Новые модели динамики транспортных потоков

Лыков А.А.[1], Малышев В.А.[2], Меликян М.В.[3]

Исследуются условия устойчивости (отсутствия ДТП) одномерного потока машин, где движение каждой машины определяется только движением предыдущей.

1 Введение

Моделирование транспортных потоков, как компьютерное, так и теоретическое, — чрезвычайно популярная тема исследований. При этом под потоком можно понимать все, что угодно — от потоков вещества (жидкости) до потоков информации (сети связи), клиентов в системах массового обслуживания, финансовых потоков или транспорта по дорогам в буквальном смысле. Что же касается математических методов, все исследования, где явно присутствует динамика, можно разбить на три области:

1. Первая область имеет корни в теории массового обслуживания (ТМО) или теории очередей. Здесь естественным пространством для клиентов является граф сети, в вершинах которого они ожидают обслуживания. А их движение по сети, приход, переходы и уход определяются только случайными временами перехода (см., например [5, 1, 4, 13, 2, 14, 3]). Мы особенно выделяем эту область, так как в течение долгого времени ТМО являлась одной из центральных на кафедре, при этом основными руководителями были зав. кафедрой теории вероятностей Гнеденко Б.В., а также профессора Соловьев А.Д. и Беляев Ю.К. Постоянно проводились школы, конференции, общемосковские семинары, выпускались монографии и сборники [7, 8, 9, 6].

2. Гидродинамический подход, где поток рассматривается как сплошная среда [12], [17, 18, 16].

3. Поток моделируется процессом с локальным взаимодействием, где точки движутся по некоторому пространству (чаще всего это решетка), но совершают случайные скачки в случайные моменты времени [11], [5].

[1]Лыков Александр Андреевич, alekslyk@yandex.ru, научный сотрудник ЛБСС, кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[2]Малышев Вадим Александрович, 2malyshev@mail.ru, профессор кафедры теории вероятностей, главный научный сотрудник (зав. лаб.) ЛБСС, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[3]Меликян Маргарита Врежовна, magaarm@list.ru, студентка кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

Каждая из областей безусловно отражает некоторые качественные особенности реальных потоков, но тем не менее, видим мы на дороге реальные отдельные единицы потока, причем движущиеся скорее детерминировано, чем случайно. Более того, увеличивается тенденция к автоматизации управления каждым автомобилем (машины без водителя). Все это говорит о том, что необходимы разработка и исследование алгоритмов такого управления. Понятно, что хотя они могут быть самыми разными, но движение каждой машины может зависеть только от движения соседних машин (локальность взаимодействия). В данной статье мы исследуем один из простейших алгоритмов такого рода и показываем для каких значений параметров он является устойчивым, то есть гарантирует отсутствие столкновений на бесконечном интервале времени, а при каких нет.

Этой статьей (см. также [10]) мы начинаем исследование новых транспортных моделей с детерминированной динамикой точечных частиц. Заметим, что точечность частиц в этой работе несущественна, так как длины машин, даже случайные, легко включаются в расстояние d между соседними машинами, см. ниже.

2 Модель

Самая простая ситуация — это когда по однополосной дороге движется поток машин, например, без водителя, и на каждой из машин стоит прибор, который и регулирует движение машины в зависимости от движения машины непосредственно перед ней. Другой вариант — в каждой машине есть водитель — тогда на модель можно смотреть как на попытку моделировать психику стандартного водителя.

В произвольный момент времени $t \geq 0$ мы будем рассматривать произвольное, даже бесконечное, число точечных частиц на прямой, занумерованных следующим образом:

$$... < z_N(t) < ... < z_1(t) < z_0(t).$$

При этом предполагается, что начальная частица, с номером 0, движется направо, то есть с положительной скоростью $v_0(t)$, которая произвольна. Для устойчивости мы предположим ее ограниченной с отсутствием резких ускорений.

