МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 34, № 3 (1983)

СЕМИИНВАРИАНТЫ НЕЛОКАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ГИББСОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

В. А. Малышев

Рассмотрим целочисленную решетку $\mathbf{Z}^\nu$ и стационарное случайное поле ξ_t, $t = (t^1, \ldots, t^\nu) \in \mathbf{Z}^\nu$ на ней, которое для простоты предполагаем вещественным. Пусть Ω — пространство конфигураций, т. е. функций на $\mathbf{Z}^\nu$ со значениями в $\mathbf{R}$. На Ω задана стандартная σ-алгебра Σ и случайное поле ξ_t тогда определяется мерой μ на (Ω, Σ). Пусть Σ_A — σ-подалгебра, порожденная случайными величинами ξ_t, $t \in A \subset \mathbf{Z}^\nu$; $\Sigma = \Sigma_{\mathbf{Z}^\nu}$. Функцию F на Ω называем локальной, если она измерима относительно Σ_A для некоторого конечного A. Остальные функционалы называются нелокальными.

Случайные поля, которые мы будем рассматривать, получаются так. Пусть сначала задано стационарное независимое поле ξ_t, определяемое мерой μ_0 на (Ω, Σ). Пусть, кроме того, для каждой пары (A, t), где $t \in A \subset \mathbf{Z}^\nu$, $|A| < \infty$, задана ограниченная снизу функция $U_{A,t}$ на Ω, измеримая относительно Σ_A. Мера μ будет строиться как предел в смысле конечномерных распределений мер μ_Λ с плотностью

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\mu_0} = Z_\Lambda^{-1} \exp\left(-\beta \sum_{(A,t):\ A\subset\Lambda} U_{A,t}\right), \qquad \beta > 0,$$

где $\Lambda \subset \mathbf{Z}^\nu$ — куб с центром в 0, $\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^\nu$,

$$Z_\Lambda = \langle \exp\left(-\beta \sum_{(A,t):A\subset\Lambda} U_{A,t}\right)\rangle_0,$$

$\langle\cdot\rangle_0$ — математическое ожидание по мере μ_0.

Мы получим в § 1, 2 кластерное разложение для предельной меры μ в случае, если β мало. В § 3 мы изучаем аналитическую зависимость μ от параметров и получаем (используя аналитическую технику [1]) сильные кластерные оценки семиинвариантов нелокальных функционалов по этой мере. В § 4 дается применение к исследованию трансфер-матрицы.

Трансфер-матрица впервые появилась в работах Онзагера и до сих пор используется как средство исследования вполне интегрируемых моделей. После появления эвклидова подхода стало понятно (см. ссылки в [2]), что спектр трансфер-матриц отражает строение и рассеяние частиц в решетчатой модели квантовой теории поля. С общей точки зрения изучение трансфер-матрицы начато в [3]. В этой работе введена важнейшая конструкция ортогонального базиса в физическом гильбертовом пространстве и дана идея о мультипликативном строении матричных элементов $\mathcal{T}$ в этом базисе. Первая точная формулировка этой идеи мультипликативности имеется в [4] вместе с доказательством кластерных оценок с основным ограничением одномерности слоя. Для произвольной размерности доказательство впервые получено в [2], где, однако, используются сложные комбинаторные построения. В § 4 мы показываем, как (в предположении ограниченности потенциала и элементов базиса) кластерные оценки трансфер-матрицы следует из теоремы 3 настоящей заметки.

§ 1. Кластерное представление статистической суммы. Обозначим

$$k_{A,t} = \exp(-\beta U_{A,t}) - 1, \quad \hat{k}_{A,t} = \sup |k_{A,t}|.$$

ТЕОРЕМА 1. *Если существует $\lambda = \lambda(\beta)$ такое, что $\lambda \to 0$ при $\beta \to 0$ и для всех n, всех достаточно малых $\beta > 0$ и для любого фиксированого t*

$$\sum_{(A,t):\, t\in A,\ |A|=n} \hat{k}_{A,t} \leqslant \lambda^n, \tag{1}$$

то конечномерные распределения мер μ_Λ сходятся при $\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^\nu$ к конечномерным распределениям некоторой вероятностной меры μ при $0 < |\beta| < \beta_0$ для некоторого $\beta_0 > 0$. Фактически вместо (1) *можно было бы записать*

$$\beta \sum_{(A,t):\, t\in A,\ |A|=n} \sup |U_{A,t}| \leqslant \lambda^n. \tag{1'}$$

