет место для обычных марковских источников информации.

Р. Л. Добрушин внес также большой вклад в исследование пропускной способности и ε-энтропии многих специальных классов каналов и источников, представляющих практический интерес. В частности, в [**1959**, 3], [**1960**, 4 (с Я. И. Хургиным, Б. С. Цыбаковым)] были исследованы многолучевые каналы с замираниями, когда амплитуды и фазы передаваемого сигнала по каждому из лучей являются взаимно независимыми случайными процессами, которые имеют либо малые дисперсии, либо являются медленно меняющимися функциями времени. Кроме того, в [**1962**, 4 (с Б. С. Цыбаковым)] был исследован важный класс систем передачи информации, когда помимо шумов в канале действуют дополнительные шумы до кодирования сообщений и после их декодирования. Было получено [**1969**, 3 (с М. С. Пинскером)] простое доказательство результата Вольфовица о том, что пропускная способность канала с памятью всегда не меньше пропускной способности соответствующего ему канала без памяти.

Ряд важных и глубоких результатов получен Р. Л. Добрушиным при исследовании асимптотики логарифма оптимальной вероятности ошибки декодирования как функции скорости кода и его длины для различных дискретных каналов без памяти. В работах [**1960**, 3; **1962**, 2] он рассмотрел случай, когда каждая строка (столбец) матрицы переходных вероятностей канала является некоторой перестановкой элементов первой строки (столбца) этой матрицы. Для этого случая, обобщив результат Элайеса для двоичного симметричного канала, он сумел найти не только первый (линейно растущий с длиной кода) член указанной асимптотики, но и второй ее член при скоростях передачи, больших некоторой критической скорости (при меньших скоростях передачи он получил верхние и нижние границы для первого члена асимптотики). Для двоичных симметричных каналов со стиранием Р. Л. Добрушин [**1962**, 1] вычислил в явном виде первый член асимптотики при любом фиксированном числе сообщений. Он доказал также [**1963**, 1], что при скоростях, больших критической, почти любой групповой код асимптотически оптимален при передаче по дискретному симметричному каналу без памяти, и что наличие обратной связи в таком канале не увеличивает первый член асимптотики при тех же скоростях [**1962**, 3].

Р. Л. Добрушин живо интересовался проблемой сложности в различных ее аспектах и всячески подталкивал окружающих и к строгим формулировкам задач в этой области, и к конкретным исследованиям, хотя собственных его работ по этой тематике немного. Он был автором первой работы [**1964**, 1] советских ученых по последовательному декодированию, в которой показал, что для предложенного Возенкрафтом и Рейффеном оригинального алгоритма последовательного декодирования среднее по ансамблю число операций в противоречии с их гипотезой растет экспоненциально с ростом длины передачи, хотя для некоторых модификаций их алгоритма рост числа операций может быть степенным. Две его работы [**1972**, 3 (с С. И. Гельфандом); **1973**, 5 (с С. И. Гельфандом, М. С. Пинскером)] посвящены доказательству существования “хороших” кодов (удовлетворяющих границе Варшамова – Гилберта) с линейной сложностью кодирования на схемах из функциональных элементов, а две другие [**1977**, 5, 6 (с С. И. Ортюковым)] – сравнению сложности самокорректирующейся схемы из ненадежных элементов (все элементы схемы ошибаются независимо друг от друга с малой вероятностью) и сложности схемы из надежных элементов, реализующей ту же функцию. Было показано, что отношение этих сложностей для любой функции растет не быстрее логарифма сложности схемы из надежных элементов и не может быть сделано меньшим для некоторых функций.

Р. Л. Добрушин много времени уделял широкой пропаганде идей теории информации – долгое время он был редактором раздела теории информации в реферативном журнале, им написано большинство словарных статей на эту тему в пятитомной математической энциклопедии и опубликовано несколько прекрасных и широко известных обзоров по теории информации [**1961**, 2; **1966**, 2; **1972**, 4]. Долгое время Роланд Львович был душой и руководителем семинара по теории информации в ИППИ РАН, заместителем главного редактора журнала "Проблемы передачи информации".

4. Статистическая физика

В начале 60-х годов, продолжая заниматься задачами теории информации, Р. Л. Добрушин стал ощущать уже некоторую исчерпанность этой области и, более того, исчерпанность классической тематики теории вероятностей того времени. Во многих беседах он высказывал эту мысль и говорил о том, что охотно занялся бы какой-нибудь темой в вероятностном духе, происходящей из физики. Р. А. Минлос, с которым Роланд Львович, в частности, вел подобные разговоры и который в то время начал изучать статистическую физику, рассказал Р. Л. Добрушину некоторые факты и задачи из этой области. Чрезвычайно заинтересовавшись всем этим, Р. Л. Добрушин предложил Р. А. Минлосу вести совместный семинар по изучению основ статистической физики. Этот семинар открылся осенью 1962 г. на механико-математическом факультете МГУ и просуществовал почти 32 года (до весны 1994 г.). Начавшись как небольшой учебный семинар, он через несколько лет завоевал мировую известность, и на нем были расставлены, быть может, основные вехи в построении современной математической статистической физики. На этом семинаре выросло, по крайней мере, два поколения математиков, активно работающих в настоящее время в математической физике. Немного погодя к Р. Л. Добрушину и Р. А. Минлосу присоединился Я. Г. Синай, вскоре ставший, наравне с Роландом Львовичем, душой и вдохновителем семинара до самого конца его работы. Несколько лет в число руководителей семинара входили Ф. А. Березин и А. С. Шварц. Во второй половине 70-х годов одним из руководителей семинара становится также и В. А. Малышев, пришедший к изучению статистической физики независимо и значительно обогативший тематику семинара. Первые два-три года работы семинара ушли на изучение и осознание основных фактов статистической физики: ансамблей Гиббса, термодинамического предела, термодинамических функций, теоремы Ван Хова, теоремы Ли и Янга, корреляционных функций и корреляционных уравнений, понятий фазового перехода и т.д. Приступая к описанию наиболее интересных работ Р. Л. Добрушина по математической физике, в основном связанных с этим семинаром, мы ради удобства расположили их по тематическим рубрикам. Конечно, следует помнить, что такое деление во многом условно, поскольку в некоторых работах совмещаются разные темы.

4.1. Фазовые переходы. Фазовые переходы являются одними из самых поразительных явлений в статистической физике, и их обнаружение, описание и классификация составляют ее центральную проблему. В общем случае математическая трактовка этой проблемы очень трудна, и развитая к настоящему времени теория охватывает лишь некоторый класс моделей. Первые строгие математические работы по теории фазовых переходов появились в середине 60-х годов, и одна из них принадлежит Р. Л. Добрушину [**1965**, 1, 2]. Эта глубокая работа, ставшая впоследствии широко известной, посвящена доказательству существования фазового перехода 1-го рода в двумерной и трехмерной ферромагнитных моделях Изинга при низких температурах и нулевом магнитном поле. Этот результат был выведен Р. Л. Добрушиным в рамках малого канонического ансамбля Гиббса, и из-за этого все построение оказалось крайне громоздким. Несколько раньше появилась работа Р. Гриффитса, которая стала известна Р. Л. Добрушину уже после опубликования его собственной статьи, где тот же результат был получен с использованием формализма большого канонического ансамбля. В силу этого, доказательство Гриффитса оказалось значительно проще добрушинского, и, что самое главное, в нем явно возрождались старые "контурные" идеи Пайерлса. Благодаря этому дальнейшие исследования фазовых переходов в решетчатых системах были направлены по правильному "контурному" пути. Роланд Львович в последующем сам признавал, что допущенный им методический просчет – использование малого ансамбля вместо большого – открыл ему преимущества большого канонического ансамбля и научил его работать с ним. Вскоре после работы Гриффитса появилось несколько работ с обобщением его результата на случай дальнодействующих (финитных) взаимодействий, в частности, результат Р. Л. Добрушина [**1966**, 1] о существовании фазового перехода в системах со смешанным антиферромагнитным и ферромагнитным взаимодействием, в котором, однако, преобладает последнее. В случае же чистого антиферромагнетика Изинга две различные фазы существуют при низких температурах в целом диапазоне значений магнитного поля. Этот результат содержится в работе [**1968**, 3].