Если начальная машина движется “как хочет”, то движение других частиц, например, частицы $k = 1, 2...$, полностью определяется движением предыдущей машины $k-1$. Наша задача — организовать устойчивое движение этого потока машин, то есть чтобы машины не приближались слишком близко друг к другу, но в то же время чтобы соблюдалась необходимая средняя скорость и чтобы расстояние между машинами было минимальным.

Для этого мы используем два механизма. Во-первых, специальный прибор на машине k постоянно измеряет расстояние $r_k(t) = z_{k-1}(t) - z_k(t)$ до впереди идущей машины, с номером $k-1$, и стремится удерживать его на некотором безопасном расстоянии $d > 0$ (параметр, который мы фиксируем). Точнее, при отклонении этого расстояния от d некоторая сила F_k возвращает это расстояние к значению d.

Простейший вариант такой силы — линейная сила

$$F_k(t) = \omega^2(r_k(t) - d) = \omega^2(z_{k-1}(t) - z_k(t) - d),$$

которая ускоряет движение k-той машины, если расстояние $r_k(t)$ растет, и замедляет, если оно уменьшается.

Во-вторых, некая сила трения $-\alpha v_k(t)$ сдерживает рост скорости каждой машины. Как мы показываем, этот второй механизм чрезвычайно важен. Наш результат состоит в следующем. Во-первых, если $\alpha = 0$, то устойчивое движение невозможно. Если же, для данного ω, α достаточно велико, то на протяжении всего времени расстояние между машинами будет равномерно отделено от нуля. В то же время, для любого α найдется положительное ω такое, что машины столкнутся с течением времени.

Тогда имеет место следующая система уравнений

$$z_k^{''}(t) = \omega^2(z_{k-1}(t) - z_k(t) - d) - \alpha z_k^{'}(t),\ k = 1, 2, ... \tag{1}$$

Помимо функционального параметра $v_0(t)$, числовых параметров a и ω^2, необходимо задать начальные условия. Удобно их задать так:

$$z_k(0) = -kd, \quad z_k^{'}(0) = v$$

для некоторой постоянной $v \geq 0$.

Обозначим

$$x_k(t) = z_{k-1}(t) - z_k(t) - d,$$

тогда, ввиду

$$z_k^{''}(t) = \omega^2 x_k(t) - \alpha z_k^{'}(t) = \omega^2 x_k(t) - \alpha(-x_k^{'}(t) + z_{k-1}^{'}(t)),$$

$$z_k^{''}(t) = -x_k^{''}(t) + z_{k-1}^{''}(t),$$

система (1) принимает вид

$$x_k^{''}(t) + \alpha x_k^{'}(t) + \omega^2 x_k(t) = \omega^2 x_{k-1}(t),\ k = 1, 2, ... \tag{2}$$

$$x_k(0) = 0, \quad x_k^{'}(0) = 0$$

и где

$$x_0(t) = \frac{1}{\omega^2}(z_0^{''}(t) + \alpha z_0^{'}(t)).$$

3 Устойчивость

Теорема 1. *Пусть $|x_0(t)| \leq c$ для всех $t \geq 0$ и $\alpha \geq 2\omega > 0$. Тогда для всех k и всех $t \geq 0$ справедливо неравенство:*

$$|x_k(t)| \leq c$$

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию

$$X_k(t) = (x_k(t),\, x_k^{'}(t))^T.$$

Тогда систему (2) можно записать в виде:

$$X_k^{'}(t) = AX_k(t) + \omega^2 x_{k-1}(t)e_2,$$

где $e_2 = (0, 1)^T$ — стандартный орт, а матрица A определяется формулой:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

При нулевых начальных условиях решение имеет вид

$$X_k(t) = \omega^2 \int_0^t x_{k-1}(s) \exp(A(t-s))e_2 ds. \tag{3}$$

Нам понадобятся собственные числа матрицы A. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\alpha^2 > 4\omega^2$. Тогда корни уравнения