Введем сначала следующее определение. Будем говорить, что статистическая сумма Z_Λ допускает кластерное представление с параметром кластерности $\varkappa$, если каждому $\Gamma \subset \mathbf{Z}^\nu$ сопоставлено число k_Γ такое, что для всех t и всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{\Gamma:\, t\in\Gamma\subset\mathbf{Z}^\nu,\, |\Gamma|=n} |k_\Gamma| \leqslant \varkappa^n \tag{2}$$

и для некоторого $c > 0$

$$Z_\Lambda = \sum k_{\Gamma_1} \ldots k_{\Gamma_n} c^{|\Lambda-(\Gamma_1\cup\ldots\cup\Gamma_n)|}, \tag{3}$$

где сумма по всем неупорядоченным наборам $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$, причем $\Gamma_i \subset \Lambda$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \phi$ при $i \neq j$. При этом требуется, чтобы $\varkappa c^{-1}$ было достаточно мало.

ЛЕММА 1. *В предположениях теоремы* 1 *статистическая сумма допускает кластерное представление, где* $c = 1$ *и* $\varkappa \to 0$ *при* $\beta \to 0$.

Доказательство. Обозначим для любой ограниченной функции ψ на Ω

$$k_\Gamma(\psi) = \sum_\zeta \left\langle \psi \prod_{(A,\,t)\in\zeta} k_{A,\,t} \right\rangle_0, \tag{4}$$

$$k_\Gamma \equiv k_\Gamma(1),$$

где сумма по всем неупорядоченным наборам попарно различных пар $\zeta = \{(A_1, t_1), \ldots, (A_n, t_n)\}$ таким, что набор $\{A_1, \ldots, A_n\}$ связен (см. [2]), $t_i \in A_i$ и

$$\tilde{\zeta} = \bigcup_{i=1}^n A_i = \Gamma.$$

Тогда (3) получается в точности как формула (4.4) в [2, стр. 11]: мы замечаем, что

$$Z_\Lambda = \prod (1 + k_{A,t}),$$

раскрываем скобки и объединяем в «связные» группы. Докажем выполнимость «кластерной оценки» (2). Заметим сначала, что

$$\sum_{\Gamma:\, 0\in\Gamma,\, |\Gamma|=n} |k_\Gamma| \leqslant \sum_{\zeta:\ 0\in\tilde{\zeta},\ \sum_{A\in\zeta} |A| \geqslant n} \prod_{(A,\,t)\in\zeta} \hat{k}_{A,\,t}. \tag{5}$$

Обозначим теперь через G_n сумму тех членов в ряду

$$\sum_{p=1}^\infty \Big(\sum_{0\in A} k_{A,\,0}\Big)^p = \sum_{p=1}^\infty \sum_{A_1} \ldots \sum_{A_p} k_{A_1,\,0} \ldots k_{A_p,\,0}, \tag{6}$$

для которых $|A_1| + \ldots + |A_p| \geqslant n$. Из (1) легко видеть, что

$$G_n \leqslant \sum_{p=1}^{n} 2^{p-1}\lambda^n + \sum_{p=n+1}^{\infty} \left(\sum_{0\in A} k_{A,0}\right)^p \leqslant \text{const}\ (2\lambda)^n.$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что правая часть (5) не превосходит $4^n G_n$. Для этого рассмотрим следующий алгоритм перебора всех членов правой части (5). На первом шаге выберем произвольную пару (A_1, t_1), $t_1 = 0 \in A_1$. Пометим некоторые точки A_1, отличные от t_1. На втором шаге выберем пару (A_2, t_2) так, что либо $t_2 = 0$, либо t_2 есть первая в лексикографическом порядке помеченная точка A_1. A_2 выберем произвольно, но так, чтобы $t_2 \in A_2$. Пометим некоторые точки $A_2 - A_1$. Пусть на k-ом шаге мы уже выбрали k пар $(A_1, t_1), \ldots, (A_k, t_k)$. На $(k+1)$-ом шаге выберем либо $t_{k+1} = t_k$, либо следующую в лексикографическом порядке из помеченных точек $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$; A_{k+1} выберем произвольно, $t_{k+1} \in A_{k+1}$. Каждому построенному таким способом члену $k_{A_1,t_1} \ldots k_{A_p,t_p}$ в правой части (5) поставим в соответствие член $k_{A_1-t_1,0} \ldots k_{A_p-t_p,0}$ ($A - t$ — сдвиг A на вектор $(-t)$) в правой части (6). Так как на каждом шаге есть только две возможности выбора точки и каждая точка может быть либо помечена либо нет, то каждый член $k_{B_1,0} \ldots k_{B_p,0}$ окажется сопоставленным не более чем 2^{p+n} членам правой части (5). Лемма доказана.