В дальнейшем Р. Л. Добрушин не раз обращался к проблеме фазовых переходов. Укажем, во-первых, работу [**1974**, 3 (с В. М. Герциком)], в которой установлено наличие фазовых переходов для некоторого класса решетчатых систем (с конечным множеством значений спина) с взаимодействием спинов, удаленных не более чем на два шага решетки. Существенным для этих систем является наличие в них некоторых симметрий, "нарушаемых" при фазовых переходах: имеется несколько гиббсовских распределений ("фаз"), каждое из которых уже лишено части симметрий. В этой работе было введено важное понятие "основного состояния" системы (т.е. бесконечной конфигурации спинов на решетке с "наименьшей энергией"), а также явно сформулировано так называемое "условие Пайерлса". В упомянутой работе предполагалось, что у системы имеется конечное число основных состояний, транзитивно переводимых друг в друга действием группы симметрий. Тогда при низких температурах каждое основное состояние порождает гиббсовское распределение. Эти понятия и концепции оказались ключевыми в более общей теории фазовых переходов, построенной несколькими годами позже С. А. Пироговым и Я. Г. Синаем. Другой важный результат Р. Л. Добрушина [**1972**, 2; **1973**, 1] – открытие им специального вида неоднородных фаз (это явление в англоязычной математической литературе обозначается словом "roughening" (огрубление, отвердение)). Такие фазы проявляются, в частности, в трехмерной ферромагнитной модели Изинга при низких температурах и нулевом магнитном поле и состоят из двух однородных (+)- и (−)-фаз, сосуществующих в пространстве так, что каждая из них заполняет свое полупространство, а граница между фазами представляет собой "флуктуирующую" плоскость. В случае антиферромагнитного взаимодействия также возникает "roughening", но уже в целом диапазоне значений магнитного поля. Существует гипотеза, что при повышении температуры T поверхность раздела между однородными частями фазы "флуктуирует" все больше и больше и, наконец, при некотором значении $T_{\mathrm{rough}} < T_{\text{крит}}$ "разбалтывается" настолько, что "roughening" исчезает (здесь $T_{\text{крит}}$ – критическое значение температуры, при котором вообще исчезают обе однородные фазы (+) и (−), и выше которого система однофазна). В работах [**1981**, 2 (с С. Б. Шлосманом)] и [**1986**, 1 (с М. Заградником)] было доказано (разными способами) существование фазового перехода для взаимодействия с одним глобальным и одним локальным минимумами (достаточно большой "ширины"). Это многих поразило, так как считалось, что для взаимодействий с единственным глобальным минимумом фазовый переход не возникает. Попутно в работе с М. Заградником была разработана модификация теории Пирогова – Синая применительно к системам с непрерывным спином. Наконец, следует упомянуть работу [**1975**, 1 (с С. Б. Шлосманом)], в которой доказывается, что в двумерных решетчатых системах с непрерывным спином фазовых переходов нет.

4.2. Гиббсовские случайные поля (ДЛР-определение и все об этом). К концу 60-х годов после работ Д. Рюэля, Р. А. Минлоса, а также Р. А. Минлоса и Я. Г. Синая стала ясна природа того предельного объекта, который описывает статфизическую систему после совершения термодинамического предельного перехода: это пространство Ω бесконечных конфигураций системы с некоторым распределением вероятностей на Ω, являющимся в некотором смысле "предельным" для конечных гиббсовских распределений. При этом в некоторых случаях такое предельное распределение единственно, а в других случаях возникает несколько таких распределений (фаз). Появляется вопрос – каково внутреннее свойство этих распределений, связывающее их с потенциалом взаимодействия системы? Отвечая на этот вопрос, Р. Л. Добрушин, а также независимо от него О. Ланфорд и Д. Рюэль, пришли к общему определению бесконечного гиббсовского поля (это определение обозначается с тех пор аббревиатурой ДЛР). Согласно этому определению гиббсовское поле на Ω обладает тем свойством, что для любого конечного подмножества Λ решетки (или пространства) и любой фиксированной конфигурации $\overline{\sigma}$ спинов вне этого подмножества условное распределение вероятностей для конфигураций спинов внутри Λ задается известной гиббсовской формулой, в которой энергия конфигурации спинов σ в Λ включает энергию взаимодействия σ с $\overline{\sigma}$.

Р. Л. Добрушин в большом цикле работ [**1968**, 1, 2, 3; **1969**, 1; **1970**, 1, 2] исследовал это понятие и многие его аспекты (существование гиббсовских полей при заданном потенциале взаимодействия, критерии единственности такого поля, свойства убывания его корреляций, аналитическую зависимость от параметров и т.д.). Наиболее трудная и глубокая тема в этих исследованиях, занимавшая Р. Л. Добрушина многие годы, – нахождение критериев единственности гиббсовских полей на дискретном множестве (скажем, на решетке $\mathbb{Z}^\nu$) для заданного взаимодействия. В ранней работе [**1969**, 1] он привел наиболее простой из таких критериев, состоящий в следующем. Рассмотрим условное распределение поля в некоторой точке $x \in \mathbb{Z}^\nu$ при условии, что поле вне этой точки фиксировано. Это распределение зависит, конечно, от значений окружающего точку x поля. Вводится некоторая характеристика $c_x(y)$, $x \neq y$, измеряющая степень такой зависимости: $c_x(y)$ – максимальное изменение распределения в x при всевозможных изменениях внешнего поля только в точке y. Тогда, если

$$\sup_x \sum_y c_x(y) < 1,$$

то гиббсовское поле единственно. Указанное условие хорошо известно, и определяемая им область взаимодействий называется "областью единственности по Добрушину". Описанное условие легко проверяемо, и в этом его большое достоинство. Конечно, оно не исчерпывает всех случаев отсутствия фазовых переходов (т.е. единственности гиббсовского поля). В связи с этим в работе [**1985**, 1 (с С. Б. Шлосманом)] была введена целая серия аналогичных условий, в которых точка $x \in \mathbb{Z}^\nu$ заменяется каким-либо фиксированным (с точностью до сдвигов вдоль решетки $\mathbb{Z}^\nu$) конечным множеством V. Каждое такое условие влечет единственность гиббсовского поля, а все они в совокупности (при всевозможных V) в некотором смысле исчерпывают все случаи единственности поля. Эти условия также достаточно конструктивны. Так, например, в работе [**1985**, 3], написанной совместно с С. Б. Шлосманом и И. Колафой, было установлено некоторое нетривиальное свойство критической кривой для двумерного антиферромагнетика Изинга с помощью явной компьютерной проверки одного из указанных условий (для случая, когда $V \subset \mathbb{Z}^2$ является прямоугольником 3×4). Вопросам единственности гиббсовских полей посвящена также работа Р. Л. Добрушина и Е. А. Печерского [**1981**, 1]. В ней, в частности, содержится красивый результат о том, что для короткодействующих потенциалов корреляции соответствующего гиббсовского поля убывают либо экспоненциально (относительно расстояния между точками), либо степенным образом ($\sim r^{-d}$ при каком-то $d > 0$), а промежуточных режимов не бывает. Эта работа имела громкий резонанс. Продумывание ее результатов вдохновило исследования Б. Саймона, в которых было найдено так называемое неравенство Саймона – сильный технический инструмент в современных работах.