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \omega^2 = 0 \tag{4}$$

отрицательны, обозначим их λ_1, λ_2: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, и пусть $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ — соответствующие им собственные вектора. Тогда фундаментальная матрица решений имеет вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & \exp(\lambda_2 t) \\ \lambda_1 \exp(\lambda_1 t) & \lambda_2 \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix},$$

откуда

$$\exp(At) = \Phi(t) * \Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & \exp(\lambda_2 t) \\ \lambda_1 \exp(\lambda_1 t) & \lambda_2 \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

и

$$(\exp(At)e_2)_1 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\exp(\lambda_2 t) - \exp(\lambda_1 t)),$$

где $(\exp(At)e_2)_1$ обозначает первую компоненту соответствующего вектора. Откуда получаем:

$$x_k(t) = \frac{\omega^2}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t (\exp(\lambda_2(t-s)) - \exp(\lambda_1(t-s)))x_{k-1}(s)ds. \tag{5}$$

Докажем утверждение теоремы индукцией по k. Предположив, что утверждение верно для $k-1$, докажем его для k. Из (3), и используя $\lambda_1\lambda_2 = \omega^2$, имеем:

$$|x_k(t)| = \frac{\omega^2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left| \int_0^t (\exp(\lambda_2 s) - \exp(\lambda_1 s))x_{k-1}(t-s)ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{c\omega^2}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^{+\infty} (\exp(\lambda_2 s) - \exp(\lambda_1 s))ds = \frac{c\omega^2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = c.$$

2. Пусть $\alpha = 2\omega$. Тогда собственные значения матрицы совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega$. При $\lambda_2 \to \lambda_1$ получаем (из предыдущего пункта доказательства):

$$(\exp(At)e_2)_1 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\exp(\lambda_2 t) - \exp(\lambda_1 t)) \longrightarrow t\exp(-\omega t).$$

Откуда

$$x_k(t) = \omega^2 \int_0^t (t-s)\exp(-\omega(t-s))x_{k-1}(s)ds$$

и

$$|x_k(t)| = \omega^2 \left| \int_0^t (t-s)\exp(-\omega(t-s))x_{k-1}(s)ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{c\omega^2}{\omega^2}|\exp(-\omega t)(1+\omega t) - 1| \leq c.$$

$\square$

Рассмотрим теперь случай ненулевых начальных условий: $x_k(0) = a_k$, $k \in \mathbb{N}$, $\dot{x}_k(0) = b_k, k \in \mathbb{N}$, где $|a_k| \leq a$, $|b_k| \leq b$ для всех k и для некоторых неотрицательных чисел a, b.

Теорема 2. *Пусть $|x_0(t)| \le c$ для всех $t \ge 0$, а $\alpha > 2\omega$, $\gamma = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega^2}$, $C = \frac{\alpha a + 2b}{2\gamma}$. Тогда для всех k и для всех $t \ge 0$ справедливо неравенство:*

$$|x_k(t)| \le \max\{c,\, C\}.$$

Доказательство. Здесь для доказательства удобнее использовать другое представление решения. Так, если корни

$$\lambda_\pm = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega^2}$$

характеристического уравнения (4) различны, то общее решение имеет вид

$$x_k(t) = x_{k,+}(t) + x_{k,-}(t),$$

где

$$x_{k,\pm}(t) = C_{k,\pm} e^{\lambda_\pm t} + \omega^2 \frac{e^{\lambda_\pm t}}{Q'(\lambda_\pm)} \int_0^t e^{-\lambda_\pm t_1} x_{k-1}(t_1) dt_1 =$$

$$= C_{k,\pm} e^{\lambda_\pm t} + \omega^2 \frac{e^{\lambda_\pm t}}{2\lambda_\pm + \alpha} \int_0^t e^{-\lambda_\pm t_1} x_{k-1}(t_1) dt_1.$$

Используя начальные условия, находим

$$C_{k,\pm} = \frac{1}{2\gamma} \left(\left(\pm\frac{\alpha}{2} + \gamma \right) a_k \pm b_k \right).$$

Из $\lambda_+ > \lambda_-$ получаем следующую оценку:

$$|x_k(t)| \le |C_{k,+}| \exp(\lambda_+ t) + |C_{k,-}| \exp(\lambda_- t) + \sup_{s \ge 0} |x_{k-1}(s)| \frac{\omega^2}{2\gamma} \int_0^t |\exp(\lambda_+(t-t_1)) - \exp(\lambda_-(t-t_1))| dt_1$$

Положим $y_j = \sup_{s\ge 0} |x_j(s)|$ и получим для y_k рекуррентное соотношение.