Приведем теперь обобщение теоремы 1, частным случаем которого является также теорема из [2, § 1.4.]

Ослабим условие (1), потребовав, чтобы существовало такое $d > 0$, что

$$\sum_{(A,\,t):\ t\in A,\ |A|=n,\ \mathrm{diam}\,A>d} \hat{k}_{A,\,t} \leqslant \lambda^n. \tag{7}$$

Потребуем, чтобы остальные $U_{A,t}$, т. е. с $\mathrm{diam}\,A \leqslant d$ были ограничены снизу и трансляционно-инвариантны, т. е. $U_{A+t',\,t+t'}$ получались сдвигом функции $U_{A,t}$ на вектор t'.

ТЕОРЕМА 2. *В этих условиях имеет место теорема* 1.

Как и в лемме 1 докажем существование кластерного представления статистической суммы.

Фиксируем a так, чтобы

$$\delta = \delta(a) = \max_{A:\ \mathrm{diam}\,A\leqslant d} \mu_0\left(\{U_{A,t} > a\}\right)$$

было достаточно мало.

Снова пользуемся определением k_Γ в (4). Рассмотрим приведенный выше алгоритм перебора членов правой части (5). Фиксируем $L \subset P = \{1, \ldots, p\}$ и рассмотрим те реализации $(A_1, t_1), \ldots, (A_p, t_p)$ нашего алгоритма, для которых $\operatorname{diam} A_i > d$ для $i \overline{\in} L$ и $\operatorname{diam} A_i \leqslant d$ для $i \in L$. Пусть $L' \subset L$; рассмотрим для фиксированной реализации событие

$$\Omega' = \Omega'(L, L'; (A_1, t_1), \ldots, (A_p, t_p))$$

состоящее в том, что $U_{A_i, t_i} \leqslant a$ для $i \in L'$, $U_{A_i, t_i} > a$, $i \in L - L'$. Мы оцениваем

$$|k_{A_i, t_i}| \leqslant \begin{cases} 1, & i \in L - L', \\ \text{const} \cdot \beta, & i \in L'. \end{cases}$$

Остальные множители оцениваем как раньше. Если $|L| \leqslant p/2$, то необходимая оценка уже есть.

Рассмотрим случай $|L| > p/2$. В случае $|L'| \geqslant p/4$ снова имеем необходимую оценку $(c\beta)^{p/4}$. Пусть теперь $|L - L'| \geqslant p/4$. Тогда можно выбрать $|L - L'|/d^{2\nu}$ множеств A_i, $i \in L - L'$, так, чтобы они попарно не пересекались. Тогда вероятность события Ω' может быть оценена как $\delta^{|L-L'|/d^{2\nu}}$, что дает необходимую оценку. Мы доказали, таким образом, лемму 1 и в этом более общем случае.

§ 2. Кластерное разложение. Доказательство теоремы 1 из кластерного представления статистической суммы дано фактически в [2, § 1.4] и мы ограничимся краткими замечаниями. Прежде всего, из кластерного представления Z_Λ следуют корреляционные уравнения: для любого $A \subset \Lambda$ и любой точки $t \in A$

$$Z_{\Lambda-(A-\{t\})} = cZ_{\Lambda-A} + \sum\nolimits_{\Gamma:\, \Gamma\cap A=\{t\}} k_\Gamma Z_{\Lambda-(\Gamma\cup A)}. \tag{8}$$

Напомним некоторые обозначения (см. [2, стр. 12]). Пусть $\mathscr{B}$ — множество всех конечных подмножеств $\mathbf{Z}^\nu$. В каждом $B \in \mathscr{B}$ выделим некоторую точку $t_B \in B$. Построим связное дерево, вершинами которого являются элементы $\mathscr{B}$. Проведем между двумя точками $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ ребро, если $B_1 = B_2 - \{t_{B_2}\}$ или наоборот. Вершина ϕ является самой нижней вершиной этого дерева. Для любой вершины $B \in \mathscr{B}$ точно $|B|$ вершин лежит ниже B.