Многими авторами было подмечено, что в тех случаях, в которых удается установить единственность гиббсовского поля, оно обладает еще целым рядом "хороших" свойств: у него быстро убывают корреляции, его характеристики аналитически зависят от потенциала и т.д. В работе [**1985**, 2] Р. Л. Добрушин и С. Б. Шлосман облекли это наблюдение в небольшую изящную теорию с помощью введенного ими понятия "вполне аналитического гиббсовского поля". Это понятие было сформулировано авторами двенадцатью эквивалентными способами (в работах их последователей число формулировок увеличилось до двадцати), каждый из которых подчеркивает одно из свойств полей этого класса (которое, таким образом, влечет за собой и остальные свойства). Класс "вполне аналитических полей" сейчас стал очень популярным, и вся эта теория используется многими авторами.

Следует особо отметить работы Р. Л. Добрушина [**1973**, 2; **1974**, 1, 2] по одномерным системам, для которых он в широких предположениях доказал единственность гиббсовских полей и аналитическую зависимость их характеристик от потенциала. Индуктивный метод доказательства, примененный Р. Л. Добрушиным в этих работах, довольно труден. В свое время при попытках разобрать это доказательство М. Кассандро и Е. Оливьери придумали другой альтернативный метод изучения одномерных систем, ставший ныне также широко распространенным.

В заключение отметим работу Р. Л. Добрушина и Л. А. Бассалыго [**1986**, 2], где очень элементарно и в широких предположениях была доказана единственность гиббсовского поля со случайным потенциалом. Этот результат значительно обобщил прежний результат И. Фрелиха и И. Имбри, где предполагалось, что взаимодействие принимает большие значения лишь с малыми вероятностями.

4.3. Марковские процессы с локальным взаимодействием. В конце 60-х начале 70-х годов Р. Л. Добрушин под влиянием работ группы И. И. Пятецкого-Шапиро в Московском университете (О. Н. Ставская, Н. Б. Васильев, Л. Н. Васерштейн, А. Л. Тоом, А. М. Леонтович и др.), в которых изучались некоторые модели биологического роста, ввел общее понятие марковского процесса с локальным взаимодействием [**1969**, 2 (с Н. Б. Васильевым, И. И. Пятецким-Шапиро); **1971**, 1, 2]. Это процесс с бесконечным числом компонент, помеченных вершинами некоторого графа G (например, решетки $\mathbb{Z}^\nu$), такой, что условная вероятность изменения компоненты в вершине $t \in G$ зависит от значений компонент только в соседних вершинах графа (более общо – в вершинах из некоторой конечной окрестности t). Кроме того, что Р. Л. Добрушин заложил основы теории таких процессов, он применил их к гиббсовским полям, построив для каждого потенциала взаимодействия марковскую полугруппу, для которой все гиббсовские поля на графе G служат его стационарными распределениями. К настоящему времени теория таких процессов обросла значительной литературой и превратилась в самостоятельную науку, обильную результатами, методами и приложениями.

4.4. Гауссовские и автомодельные поля и вокруг них. В начале 70-х годов, когда возникла новая плодотворная струя в математической физике, связанная с так называемым “марковским подходом” к построению моделей квантового поля, Р. Л. Добрушин не остался глух к этим идеям, которые он сразу ассоциировал с ДЛР-подходом к обобщенным случайным полям. Вместе с Р. А. Минлосом он опубликовал заметку [**1973**, 3], где были анонсированы результаты о существовании квантовых полей, соответствующих так называемым $P(\varphi_2)$ моделям квантового поля, а также их неединственности при некоторых значениях параметров. Эта программа, к сожалению, самими авторами не была выполнена, и ее основные пункты позднее были доказаны в работах западных ученых (Дж. Глимм, А. Джаффе, Т. Спенсер, И. Имбри). Однако на подступах к выполнению этой программы Р. Л. Добрушиным и Р. А. Минлосом была проделана определенная предварительная работа, проясняющая структуру обобщенных гауссовских полей, а также некоторых связанных с ними конструкций и понятий [**1976**, 1; **1977**, 4; **1978**, 4]. В дальнейших работах, написанных в соавторстве с П. Майером [**1979**, 2], Д. Сургайлисом [**1979**, 5] и М. Я. Кельбертом [**1983**, 2, 3], Р. Л. Добрушин не раз использовал усвоенную им таким образом технику и конструкции. Наконец, с помощью так называемых полиномов Вика от гауссовского автомодельного поля в работе [**1979**, 1] Р. Л. Добрушиным были построены новые классы автомодельных полей. В работе [**1980**, 1] Роланд Львович рассмотрел гауссовские поля на решетке с общей гиббсовской (ДЛР) точки зрения и ввел довольно общие критерии единственности таких полей.

С этой же тематикой перекликаются работы Р. Л. Добрушина по так называемым автомодельным полям (трансляционно-инвариантным случайным полям на пространстве $\mathbb{R}^\nu$ (или на решетке $\mathbb{Z}^\nu$), мультипликативно преобразующимся при растяжении пространства $\mathbb{R}^\nu$). Понятие автомодельных полей связано с методом ренормализационной группы, интерес к которой особенно усилился после появления в начале 70-х годов общей программы Вильсона по исследованию критических точек. В работе [**1978**, 1] Роланд Львович дал общее определение случайного (обобщенного) автомодельного поля на непрерывном пространстве и связанной с этим полем ренорм-группы. В работе [**1981**, 3] он вместе с П. Майером исследовал некоторые асимптотические свойства таких полей. Ряд конкретных классов автомодельных полей был им построен в уже упомянутой работе [**1979**, 1].

4.5. Конструкция Вульфа и теория больших уклонений в двухфазной области. Несколько последних лет своей жизни Р. Л. Добрушин вместе с сотрудниками занимался подробным изучением структуры конфигураций в модели Изинга, типичных относительно малого ансамбля Гиббса при низких температурах. Результатом этих занятий явилась монография [**1992**, 1], написанная Р. Л. Добрушиным, Р. Котецким и С. Б. Шлосманом. Структура типичных конфигураций для чистой (скажем, (+)-фазы) была исследована еще давно в работах Р. А. Минлоса и Я. Г. Синая. А именно, для распределения Гиббса с (+)-граничными условиями в квадрате $N \times N \subset \mathbb{Z}^2$ с вероятностью, близкой к единице (при N достаточно большом), плотность отрицательных “спинов” в каждой конфигурации близка к некоторому значению $\rho_-(T) < 1/2$, а сами эти спины собираются в редко расположенные “микрокапельки”, размер которых не превосходит $O(\ln N)$. Спрашивается, каков будет вид конфигурации, типичной относительно условного распределения в (+)-фазе, при условии, что плотность ρ отрицательных спинов фиксирована, причем $\rho_-(T) < \rho < 1/2$. Как было показано в упомянутых работах Р. А. Минлоса и Я. Г. Синая, с вероятностью, близкой к единице, каждая конфигурация содержит единственную макрокаплю Γ (размера $\sim N$), состоящую из (−)-фазы и “плавающую” внутри (+)-фазы (площадь $|\Gamma|$ этой “капли” однозначно определяется значением ρ так, что суммарное число отрицательных спинов в обеих частях – в “капле” и вне ее – равно $N^2\rho$). Р. Л. Добрушин с сотрудниками детально исследовали типичную форму этой “капли”. Оказалось, что “капля” близка к овалу $W \cdot N$, где W – некоторая плоская кривая, описываемая как решение определенной вариационной геометрической задачи.