Так как

$$|C_{k,\pm}| \le \frac{(\frac{\alpha}{2} \pm \gamma)a + b}{2\gamma},$$

то, делая замену: $t - t_1 = s$, получаем:

$$|x_k(t)| \le |C_{k,+}| \exp(\lambda_+ t) + |C_{k,-}| \exp(\lambda_- t) + \sup_{s \ge 0} |x_{k-1}(s)| \frac{\omega^2}{2\gamma} \int_0^t (\exp(\lambda_+ s) - \exp(\lambda_- s)) ds \le$$

$$\le \frac{1}{2\gamma} \left(\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma \right) a + b + y_{k-1}\lambda_- \right) \exp(\lambda_+ t) + \frac{1}{2\gamma} \left(\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma \right) a + b - y_{k-1}\lambda_+ \right) \exp(\lambda_- t) + y_{k-1}.$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Рассмотрим функцию*

$$f(t) = a \exp(\lambda_+ t) + b \exp(\lambda_- t) + c$$

для некоторых констант $b, c > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\lambda_- < \lambda_+ < 0$. Для всех $t \ge 0$ справедливо неравенство:

$$|f(t)| \le \max\{c,\, a + b + c\}.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. $a > 0$. В этом случае очевидно, что $\sup_{s\geq 0} |f(s)|$ достигается в точке 0 и равен $a+b+c$.
2. $a < 0$. Тогда множество t, при которых производная больше 0, описывается:

$$t > \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \ln\left(-\frac{a}{b}\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)$$

Точка $t_0 = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \ln(-\frac{a}{b}\frac{\lambda_+}{\lambda_-})$ - точка минимума. Если $t_0 < 0$, то $\sup_{s\geq 0} |f(s)|$ достигается в точке $+\infty$ и равен c. Если же $t_0 > 0$, то $\sup_{s\geq 0} |f(s)|$ достигается либо в точке 0, либо в точке $+\infty$. □

Далее применяя эту лемму к правой части неравенства для x_k выше, получаем оценку

$$y_k \leq \max\left\{y_{k-1}, \frac{\alpha a + 2b}{2\gamma}\right\},$$

из которой следует утверждение теоремы. □

4 Неустойчивость

Рассмотрим снова систему (2) с нулевыми начальными условиями

$$x_k(0) = \dot{x}_k(0) = 0, \ k = 1, 2, \ldots$$

где $\alpha > 0, \omega > 0$, для некоторой заданной функции $x_0(t)$. Неустойчивость проявит себя, когда k и t одновременно стремятся к бесконечности, причем так, что $t = \mu k, \ k \to \infty$ для некоторой константы $\mu > 0$.

Теорема 3. *Пусть $x_0(t) = v$ для всех $t \geqslant 0$. Для любого $\alpha > 0$ существует $\omega > 0$ и константы $q_\pm > 1$, $\mu_\pm > 0, c_\pm \neq 0$, такие, что*

$$x_k(t) \sim \frac{c_\pm}{\sqrt{k}} q_\pm^{\pm k}, \ \textit{при } t = \mu_\pm k, \ k \to \infty.$$

Поэтому каким бы ни было расстояние $d > 0$ между машинами, соседние машины могут как угодно сближаться и наоборот, цепочка может бесконечно растягиваться.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим преобразование Лапласа:

$$u_k(z) = \int_0^\infty e^{-zt} x_k(t) dt, \quad \mathrm{Re}(z) > 0, \ k = 0, 1, \ldots.$$