Для любого $q = 1, 2, \ldots$, рассмотрим конечные последовательности пар

$$\gamma = [(B_1, \Gamma_1), \ldots, (B_q, \Gamma_q)],$$

$$B_i = B_i(\gamma),\ \Gamma_i = \Gamma_i(\gamma) \in \mathscr{B},$$

причем

1) для $p > 1$ B_p лежит ниже $B_{p-1} \bigcup \Gamma_{p-1}$ в $\mathscr{B}$;

2) для $p > 1$ $\Gamma_p \bigcap B_p = \{t_{Bp}\}$.

ЛЕММА 2. *Для любой локальной ограниченной функции* ψ_B

$$\begin{aligned}&\langle\psi_B\rangle_\Lambda = \langle\psi_B\rangle_0 + \sum\nolimits_\gamma^{(\Lambda)} a_\gamma,\\ &a_\gamma(\psi_B) \equiv a_\gamma = k_{\Gamma_1(\gamma)}(\psi_B)\cdot(-k_{\Gamma_2(\gamma)})\ldots(-k_{\Gamma_q(\gamma)})\end{aligned} \tag{9}$$

и суммирование по всем γ *с* $\operatorname{supp}\gamma \equiv \Gamma_1 \bigcup \ldots \bigcup \Gamma_q \subset \Lambda$, *удовлетворяющим условиям* 1) *и* 2), *а также условию* 3) $B_1(\gamma) = B$, $\Gamma_1(\gamma) \bigcap B \neq \phi$.

Доказательство см. [2, стр. 12—13].

ЛЕММА 3. *В условиях леммы* 2 $\langle\psi_B\rangle_\Lambda$ *стремится к*

$$\langle\psi_B\rangle = \sum\nolimits_\gamma a_\gamma, \tag{10}$$

где суммирование по тем же γ, *но с произвольным носителем. При этом ряд в правой части* (10) *сходится абсолютно для достаточно малых* β, $\beta > 0$.

Доказательство вполне аналогично доказательству такого же утверждения в [2, стр. 12—13].

Лемма 3 содержит теоремы 1 — 2, так как сходимость в (10), очевидно, равномерна по всем ψ_B с фиксированным носителем B. (Отсюда следует счетная аддитивность мер, определяющих предельные конечномерные распределения.) При этом имеют место кластерные оценки

$$\sum\nolimits_{\gamma:\,|\operatorname{supp}\gamma|=n} |a_\gamma| \leqslant C_1\cdot(C_2\varkappa)^n, \tag{11}$$

где C_1 зависит от ψ_B, а C_2 — абсолютная константа.

§ 3. Аналитичность и сильные кластерные оценки. Далее везде предполагаются выполненными условия теоремы 1.

ЛЕММА 4. *Пусть каждая* $U_{A,t}$ *зависит вещественно аналитически от конечного числа вещественных параметров* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *в области* $O \subset \mathbf{R}^n$. *Пусть существует аналитическое продолжение каждой* $U_{A,t}$ *по параметрам* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *в область* $\widetilde{O} \subset \mathbf{C}^n$, $\widetilde{O} \bigcap \mathbf{R}^n = O$, *причем* *в каждой точке $\tilde{O}$ выполняется оценка (1) или (1'). Тогда $\langle\psi_B\rangle$ вещественно аналитически зависит от $\beta_1, \ldots, \beta_n$ в области O и продолжается до комплексно аналитической функции этих параметров в области $\tilde{O}$.*

Мы воспользуемся следующим утверждением

ТЕОРЕМА ВИТАЛИ. *Пусть $f_n(z_1, \ldots, z_k)$ — последовательность аналитических в области $D \subset \mathbf{C}^n$ функций, причем*

1) $|f_n(z_1, \ldots, z_k)| \leqslant \mathrm{const}$ *равномерно по n в D,*

2) *f_n имеет предел на множестве $D_0 \subset D$, причем D_0 есть область единственности для D (т. е. две аналитические в D функции, равные на D_0, равны и на D).*

Тогда $f_n(z_1, \ldots, z_k)$ в любой точке D стремится к некоторой аналитической в D функции, причем сходимость равномерная на каждом компактном подмножестве D.