Эта кривая называется кривой Вульфа (в честь казанского профессора Г. В. Вульфа, впервые построившего ее в давней работе 1900 г.). Г. В. Вульф занимался той же задачей, только применительно к фазам в непрерывном веществе, и исходил, конечно, из чисто феноменологических представлений. Самым удивительным в результате Добрушина, Котецкого и Шлосмана оказалось то, что эта феноменологическая тонкая конструкция может быть строго обоснована (хотя бы в рамках модели Изинга) с помощью исследования явлений микроуровня.

Дальнейшее развитие все эти идеи получили в работе [**1994**, 4 (с С. Б. Шлосманом)]. В этой работе изучалась картина типичных конфигураций для d-мерной модели Изинга, когда ρ лишь немного отклоняется от $\rho_-(T)$. При этом в диапазоне значений ρ: $\rho_-(T) < \rho < \rho_-(T) + O\left(V_N^{(d-1)/d}\right)$ ($V_N \subset \mathbb{Z}^\nu$ – куб со стороной N) большой капли еще нет, но когда ρ переходит через этот порог, появляется одна большая капля размера $O(N^\alpha)$, $\alpha > 0$. Эти результаты тесно связаны с вероятностями больших уклонений для намагниченности (т.е. суммарного спина системы) в каждой из фаз. В случае, когда намагниченность M в $(+)$-фазе больше средней намагниченности (а это происходит из-за уменьшения числа отрицательных спинов), то, поскольку все определяется "почти независимыми" "микрокапельками" $\sim \ln N$, вероятности больших уклонений M ведут себя "классически". При значениях намагниченности, меньших среднего значения, вид вероятностей больших уклонений из-за появления "капли" уже отличается от классических выражений.

В ряде последующих работ, написанных с О. О. Гринивым [**1994**, 1, 5; **1995**, 1], изучались вероятности больших уклонений для формы границы капли в двумерной модели Изинга, а также в так называемой SOS-модели.

4.6. Эволюция больших систем и гидродинамические уравнения. Параллельно занятиям равновесной статистической физикой Р. Л. Добрушин с конца 70-х годов начинает интересоваться проблемой описания эволюционных процессов в больших (бесконечных) системах. Начальный толчок этим занятиям дала, по-видимому, работа О. Ланфорда, в которой была построена динамика бесконечного одномерного газа (решение бесконечной системы уравнений Ньютона), а также излагались некоторые соображения, приведшие затем к ключевому понятию гидродинамического предела.

В работах [**1977**, 2, 3 (с И. Фритцем)] выводится теорема о существовании бесконечной динамики для одномерного (а также двумерного) газа, значительно обобщающая результаты Ланфорда (а также ряда других работ, относящихся к этой теме). Несколько лет Р. Л. Добрушин занимался обоснованием уравнения Больцмана, но, к сожалению, ничего не опубликовал по этой теме (видимо, из-за высокой требовательности к уровню своих результатов). Имеется его работа [**1979**, 3], касающаяся уравнения Власова, где, в частности, точно описывается та предельная ситуация, при которой это уравнение справедливо.

Значительное время Р. Л. Добрушин занимался выводом гидродинамических уравнений и выработкой общей идеологии таких уравнений, в частности, понятия локально-равновесных состояний и гидродинамического предела. Эта идеология состоит в следующем. Рассматривается динамика (эволюция) какой-нибудь большой системы, состоящей из микроэлементов (газ из молекул), и предполагается, что начальное состояние является локально-равновесным. Это означает, грубо говоря, что в каждой области пространства размера ε^{-1} (ε – малый параметр), т.е. большой по сравнению с размерами микрочастиц, распределение вероятностей для той части системы, которая попала в эту область, является равновесным со своими для каждой такой области значениями параметров равновесия (например, температурой T, давлением P, плотностью частиц ρ). С другой стороны, рассматриваемые области – большие по отношению к размерам микрочастиц – с макроскопической точки зрения малы: их можно считать почти точками. Таким образом, в макропространстве возникают функции $T_0(x)$, $P_0(x)$, $\rho_0(x)$ – значения термодинамических параметров в каждой точке. Предполагается, что при эволюции микросистемы в течение времени $t \sim 1/\varepsilon$ (или $\sim 1/\varepsilon^2$), т.е. очень длительного в масштабах продолжительности микропроцессов, начальное локально-равновесное состояние переходит снова в локально-равновесное состояние, описываемое уже другими функциями $(T_\tau(x),\ P_\tau(x),\ \rho_\tau(x))$, где $\tau = \varepsilon t$ (или $\varepsilon^2 t$) – макровремя (измеряемое в масштабе длительности макропроцессов). Редуцированную эволюцию $(T_0(\cdot), P_0(\cdot), \rho_0(\cdot)) \to (T_\tau(\cdot), P_\tau(\cdot), \rho_\tau(\cdot))$ и следует называть гидродинамическим описанием, а дифференциальные уравнения, задающие эту эволюцию, – гидродинамическими уравнениями. Вывод гидродинамических уравнений для каждой конкретной микродинамики вместе с обоснованием лежащего в основе этого вывода предельного перехода $\varepsilon \to 0$ (гидродинамический предел) составляет в последнее время содержание большого числа работ по математической гидродинамике.

Р. Л. Добрушин вместе с сотрудниками детально провел эти построения для нескольких специальных примеров: гидродинамики идеального газа [**1980**, **3** (с К. Болдригини, Ю. М. Суховым)], гидродинамики системы независимо движущихся частиц [**1982**, 2 (с Р. Зигмундом-Шульце)], гидродинамики твердых стержней [**1983**, 1 (с К. Болдригини, Ю. М. Суховым)], гидродинамики одномерных осцилляторов на решетке [**1986**, **3**; **1988**, 5 (с А. Пеллегринотти, Ю. М. Суховым, Л. Триоло)], [**1990**, 2 (с А. Пеллегринотти, Ю. М. Суховым)]. Кроме того, в работе [**1991**, 1 (с Ф. Соколовским)] изучены гидродинамические уравнения высших порядков для случая системы частиц, блуждающих независимо. Последний год своей жизни Р. Л. Добрушин занимался выводом известной в гидродинамике (на эвристическим уровне) формулы Кубо и готовил эту работу к публикации.

4.7. Теория сетей связи. Р. Л. Добрушин давно обратил внимание на то, что методы и подходы, выработанные в последние десятилетия в статистической физике, приложимы к гораздо большему кругу систем – к системам, состоящим из большого числа "локально-взаимодействующих" компонент (это означает, иначе говоря, что взаимодействуют лишь "ближайшие" в некотором смысле компоненты). Им был пущен в обиход довольно емкий термин "многокомпонентные случайные системы" (включенный со временем даже в название его лаборатории).

В частности, коммуникационные сети, образованные большим числом обслуживающих устройств, которые обрабатывают случайные потоки сообщений, представляют собой некоторый специальный класс многокомпонентных случайных систем. Р. Л. Добрушин уже в 70-е годы стал размышлять над проблемами теории этих сетей и вдохновлял своих учеников и сотрудников на их изучение именно с общей "многокомпонентной" точки зрения. И, быть может, главная заслуга Р. Л. Добрушина в этой области состоит не только в его личных конкретных достижениях, а именно в общем концептуальном подходе к ней: его идеи, гипотезы, понимание ситуации в целом, постановки тех или иных задач и технические рецепты их решения – все это оказалось чрезвычайно важным для многих исследователей, занимавшихся сетями связи.