Система уравнений (2) с нулевыми начальными условиями эквивалентны следующему рекуррентному соотношению:

$$u_k(z) = \frac{\omega^2}{z^2 + \alpha z + \omega^2} u_{k-1}(z), \ k = 1, 2, \ldots.$$

или

$$u_k(z) = \left(\frac{\omega^2}{z^2 + \alpha z + \omega^2}\right)^k u_0(z).$$

Далее будем считать, что $\alpha < 2\omega$. При данном выборе α и ω корни характеристического уравнения являются комплексными числами с вещественной частью равной $-\frac{\alpha}{2}$. Поэтому функция $u_k(a+ib)$ абсолютно интегрируема по b на $\mathbb{R}^1$ при всех $a > -\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, для всех k и произвольных $t > 0$ справедлива классическая формула обращения:

$$x_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} u_k(z)e^{zt}dz,$$

для любого $a > -\frac{\alpha}{2}$. Для $t = \mu k$ перепишем последний интеграл:

$$x_k(\mu k) = F(\mu, k) = \frac{v}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{z}\exp\left(k(\mu z - \ln(z^2+\alpha z+\omega^2) + \ln\omega^2)\right)dz =$$

$$= \frac{v}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{z}\exp(kS(z))dz, \quad S(z) = \mu z - \ln(z^2+\alpha z+\omega^2) + \ln\omega^2. \tag{6}$$

При отображении $z^2+\alpha z+\omega^2$ прямая $a+ib,\ b\in\mathbb{R}$ переходит в параболу. Следовательно, можно выделить голоморфную ветвь логарифма на любой такой прямой при $a > -\frac{\alpha}{2}$ таким образом, чтобы:

$$\ln(z^2+\alpha z+\omega^2) = \ln|z^2+\alpha z+\omega^2| + i\arg(z^2+\alpha z+\omega^2).$$

Точки перевала определяются из уравнения

$$S'(z) = \mu - \frac{2z+\alpha}{z^2+\alpha z+\omega^2} = 0$$

или из следующего квадратного уравнения

$$\mu z^2 + (\alpha\mu - 2)z + \omega^2\mu - \alpha = 0, \tag{7}$$

для которого дискриминант

$$D = (\alpha\mu-2)^2 - 4\mu(\omega^2\mu-\alpha) = \alpha^2\mu^2 + 4 - 4\mu^2\omega^2 = -4\mu^2r^2 + 4, \quad r^2 = \omega^2 - \frac{\alpha^2}{4} > 0.$$

Будем считать, что $\mu < \frac{1}{r}$. Тогда $D > 0$ и имеем вещественную точку перевала (вообще говоря, их две, но вклад в интеграл будет давать только одна, которую мы и рассмотрим):

$$z = z(\mu) = \frac{2-\alpha\mu+\sqrt{D}}{2\mu} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2r^2}.$$

Проверим, что $z(\mu)$ является простой точкой перевала. Для этого вычислим вторую производную функции $S(z)$:

$$S''(z(\mu)) = -\frac{2}{z^2+\alpha z+\omega^2} + \frac{(2z+\alpha)^2}{(z^2+\alpha z+\omega^2)^2}\Big|_{z=z(\mu)} = -\frac{2\mu}{2z(\mu)+\alpha} + \mu^2 =$$

$$= -\frac{\mu}{\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2r^2}} + \mu^2 = \mu^2\left(\frac{\sqrt{1-\mu^2r^2}}{1+\sqrt{1-\mu^2r^2}}\right).$$

В силу того, что $\mu < \frac{1}{d}$, последнее выражение не обращается в нуль, поэтому $z(\mu)$ является простой точкой перевала. В формуле (6) положим $a = z(\mu)$. Тогда

$$F(\mu, k) = \frac{v}{2\pi i}\int_{z(\mu)-i\infty}^{z(\mu)+i\infty} \frac{1}{z}\exp(kS(z))dz.$$

Докажем, что прямая $z(\mu) + ib$, $b \in \mathbb{R}$ является перевальным контуром для $S(z)$. Для этого достаточно проверить два условия:

1) справедливость следующего соотношения:

$$\max_{y\in\mathbb{R}} \mathrm{Re}(S(z(\mu) + iy)) = \mathrm{Re}(S(z(\mu)); \tag{8}$$

2) в окрестности точки перевала $z(\mu)$ прямая проходит через два различных сектора, в которых $\mathrm{Re}(S(z)) < \mathrm{Re}(S(z(\mu))$.