Для доказательства леммы достаточно взять в качестве f_n последовательность $\langle\psi_B\rangle_\Lambda$. Тогда условие 2 теоремы Витали следует из теоремы 1, а условие 1 из кластерных оценок (11).

Рассмотрим теперь дополнительно к $U_{A,t}$ функции $W_{A,t}$, удовлетворяющие тем же условиям: для любого t

$$\sum\nolimits_{(A,\, t):\, t\in A,\ |A|=n} \sup |W_{A,t}| \leqslant \lambda^n$$

для некоторого $\lambda > 0$, не зависящего от t и от n.

ЛЕММА 5. *При $|\lambda| < \lambda_0$ семиинвариант по мере μ от n_1 случайных величин $W_{t_1} = \sum_{A_1} W_{A_1,t_1}, \ldots, n_p$ случайных величин*

$$W_{t_p} = \sum\nolimits_{A_p} W_{A_p,\, t_p},$$

допускает оценку

$$|\langle W_{t_1}^{n_1}, \ldots, W_{t_p}^{n,\, n_p}\rangle| \leqslant C^{n_1+\ldots+n_p}\, n_1! \ldots n_p! \qquad (12)$$

для некоторой константы C, не зависящей от λ, t_i, n_i.

Доказательство. Введем функцию для $0 \leqslant a \leqslant 1$

$$f_\Lambda(a) = \ln \left\langle \exp\left(-a \sum\nolimits_{i=1}^{p} \beta_{t_i} W_{t_i}\right)\right\rangle_\Lambda.$$

Тогда

$$f_\Lambda(1) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}a}\,\mathrm{d}a = \int_0^1 \sum\nolimits_{i=1}^{p} \beta_{t_i} \langle W_{t_i}\rangle_\Lambda^{(a)}\,\mathrm{d}a, \qquad (13)$$

где $\langle\cdot\rangle_\Lambda^{(a)}$ означает среднее по мере $\mu_\Lambda^{(a)}$, определяемой плотностью

$$\frac{d\mu_\Lambda^{(a)}}{d\mu_0}=Z_{a,\Lambda}^{-1}\exp\Big(-\beta\sum\nolimits_{A\subset\Lambda}U_{A,t}-a\sum\beta_{t_i}W_{t_i}\Big).$$

В то же время

$$\langle W_{t_1}^{;n_1},\ldots,W_{t_p}^{;n_p}\rangle\equiv\lim_\Lambda\frac{\partial^{n_1}}{\partial\beta_{t_1}^{n_1}}\cdots\frac{\partial^{n_p}}{\partial\beta_{t_p}^{n_p}}f_\Lambda(1)\Bigg|_{\beta_{t_i}\equiv 0}=$$
$$=\int_0^1\left[\frac{\partial^{n_1}}{\partial\beta_{t_1}^{n_1}}\cdots\frac{\partial^{n_p}}{\partial\beta_{t_p}^{n_p}}\sum\nolimits_{i=1}^{p}\beta_{t_i}\langle W_{t_i}\rangle^{(a)}\right]da.\qquad(14)$$

По теореме 1 и лемме 4 правая часть (14) имеет предел и является аналитической функцией в поликруге $|\beta_{t_i}|<\beta^0$, где β^0 не зависит от n. Для доказательства леммы остается использовать неравенство Коши.