С тем, чтобы лучше пояснить появляющиеся здесь проблемы, кратко опишем одну из наиболее изученных моделей сетей связи, с исследования которой начинал и Р. Л. Добрушин – модель Джексона. Система, описываемая этой моделью, состоит из нескольких обслуживающих устройств $S_i, \ldots, S_k$ (называемых обычно серверами), к каждому из которых подходит в порядке очереди заявка как извне системы, так и от других серверов. Сервер S_i обрабатывает попавшее в него сообщение в течение некоторого случайного времени, а затем отправляет его либо к другому серверу S_k $(k \neq i)$ с вероятностью P_{ik}, либо выводит из системы (с вероятностью $1 - \sum_{k \neq i} P_{ik}$).

Предполагается, что заявки, поступающие снаружи к серверу, образуют случайный пуассоновский поток с интенсивностью λ_i, а время обработки этим сервером единичной заявки распределено экспоненциально с интенсивностью μ_i. Интенсивность ν_i полного потока сообщений, попадающих на сервер S_i (состоящего из сообщений, пришедших как извне, так и от других серверов), однозначно определяется параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ и матрицей $\{P_{ik}\}$. Эта модель с математической точки зрения может быть описана как марковский процесс со счетным пространством состояний. При некоторых условиях этот процесс эргодичен, т.е. у него существует (единственное) стационарное состояние. Джексон показал, что условия $\nu_i < \mu_i$, $i = 1, \ldots, k$, достаточны для эргодичности процесса. Кроме того, длины очередей сообщений к разным серверам независимы (относительно стационарного режима), и распределение длины каждой очереди не зависит от числа серверов.

Р. Л. Добрушин по достоинству оценил эту модель и, отталкиваясь от нее, сформулировал несколько проблем, относящихся уже к моделям более общего вида (поток заявок может быть не пуассоновским, время обслуживания распределенным не экспоненциально, условие Джексона $\nu_i < \mu_i$ не выполняется и т.д.). Эти проблемы стимулировали затем появление многих работ. Укажем для примера две такие проблемы, настоятельно пропагандировавшиеся Р. Л. Добрушиным.

1. При каких условиях длины очередей остаются независимыми (быть может, асимптотически – при большом числе серверов)?

2. Какой случайный поток сообщений сохраняет свой вид (свое распределение вероятностей) при прохождении через сервер, у которого время обслуживания распределено не экспоненциально? (Для сервера с экспоненциально распределенным временем обслуживания таким потоком является лишь пуассоновский поток.)

Среди различных методов исследования, которые применяются в теории сетей связи, метод так называемого “жидкостного” приближения, предложенный Р. Л. Добрушиным, стал очень плодотворным. Этот метод состоит в том, что дискретный поток сообщений, поступающих в систему, приближенно заменяется непрерывным (“струей жидкости”), а сложный марковский процесс, описывающий систему, заменяется своей “гидродинамикой”. Другой прием, примененный Р. Л. Добрушиным и Ю. М. Суховым в работе [**1976**, 2], – так называемый “метод среднего поля” (при котором взаимодействие между ближайшими компонентами заменяется усредненным взаимодействием “всех со всеми”). В упомянутой работе с помощью этого приема исследовалась сформулированная выше задача об асимптотической независимости длин очередей. В работе [**1979**, 6 (с В. В. Преловым)] изучался вопрос о единственности стационарного режима для моделей общего вида.

Как уже говорилось выше, у Р. Л. Добрушина в последние годы жизни возник интерес к теории вероятностей больших уклонений и ее применению к конкретным задачам. Так появилась работа [**1994**, 2 (с Е. А. Печерским)], касающаяся распределения длины очереди сообщений и, в частности, вероятностей больших уклонений для этих распределений. В работе с В. М. Блиновским [**1994**, 6] были изучены вероятности больших уклонений для марковского процесса с кусочно-постоянными вероятностями перехода. Эта задача также возникает из теории сетей связи: упомянутый марковский процесс описывает распределение длины очередей в системе из нескольких обслуживающих приборов.

Наконец, следует сказать о работе [**1996**, 1 (с Н. Д. Введенской, Ф. И. Карпелевичем)], в которой очень красивым методом был описан асимптотический режим работы системы при увеличивающемся числе серверов. Эта работа была сделана в последние месяцы жизни Роланда Львовича и опубликована уже после его смерти.

Этим мы завершаем краткий обзор научного творчества Роланда Львовича Добрушина. Мы не упомянули еще о многом, сделанном им. В частности, отдельного разбора заслуживают написанные Роландом Львовичем обзоры, общие проблемные доклады на различных конференциях, циклы прочитанных им в различное время лекций и т.д. В его архиве наверняка хранятся неоконченные работы. После надлежащей расшифровки их, безусловно, следует издать, снабдив соответствующими комментариями. Мы – его друзья, сотрудники и коллеги – надеемся, что со временем все его научное наследство станет достоянием математического сообщества.

Л. А. Бассалыго, В. А. Малышев, Р. А. Минлос,
И. А. Овсеевич, Е. А. Печерский, М. С. Пинскер,
В. В. Прелов, А. Н. Рыбко, Ю. М. Сухов, С. Б. Шлосман

Список печатных работ Р. Л. Добрушина

1952

1. Об условиях регулярности однородных по времени марковских процессов со счетным числом возможных состояний // УМН. Т. 7. № 6. С. 185–191.

1953

1. Обобщение уравнений Колмогорова для марковских процессов с конечным числом возможных состояний // Мат. сб. Т. 33. № 3. С. 567–596.
2. Предельная теорема для цепи Маркова из двух состояний // Изв. АН СССР. Сер. мат. Т. 17. № 4. С. 291–330.

1954

1. Условия регулярности марковских процессов с конечным числом возможных состояний // Мат. сб. Т. 34. № 3. С. 541–556.

1955

1. Лемма о пределе сложной случайной функции // УМН. Т. 10. № 2. С. 157–159.
2. Две предельных теоремы для простейшего случайного блуждания на прямой // УМН. Т. 10. № 3. С. 139–146.
3. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова // ДАН СССР. Т. 102. № 1. С. 5–8.

1956

1. Об условиях центральной предельной теоремы для неоднородных цепей Маркова // ДАН СССР. Т. 108. № 6. С. 1004–1006.
2. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I // Теория вероятностей и ее применения. Т. 1. № 1. С. 72–89.
3. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. II // Теория вероятностей и ее применения. Т. 1. № 4. С. 365–425.
4. Пример счетного однородного марковского процесса, все состояния которого являются мгновенными // Теория вероятностей и ее применения. Т. 1. № 4. С. 481–485.
5. О законе Пуассона для распределения частиц в пространстве // Укр. мат. журн. Т. 8. № 2. С. 127–134.
6. Приложение переводчиков к русскому изданию книги // Дуб Дж. Вероятностные процессы. М.: Изд-во иностр. лит. С. 576–688 (совм. с А. М. Ягломом).

1957

1. Некоторые классы однородных счетных марковских процессов // Теория вероятностей и ее применения. Т. 2. № 3. С. 377–380.

1958

1. Одна статистическая задача теории обнаружения сигнала на фоне шума в многоканальной системе, приводящая к устойчивым законам распределения // Теория вероятностей и ее применения. Т. 3. № 2. С. 173–185.
2. Передача информации по каналам с обратной связью // Теория вероятностей и ее применения. Т. 3. № 4. С. 395–412.
3. Упрощенный метод экспериментальной оценки энтропии стационарной последовательности // Теория вероятностей и ее применения. Т. 3. № 4. С. 462–464.