Проверим вначале первое условие. Имеем равенства:

$$\mathrm{Re}(S(z(\mu) + iy)) = \mu z(\mu) - \frac{1}{2}\ln\left((z^2(\mu) - y^2 + \alpha z(\mu) + \omega^2)^2 + (2z(\mu)y + \alpha y)^2\right) + \ln\omega^2 =$$

$$= \mu z(\mu) + \ln\omega^2 - \frac{1}{2}\ln h(y^2), \quad h(s) = (z^2(\mu) - s + \alpha z(\mu) + \omega^2)^2 + s(2z(\mu) + \alpha)^2.$$

Для функции $h(s)$ имеем:

$$h(s) = s^2 + s\left((2z(\mu) + \alpha)^2 - 2(z^2(\mu) + \alpha z(\mu) + \omega^2)\right) + (z^2(\mu) + \alpha z(\mu) + \omega^2)^2.$$

Графиком функции $h(s)$ является парабола с вершиной в точке:

$$s_0 = -\frac{(2z(\mu) + \alpha)^2 - 2(z^2(\mu) + \alpha z(\mu) + \omega^2)}{2} = -\frac{(2z(\mu) + \alpha)^2 - 2\frac{(2z(\mu)+\alpha)}{\mu}}{2} =$$

$$= -(2z(\mu) + \alpha)(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 r^2} - \frac{1}{\mu}) = -(\frac{2}{\mu} + \frac{2}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 r^2})\frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 r^2}.$$

Из последней формулы видно, что

$$s_0 < 0.$$

Поэтому функция $h(s)$ достигает своего минимального значения на множестве $s \geqslant 0$ в точке $s = 0$. Значит, получаем:

$$\max_{y\in\mathbb{R}} \mathrm{Re}(S(z(\mu)+iy)) = \mu z(\mu)+\ln\omega^2 - \frac{1}{2}\ln\min_{s\geqslant 0} h(s) = \mu z(\mu)+\ln\omega^2 - \frac{1}{2}\ln h(0) = \mathrm{Re}(S(z(\mu)).$$

Таким образом, формула (8) доказана.

Для доказательства второго пункта достаточно проверить, что точка $z(\mu)$ является локальным минимумом функции $f(a) = \mathrm{Re}(S(a))$ при $a > 0$. Имеем равенство:

$$f(a) = \mathrm{Re}(S(a)) = \mu a - \ln\left(a^2 + \alpha a + \omega^2\right) + \ln\omega^2.$$

Для производной имеем формулу:

$$f'(a) = \mu - \frac{2a + \alpha}{a^2 + \alpha a + \omega^2} = \frac{\mu(a - z(\mu))(a - \tilde{z}(\mu))}{a^2 + \alpha a + \omega^2},$$

где $\tilde{z}(\mu)$ мы обозначили второй вещественный корень уравнения (7), причем, $\tilde{z}(\mu) < z(\mu)$. Следовательно, функция f убывает на интервале $(\tilde{z}(\mu), z(\mu))$ и возрастает на луче $(z(\mu), +\infty)$, и, значит, $z(\mu)$ является точкой локального минимума $f(a)$. Тем самым второй пункт доказан.