Рассмотрим теперь случай, когда

1) $U_{A,t}\equiv 0$ при $\operatorname{diam} A>R$ для некоторого R;

2) $|U_{A,t}|\leqslant\mathrm{const}$;

3) $W_{A,t}\leqslant\beta_1^{d_A}$, где d_A — наименьшая мощность такого связного набора $\Gamma=\{B_1,\ldots,B_p\}$, что

$$\operatorname{diam} B_i\leqslant d,\quad \tilde\Gamma\supset A.$$

ТЕОРЕМА 3. *В предположениях* 1) — 3) *при* $\beta\leqslant\beta_1$ *имеет место сильная кластерная оценка семиинвариантов*

$$|\langle W_{t_1}^{;n_1},\ldots,W_{t_p}^{;n_p}\rangle|\leqslant(C\beta)^{d\{t_1,\ldots,t_p\}}C^{n_1+\ldots+n_p}n_1!\ldots n_p!\qquad(15)$$

для некоторой константы $C>0$, *не зависящей от* β, n_i, t_i.

Доказательство. Дело сводится к случаю, когда

$$W_{A,t}=\beta_1^{d_A}\widetilde W_{A,t},\quad |\widetilde W_{A,t}|\leqslant\mathrm{const},$$

$\widetilde W$ не зависит от β. Но тогда по лемме 4 семиинвариант в левой части (15) является аналитической функцией β и β_1 и разлагается в ряд по β, β_1:

$$\langle W_{t_1}^{;n_1},\ldots,W_{t_p}^{;n_p}\rangle=\sum b_{n,m}\beta_1^n\beta^m.\qquad(16)$$

Докажем, что

$$b_{n, m} \equiv 0 \text{ при } m + n < d_{\{t_1, \ldots, t_p\}}.$$

Этот факт очевидно следует из явного вида $b_{n, m}$. Например, для $n_1 = \ldots = n_p = 1$ (16) равно

$$\sum_{A_1} \cdots \sum_{A_p} \sum_{t_1', \ldots, t_m'} \beta_1^{d_{A_1}} \cdots \beta_p^{d_{A_p}} \langle W_{A_1, t_1}, \ldots$$

$$\ldots, W_{A_p, t_p}, U_{t_1'}, \ldots, U_{t_m'} \rangle \beta^m.$$

Тогда при $\beta_1 = \beta$

$$\langle W_{t_1}^{; n_1}, \ldots, W_{t_p}^{; n_p} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \beta^n,$$

где $b_n = 0$ при $n < d_{\{t_1, \ldots, t_p\}}$. Но остальные b_n имеют оценку

$$| b_n | \leqslant \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|Z|=\beta_0} \frac{|\langle W_{t_1}^{; n_1}, \ldots, W_{t_p}^{; n_p} \rangle|}{z^{n+1}} dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant C^{n_1 + \ldots + n_p} n_1! \ldots n_p!,$$

откуда и следует теорема 3.

§ 4. Кластерные оценки трансфер-матрицы. Покажем, как из теоремы 3 следуют кластерные оценки трансфер-матрицы [2, стр. 42, теорема 1.1]. При этом мы обходим сложные комбинаторные методы в [2, глава II]. Заметим, однако, что в [2] не требуется ограниченности $U_{A, t}$ и $W_{A, t}$.

Пусть выполнены условия § 3.1 из [2] и, кроме того, Φ_A и $g^{(n)}$ равномерно ограничены. Тогда, как следует из леммы 2.2 [2], $f_x^{(n)}$ являются нелокальными функционалами, удовлетворяющими условиям теоремы 3 (т. е. мы считаем $W_{t_1} = f_{t_1}^{(n_1)}, \ldots, W_{t_p} = f_{t_p}^{(n_p)}$).

Тогда теорема 1.1 из [2, стр. 42] следует из доказанной здесь теоремы 3.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 5.V.1982

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Iagolnitzer D., Souillard B., On the analyticity in the potential in classical statistical mechanics, Comm. Math. Phys., 60, № 2 (1978), 131—152.

[2] Малышев В. А., Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической физики и квантовой теории поля, Успехи матем. наук, 35, № 2 (1980), 3—53.
[3] Минлос Р. А., Синай Я. Г., Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа, Теор. матем. физика, 2, № 2 (1970), 230—243.
[4] Абдулла-Заде Ф. Г., Минлос Р. А., Погосян С. К., Кластерные оценки для гиббсовских случайных полей и некоторые их применения, В кн.: Многокомпонентные случайные системы, М., «Наука», 1978, 5—30.