1959

1. Общая формулировка основной теоремы Шеннона в теории информации // ДАН СССР. Т. 126. № 3. С. 474–477.
2. Общая формулировка основной теоремы Шеннона в теории информации // УМН. Т. 14. № 6. С. 3–104.
3. Оптимальная передача информации по каналу с неизвестными параметрами // РЭ. Т. 4. № 12. С. 1951–1956.

1960

1. Предельный переход под знаком информации и энтропии // Теория вероятностей и ее применения. Т. 5. № 1. С. 29–37.
2. Свойства выборочных функций гауссовского стационарного процесса // Теория вероятностей и ее применения. Т. 5. № 1. С. 132–134.
3. Асимптотика вероятностей ошибки при передаче информации по каналу без памяти с симметрической матрицей вероятностей перехода // ДАН СССР. Т. 133. № 2. С. 265–268.
4. Приближенное вычисление пропускной способности радиоканалов со случайными параметрами // Тр. Всесоюз. совещ. по теории вероятностей и математической статистике. Тез. докл. Ереван, 1958. Ереван: Изд-во АН АрмССР. С. 164–171 (совм. с Я. И. Хургиным и Б. С. Цыбаковым).
5. Теория информации и лингвистика // Вопросы языкознания. Т. 9. № 1. С. 100–110 (совм. с А. М. Ягломом и И. М. Ягломом).

1961

1. Математические методы в лингвистике // Математическое просвещение. М.: Физматгиз. Вып. 6. С. 37–60.
2. Математические вопросы шенноновской теории оптимального кодирования информации // Проблемы передачи информации. М.: Изд-во АН СССР. Вып. 10. С. 63–107.

1962

1. Оптимальные бинарные коды для малых скоростей передачи информации // Теория вероятностей и ее применения. Т. 7. № 2. С. 208–213.
2. Асимптотические оценки вероятности ошибки при передаче сообщения по дискретному каналу связи без памяти с симметрической матрицей вероятностей перехода // Теория вероятностей и ее применения. Т. 7. № 3. С. 283–311.
3. Асимптотическая оценка вероятности ошибки при передаче сообщения по каналу без памяти с использованием обратной связи // Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз. Вып. 8. С. 161–168.
4. Information Transmission with Additional Noise // IEEE Trans. Inform. Theory. V. 8. № 5. P. 293–304 (совм. с Б. С. Цыбаковым).

1963

1. Асимптотическая оптимальность групповых и систематических кодов для некоторых каналов // Теория вероятностей и ее применения. Т. 8. № 1. С. 52–66.
2. Единые способы передачи информации для дискретных каналов без памяти и сообщений с независимыми компонентами // ДАН СССР. Т. 148. № 6. С. 1245–1248.
3. Единые способы передачи информации – общий случай // ДАН СССР. Т. 149. № 1. С. 16–19.
4. Применение понятия энтропии в проблемах обнаружения сигнала на фоне шума // Литов. мат. сб. Т. 3. № 1. С. 107–122 (совм. с М. С. Пинскером, А. Н. Ширяевым).
5. Возможности применения предельных теорем вероятностей к некоторым задачам физики // Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент. С. 15–37 (совм. с Р. А. Минлосом).

1964

1. По поводу последовательного декодирования методом Возенкрафта – Рейффена // Проблемы кибернетики. М.: Наука. Вып. 12. С. 113–123.
2. Исследование условий асимптотического существования конфигурационного интеграла распределения Гиббса // Теория вероятностей и ее применения. Т. 9. № 4. С. 626–643.
3. Методы теории вероятностей в статистической физике // Тр. Зимней школы по теории вероятностей и математической статистике. Киев. С. 221–263.

1965

1. Существование фазового перехода в двумерной и трехмерной моделях Изинга // ДАН СССР. Т. 160. № 5. С. 1046–1048.
2. Существование фазового перехода в двумерной и трехмерной моделях Изинга // Теория вероятностей и ее применения. Т. 10. № 2. С. 209–230.

1966

1. Existence of phase transitions in models of a lattice gas // Proc. Fifth Berkeley Sympos. on Math. Statist. and Prob. Univ. of Calif. Press. V. 3. P. 73–87.
2. Теория оптимального кодирования информации // Кибернетику – на службу коммунизму. М.–Л.: Энергия. Т. 3. С. 13–45.

1967

1. Существование и непрерывность давления в классической статистической физике // Теория вероятностей и ее применения. Т. 12. № 4. С. 595–618 (совм. с Р. А. Минлосом).
2. Теоремы Шеннона для каналов с ошибками в синхронизации // Пробл. передачи информ. Т. 3. № 4. С. 18–36.

1968

1. Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности // Теория вероятностей и ее применения. Т. 13. № 2. С. 201–229.
2. Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием // Функцион. анализ и его прил. Т. 2. № 2. С. 31–43.
3. Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов // Функцион. анализ и его прил. Т. 2. № 2. С. 44–57.
4. Вычисление на ЦВМ пропускной способности каналов связи с выпадением символов // Пробл. передачи информ. Т. 4. № 3. С. 92–95 (совм. с Н. Д. Введенской).

1969

1. Гиббсовские случайные поля. Общий случай // Функцион. анализ и его прил. Т. 3. № 1. С. 27–35.
2. Марковские процессы на бесконечном произведении дискретных пространств // Тр. Советско-японского симпоз. по теории вероятностей и математической статистике. Тез. докл. Хабаровск – Новосибирск. С. 3–30 (совм. с Н. Б. Васильевым, И. И. Пятецким-Шапиро).
3. Память увеличивает пропускную способность // Пробл. передачи информ. Т. 5. № 1. С. 94–95 (совм. с М. С. Пинскером).

1970

1. Гиббсовские случайные поля для частиц без твердой сердцевины // Теорет. и мат. физика. Т. 4. № 1. С. 101–118.
2. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений // Теория вероятностей и ее применения. Т. 15. № 3. С. 469–497.
3. Единые способы оптимального квантования сообщений // Проблемы кибернетики. М.: Наука. Вып. 22. С. 107–156.

1971

1. Марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент – существование предельного процесса и его эргодичность // Пробл. передачи информ. Т. 7. № 2. С. 70–87.
2. Марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент – обратимый случай и некоторые обобщения // Пробл. передачи информ. Т. 7. № 3. С. 57–66.
3. Обзор ряда недавних результатов (Приложение к русскому изданию книги) // Рюель Д. Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир. С. 314–361 (совм. с Р. А. Минлосом, Ю. М. Суховым).

1972

1. Асимптотическое поведение гиббсовских распределений для решетчатых систем в зависимости от формы сосуда // Теорет. и мат. физика. Т. 12. № 1. С. 115–134.
2. Гиббсовское состояние, описывающее сосуществование фаз для трехмерной модели Изинга // Теория вероятностей и ее применения. Т. 17. № 4. С. 619–639.
3. Сложность реализации асимптотически оптимальных кодов схемами постоянной глубины // Пробл. управл. и теории информ. Т. 1. № 3–4. С. 197–215 (совм. с С. И. Гельфандом).
4. Survey of Soviet Research in Information Theory // IEEE Trans. Inform. Theory. V. 18. № 6. P. 703–724.

1973

1. Исследование гиббсовских состояний для трехмерных решетчатых систем // Теория вероятностей и ее применения. Т. 18. № 2. С. 261–279.
2. Analyticity of Correlation Function in One-Dimensional Classical Systems with Slowly Decreasing Potentials // Comm. Math. Phys. V. 32. № 4. P. 269–289.
3. Построение одномерного квантового поля с помощью непрерывного марковского поля // Функцион. анализ и его прил. Т. 7. № 4. С. 81–82 (совм. с Р. А. Минлосом).
4. Математическая лингвистика // Изв. АН СССР. Сер. лит. и яз. Т. 32. № 5. С. 438–441.
5. On the complexity of coding // Proc. 2nd Int. Sympos. on Inform. Theory. Tsahkadsor, Armenia, USSR, 1971. Budapest: Acad. Kiado. P. 177–184 (совм. с С. И. Гельфандом, М. С. Пинскером).