Таким образом, в силу теоремы 1.3 на с. 263 из [15] справедлива асимптотическая формула:

$$F(\mu, k) \sim ce^{kS(z(\mu))}, \text{ при } k \to \infty,$$

где константа c определяется по формуле:

$$c = \sqrt{\frac{1}{2\pi k S''(z(\mu))}\frac{v}{z(\mu)}}.$$

Покажем, что для некоторых $\omega > 0$ и $\mu < \frac{1}{d}$ величина $S(z(\mu))$ положительна. Имеем:

$$S(z(\mu)) = -\frac{\alpha\mu}{2} + 1 + \sqrt{1-\mu^2 r^2} - \ln\left(\frac{2z(\mu)+\alpha}{\mu}\right) + \ln\omega^2 =$$
$$= -\frac{\alpha\mu}{2} + 1 + \sqrt{1-\mu^2 r^2} - \ln(1+\sqrt{1-\mu^2 r^2}) + \ln(\mu^2\omega^2).$$

В точке $\mu = \frac{1}{r}$ справедливо равенство:

$$S\left(z\left(\frac{1}{r}\right)\right) = 1 - \frac{\alpha}{2r} + \ln\left(\frac{\omega^2}{r^2}\right) \to 1, \text{при } \omega \to \infty.$$

Следовательно, при достаточно больших ω имеет место неравенство $S(z(\frac{1}{r})) > 0$. Значит, в силу непрерывности функции $S(z(\mu))$ можно указать таким образом, $\mu = \mu_+$, чтобы величина $S(z(\mu))$ была положительной. Для нахождения μ_- достаточно заметить, что $S(z(\mu)) \to -\infty$ при $\mu \to 0$. Тем самым теорема полностью доказана. $\square$

Список литературы

[1] *Haight F.*, Mathematical theories of traffic flow. Elsevier, 1963.

[2] *Renyi A*, On two mathematical models of the traffic on a divided highway // Journal of Applied Probability, 1964, v. 1, p. 311–320.

[3] *Solomon H., Wang P.*, Nonhomogeneous Poisson fields of random lines with applications to traffic flow // Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. (Univ. of Calif. Press), 1972, v. 3, p. 383–400.

[4] *Kelly F.*, Reversibility and stochastic networks. N.-Y.: Wiley. 1979.

[5] *Caceres F., Ferrari P., Pechersky E.*, A slow-to-start traffic model related to a M/M/1 queue // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2007, P07008. Available at http://iopscience.iop.org/1742-5468/2007/07/P07008/fulltext/

[6] *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.*, Математические методы в теории надежности: Основные характеристики надежности и их статистический анализ. Изд. 2, испр. и доп. Либроком, 2013.

[7] *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.*, Введение в теорию массового обслуживания. 1966.

[8] Теория массового обслуживания / Труды семинара по вероятностным методам в технике. Изд-во МГУ. Москва, 1975.

[9] Теория массового обслуживания / Труды 2 Всесоюзного совещания-школы по теории массового обслуживания. Дилижан, 1970.

[10] *Лыков А.А., Малышев В.А., Удимов Д.*, Машины без водителя как нестандартные протоколы в транспортных сетях. Доклад на конференции “Транспортное моделирование” в Институте Генплана Москвы. Опубликован на сайте http://www.genplanmos.ru.

[11] *Blank M.*, Ergodic properties of a simple deterministic traffic flow model // J. Stat. Phys., 2003, v. 111, p. 903–930.

[12] *Lighthill M.J., Whitham G.B.*, On kinematic waves. II // Theory of traffic flow on long crowded roads. Proc. R. Soc. London, Se. A., 1955, v. 229, p. 281–345.

[13] *Malyshev V., Yakovlev A.*, Condensation in large closed Jackson networks // Ann. Appl. Prob., 1996, v. 6, № 1, p. 92–115.

[14] *Serfozo R.*, Introduction to stochastic networks. Springer, 1999.

[15] *Федорюк М.В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

[16] *Prigogine I., Herman R.*, Kinetic theory of vehicular traffic. N.Y.: Elsevier, 1971.

[17] *Helbing D.*, Verkehrsdynamik. Berlin: Springer, 1997.

[18] *Helbing D.*, Traffic and related self-driven many particle systems // Rev. Mod. Phys., 2001, v. 73, p. 1067–1141.