1974

1. Условия отсутствия фазовых переходов в одномерных классических системах // Мат. сб. Т. 93. № 1. С. 29–49.
2. Аналитичность корреляционных функций в одномерных классических системах со степенным убыванием потенциала // Мат. сб. Т. 94. № 1. С. 16–48.
3. Гиббсовские состояния в решетчатой модели с взаимодействием на два шага // Функцион. анализ и его прил. Т. 8. № 3. С. 12–25 (совм. с В. М. Герциком).
4. Сильная выпуклость давления для решетчатых систем классической статистической физики // Теорет. и мат. физика. Т. 20. № 2. С. 223–234 (совм. с Б. С. Нахапетяном).

1975

1. Absence of Breakdown of Continuous Symmetry in Two-Dimensional Models of Statistical Physics // Comm. Math. Phys. V. 42. № 1. P. 31–40 (совм. с С. Б. Шлосманом).
2. Теоремы кодирования для классов произвольно изменяющихся во времени дискретных каналов без памяти // Пробл. передачи информ. Т. 11. № 2. С. 3–22 (совм. с С. З. Стамблером).
3. Фактор-меры на измеримых пространствах // Труды Московского математического общества. М.: Изд-во МГУ. Т. 32. С. 77–92 (совм. с Р. А. Минлосом).

1976

1. Исследование свойств обобщенных гауссовских случайных полей // Задачи механики и математической физики. М.: Наука. С. 117–165 (совм. с Р. А. Минлосом).
2. Асимптотическое исследование звездообразных сетей коммутации сообщений с большим числом радиальных лучей // Пробл. передачи информ. Т. 12. № 1. С. 70–94 (совм. с Ю. М. Суховым).
3. Theory of random fields // Proc. of the 1975 IEEE-USSR Joint Workshop on Inform. Theory. Moscow, URSS. N.Y.: IEEE Press. P. 39–49 (совм. с С. А. Пироговым).

1977

1. The Central Limit Theorem and the Problem of Equivalence of Ensembles // Comm. Math. Phys. V. 54. № 2. P. 173–192 (совм. с Б. Тироцци).
2. Nonequilibrium Dynamics of One-Dimensional Infinite Particle Systems with a Singular Interaction // Comm. Math. Phys. V. 55. № 3. P. 275–292 (совм. с И. Фритцем).
3. Nonequilibrium Dynamics of Two-Dimensional Infinite Particle Systems with a Singular Interaction // Comm. Math. Phys. V. 57. № 1. P. 67–81 (совм. с И. Фритцем).
4. Полиномы от линейных случайных функций // УМН. Т. 32. № 2. С. 67–122 (совм. с Р. А. Минлосом).
5. О нижней оценке для избыточности самокорректирующихся схем из ненадежных функциональных элементов // Пробл. передачи информ. Т. 13. № 1. С. 82–89 (совм. с С. И. Ортюковым).
6. Верхняя оценка для избыточности самокорректирующихся схем из ненадежных функциональных элементов // Пробл. передачи информ. Т. 13. № 3. С. 56–76 (совм. с С. И. Ортюковым).

1978

1. Автомодельность и ренорм-группа обобщенных случайных полей // Многокомпонентные случайные системы. М.: Наука. С. 179–213.
2. Несуществование одномерных и двумерных гиббсовских полей с некомпактной непрерывной группой симметрии // Многокомпонентные случайные системы. М.: Наука. С. 214–223 (совм. с С. Б. Шлосманом).
3. On the problem of the mathematical foundation of the Gibbs postulate in classical statistical mechanics // Lecture Notes in Physics. Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag. V. 80. P. 325–340 (совм. с Ю. М. Суховым).
4. Полиномы от обобщенного случайного поля и его моменты // Теория вероятностей и ее применения. Т. 23. № 4. С. 715–730 (совм. с Р. А. Минлосом).

1979

1. Gaussian and their Subordinated Self-Similar Random Generalized Fields // Ann. Prob. V. 7. № 1. P. 1–28.
2. Non-Central Limit Theorems for Nonlinear Functions of Gaussian Fields // Z. Wahrsch. Verw. Geb. V. 50. № 1. P. 27–52 (совм. с П. Майером).
3. Уравнение Власова // Функцион. анализ и его прил. Т. 13. № 2. С. 48–58.
4. Временна́я асимптотика для некоторых вырожденных моделей эволюции систем с бесконечным числом частиц // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ. Т. 14. С. 147–254 (совм. с Ю. М. Суховым).
5. On the Innovation Problem for Gaussian Markov Random Fields // Z. Wahrsch. Verw. Geb. V. 49. № 3. P. 275–291 (совм. с Д. Сургайлисом).
6. Асимптотический подход к исследованию сетей коммутации сообщений линейной структуры с большим числом узлов // Пробл. передачи информ. Т. 15. № 1. С. 61–73 (совм. с В. В. Преловым).
7. Локальные аддитивные функционалы от гауссовских обобщенных полей. УМН. Т. 34. № 5. С. 223–224 (совм. с М. Я. Кельбертом).

1980

1. Gaussian random fields – Gibbsian point of view // Multicomponent random systems. New York – Basel: Marcel Dekker. P. 119–152.
2. Mathematical problems in statistical mechanics // Sov. Sci. Rev. Sect. C. Math. Phys. Rev. Chur – New York: Harwood Acad. Publ. V. 1. P. 55–106 (совм. с Я. Г. Синаем).
3. Гидродинамика одномерных твердых стержней // УМН. Т. 35. № 5. С. 252–253 (совм. с К. Болдригини, Ю. М. Суховым).

1981

1. Uniqueness conditions for finitely dependent random fields // Random Fields. V. 1. Coll. Math. Soc. Janos Bolyai. Budapest: North-Holland. V. 27. P. 223–262 (совм. с Е. А. Печерским).
2. Phases Corresponding to Minima of the Local Energy // Selecta Math. Sov. V. 1. № 4. P. 317–338 (совм. с С. Б. Шлосманом).
3. On the Asymptotic Behavior of Some Self-Similar Random Fields // Selecta Math. Sov. V. 1. № 3. P. 265–291 (совм. с П. Майером).
4. Block Synchronization, Sliding-Block Coding, Invulnerable Sources and Zero Error Codes for Discrete Noisy Channels // Ann. Prob. V. 8. № 4. P. 639–674 (совм. с Р. М. Греем, Д. С. Орнштейном).

1982

1. A criterion of the uniqueness of Gibbsian fields in the non-compact case // Lecture Notes in Mathematics. Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag. V. 1021. P. 97–110 (совм. с Е. А. Печерским).
2. The Hydrodynamic Limit for Systems of Particles with Independent Evolution // Math. Nachr. V. 105. № 1. P. 199–224 (совм. с Р. Зигмундом-Шульце).
3. Гидродинамический предельный переход. Некоторые карикатуры // Взаимодействующие марковские процессы и их применение к математическому моделированию биологических систем. Пущино. С. 7–20.

1983

1. One-Dimensional Hard Rod Caricature of Hydrodynamics // J. Stat. Phys. V. 31. № 3. P. 577–615 (совм. с К. Болдригини, Ю. М. Суховым).
2. Локальные аддитивные функционалы от гауссовских случайных полей // Теория вероятностей и ее применения. Т. 28. № 1. С. 32–44 (совм. с М. Я. Кельбертом).

3. Стационарные локальные аддитивные функционалы от гауссовских случайных полей // Теория вероятностей и ее применения. Т. 28. № 3. С. 489–503 (совм. с М. Я. Кельбертом).

1985

1. Constructive criterion for the uniqueness of Gibbs field // Statistical Physics and Dynamical Systems. Rigorous Results. Progress in Physics. Boston – Basel – Stuttgart: Birkhauser. V. 10. P. 347–370 (совм. с С. Б. Шлосманом).
2. Completely analytical Gibbs fields // Statistical Physics and Dynamical Systems. Rigorous Results. Progress in Physics. Boston – Basel – Stuttgart: Birkhauser. V. 10. P. 371–404 (совм. с С. Б. Шлосманом).
3. Phase Diagram of the Two-Dimensional Ising Antiferromagnet // Comm. Math. Phys. V. 102. № 1. P. 81–103 (совм. с И. Колафой, С. Б. Шлосманом).
4. Условие линейной регулярности векторных случайных полей // Пробл. передачи информ. Т. 21. № 4. С. 76–82 (совм. с М. Г. Аветисяном).
5. The problem of translation invariance of Gibbs states at low temperature // Soviet Sci. Rev. Sect. C. Math. Phys. Rev. Chur – New York: Harwood Acad. Publ. V. 5. P. 53–195 (совм. с С. Б. Шлосманом).
6. Динамические системы статистической механики // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ. Т. 2. С. 235–284 (совм. с Я. Г. Синаем, Ю. М. Суховым).

1986

1. Phase diagrams for continuous-spin models. An extension of the Pirogov-Sinai theory // Math. Problems of Stat. Mech. and Dynam. Dordrecht – Boston – Lancaster – Tokyo: Reidel Publ. Corp. P. 1–124 (совм. с М. Заградником).
2. Единственность гиббсовского поля со случайным потенциалом – элементарный подход // Теория вероятностей и ее применения. Т. 31. № 4. С. 651–670 (совм. с Л. А. Бассалыго).
3. One-Dimensional Harmonic Lattice Caricature of Hydrodynamics // J. Stat. Phys. V. 43. № 3/4. P. 571–607 (совм. с А. Пеллегринотти, Ю. М. Суховым, Л. Триоло).

1987

1. Completely Analytical Interactions: Constructive Description // J. Stat. Phys. V. 46. № 5/6. P. 983–1014 (совм. с С. Б. Шлосманом).
2. Induction on volume and no cluster expansion // Proc. 8th Int. Congress on Math. Phys. Singapore: World Scientific. P. 73–91.
3. Эпсилон-энтропия гиббсовского поля // Пробл. передачи информ. Т. 23. № 1. С. 3–15 (совм. с Л. А. Бассалыго).
4. Теория информации (Комментарии и приложения к книге) // Колмогоров А. Н. Теория информации и теория алгоритмов. М.: Наука. С. 254–257.

1988

1. A New Approach to the Analysis of Gibbs Perturbations of Gaussian Fields // Selecta Math. Sov. V. 7. № 3. P. 221–277.
2. Нефинитные возмущения гиббсовских полей // Теорет. и мат. физика. Т. 74. № 1. С. 10–20 (совм. с М. Р. Мартиросяном).
3. Возможность высокотемпературных фазовых переходов, вызванных многочастичностью потенциала // Теорет. и мат. физика. Т. 75. № 2. С. 163–169 (совм. с М. Р. Мартиросяном).
4. А. Н. Колмогоров – основатель теории обратимых марковских процессов // УМН. Т. 43. № 6. С. 167–188 (совм. с И. Фритцем, Ю. М. Суховым).
5. One-Dimensional Harmonic Lattice Caricature of Hydrodynamics: Second Approximation // J. Stat. Phys. V. 52. № 1/2. P. 423–439 (совм. с А. Пеллегринотти, Ю. М. Суховым, Л. Триоло).

1989

1. Caricatures of hydrodynamics // Proc. 9th Int. Congress on Math. Phys. Bristol: Adam Higler. P. 117–132.
2. Equilibrium crystal shapes – a microscopic proof of the Wulff construction // Proc. of the 24th Karpacz Winter School, Stochastic Methods in Math. Phys. Singapore: World Scientific. P. 221–229 (совм. с Р. Котецким, С. Б. Шлосманом).

1990

1. Qualitative methods of queueing network theory // Stochastic cellular systems: ergodicity, memory, morphogenesis. Manchester: Univ. Press. P. 183–224 (совм. с М. А. Кельбертом, А. Н. Рыбко, Ю. М. Суховым).
2. One-Dimensional Harmonic Lattice Caricature of Hydrodynamics. The Higher Corrections // J. Stat. Phys. V. 61. № 1/2. P. 387–402 (совм. с А. Пеллегринотти, Ю. М. Суховым).

1991

1. Higher order hydrodynamic equations for a system of independent random walks // Random Walks, Brownian Motion and Interacting Particle Systems. A Festschrift in Honor of Frank Spitzer. Boston – Basel – Berlin: Birkhauser. P. 231–254 (совм. с Ф. Соколовским).

1992

1. Wulff construction: A global shape from local interaction. Providence: Amer. Math. Soc. (совм. с Р. Котецким, С. Б. Шлосманом).
2. Thermodynamic inequalities for the surface tension and the geometry of the Wulff construction // Ideas and Methods in Quantum and Statistical Physics. Cambridge: Univ. Press. V. 2. P. 461–483 (совм. с С. Б. Шлосманом).
3. Large deviations behavior of statistical mechanics models in the multiphase regime // Proc. Conf. Math. Physics. Leipzig, 1991. V. 10. P. 328–333 (совм. с С. Б. Шлосманом).

1993

1. A formula of full semiinvariants // Cellular automata and cooperation systems. Dodrecht – Boston – London: Kluwer Acad. Publ. P. 135–140.
2. On the way to the mathematical foundations of statistical mechanics // Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag. V. 1567. P. 1–37.
3. A statistical behavior of shapes of boundaries of phases // Phase Transitions: Mathematics, Physics, Biology,.... Singapore: World Scientific. P. 60–70.

1994

1. Fluctuations of shapes of large areas under paths of random walks: Preprint № 176. Vienna: ESI (совм. с О. О. Гринивым).
2. Large Deviations for Tandem Queueing Systems // J. Applied Math. and Stochastic Analysis. V. 7. № 3. P. 301–330 (совм. с Е. А. Печерским).
3. Estimates of semiinvariants for the Ising model at low temperatures: Preprint № 125. Vienna: ESI.
4. Large and moderate deviations in the Ising model // Probability contributions to statistical mechanics. Providence: Amer. Math. Soc. P. 91–219 (совм. с С. Б. Шлосманом).
5. On fluctuations of the phase boundaries in the 2D Ising ferromagnet: Preprint № 183. Vienna: ESI (совм. с О. О. Гринивым).
6. Process level large deviation for a class at piece-wise homogeneous random walks // The Dynkin Festschrift, Markov Processes and their Applications. Progress in Probability. Boston – Basel – Berlin: Birkhauser. V. 34. P. 1–60 (совм. с В. М. Блиновским).

1995

1. О флуктуациях формы Вульфа в двумерной модели Изинга // УМН. Т. 50. № 6. С. 177–178 (совм. с О. О. Гринивым).

1996

1. Система обслуживания с выбором наименьшей из двух очередей – асимптотический подход // Пробл. передачи информ. Т. 32. № 1. С. 20–34 (совм. с Н. Д. Введенской, Ф. И. Карпелевичем).