Д. Д. Ботвич, В. А. Малышев, Доказательство асимптотической полноты равномерно по числу частиц, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1990, том 54, выпуск 1, 132–145

УДК 517.98

Д. Д. БОТВИЧ, В. А. МАЛЫШЕВ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ПОЛНОТЫ РАВНОМЕРНО ПО ЧИСЛУ ЧАСТИЦ

Эта работа посвящена построению асимптотически полной теории рассеяния для некоторого класса самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве

$$\mathscr{H}=\mathscr{F}_a(L_2(R^\nu))\otimes L_2(R^\nu)$$

(см. ниже), коммутирующих с представлением группы сдвигов R^ν в $\mathscr{H}$.

В квантовой механике, статистической физике и квантовой теории поля вопрос об асимптотической полноте (включая отсутствие сингулярного спектра) есть завершающий структурный вопрос теории. Достаточно хорошо изучен этот вопрос для одной или двух квантовых частиц. Знаменитая работа Л. Д. Фаддеева [1] и ее дальнейшие уточнения во многом завершили рассмотрение трехчастичных систем. Многие технические аспекты n-частичных систем недостаточно хорошо поняты, несмотря на наличие красивых результатов [3].

Совсем другое положение в системах с бесконечным числом частиц. В случае основного состояния (т. е. ограниченного снизу спектра) существует теория рассеяния Хаага — Рюэлля и ее варианты, однако вопрос о полноте открыт. Евклидов подход, сменивший более ранний гамильтонов подход, позволил (в работах Глимма — Джаффе и их коллег [9]) доказывать полноту лишь на ограниченных участках спектра (до трехчастичного порога). Заметим здесь, что настоящая работа является возвращением к гамильтонову подходу. Существенно новая трудность — необходимость оценок, равномерных по числу частиц,— была причиной того, что до последнего времени не было ни одного примера (кроме тривиального случая невзаимодействующей системы) доказательства асимптотической полноты.

Первый такой пример [4] и его обобщения [6, 7, 8] дали решение ряда классических задач Фридрихса [11] и Хеппа [10] для случая, когда взаимодействие происходит лишь в ограниченной области пространства, а вне ее система свободна. Первый трансляционно инвариантный пример получен в [5], когда в системе есть выделенная частица, взаимодействующая с окружающими частицами, которые, однако, не взаимодействуют между собой. В случае конечного числа N частиц это соответствует оператору Шредингера

$$-\sum_{j=1}^{N}\Delta_{x_j}+\varepsilon\sum_{j=2}^{N}V(x_1-x_j).$$

В последнем случае асимптотическая полнота есть следствие теоремы Иорио — О'Кэррола [2] при $|\varepsilon|<\varepsilon_0(N)$, $\varepsilon_0(N)\to 0$ при $N\to\infty$. Заметим здесь же, что случай выделенной частицы в теореме Иорио — О'Кэррола лишь немногим проще общего случая. Мы получаем этот результат при $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, и ε_0 не зависит от N. В настоящей работе рассматриваются аналоги этого взаимодействия с несохранением числа частиц и усиливаются результаты [5] для случая, когда одночастичная динамика задается оператором Лапласа, причем мы получаем в определенном смысле неулучшаемые результаты. Заметим, однако, что в [5] одночастичная динамика может иметь довольно общий вид. Очень интересен открытый пока вопрос, будут ли и для более общей одночастичной динамики иметь место результаты настоящей статьи?

Наш метод заключается в доказательстве сходимости ряда теории возмущений для волновых операторов. Он может сходиться лишь в следующих условиях:

1) малости ε;

2) размерности $\nu\geqslant 3$, так как при $\nu=1, 2$ могут возникать связанные состояния;

3) в каждом виковском мономе есть хотя бы один оператор уничтожения, так как в противном случае необходима перенормировка массы (вакуума в рассматриваемом секторе нет).

Именно в этих условиях и доказывается асимптотическая полнота.

Основные результаты: теоремы 1 и 2 формулируются в § 1, теорема 3 — в § 6. Все встречающиеся абсолютные константы обозначаются, как правило, через C и зависят от ν и от гамильтониана.

§ 1. Формулировка теорем 1, 2

Рассмотрим гильбертово пространство

$$\mathscr{H}=\mathscr{F}_a(L_2(R^\nu))\otimes L_2(R^\nu),$$

где $\mathscr{F}_a=\mathscr{F}_a(L_2(R^\nu))$ — антисимметрическое фоковское пространство над $L_2(R^\nu)$, т. е. $\mathscr{H}$ есть пространство бесконечных последовательностей

$$(F_0(y),\ \ldots,\ F_n(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y),\ \ldots), \tag{1.1}$$

где x_j, $y\in R^\nu$ и функции F_n антисимметричны по x_j.

Операторы рождения и уничтожения $a^*(f)$, $a(g)$, f, $g\in L_2(R^\nu)$, удовлетворяют каноническим антикоммутационным соотношениям

$$a^*(f)a(g)+a(g)a^*(f)=(f,g)I,$$

где (f, g) — скалярное произведение в $L_2(R^\nu)$, которое мы считаем антилинейным по второму аргументу. В дальнейшем мы будем считать их действующими в $\mathscr{H}$, отождествляя $a^*(f)$ с $a^*(f)\otimes I$ и т. д.

Пусть заданы самосопряженные операторы h_1, h_2 в $L_2(R^\nu)$. Рассмотрим самосопряженный оператор

$$H_0=d\Gamma(h_1)\otimes 1+1_{\mathscr{H}}\otimes h_2,$$

где $d\Gamma(h)$ — функтор вторичного квантования [3]. В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда каждый из h_j равен $-\Delta+\mu\cdot I$, $\mu\in R$. Далее для краткости обозначений рассматривается случай $\mu=0$, т. е. $h_1=h_2=-\Delta$.

Мы будем рассматривать операторы вида

$$H=H_0+\varepsilon U,\quad U=\int\limits_{R^\nu} V_z dz,\quad \varepsilon\in R, \tag{1.2}$$

где оператор V принадлежит одному из классов операторов: $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$.

Пусть $f=a^*(\psi_r)\ldots a^*(\psi_1)\Omega\otimes\psi$, ψ_j, $\psi\in S(R^\nu)$, тогда $V\in\mathfrak{A}$ означает, что

$$Vf=\sum_{j=1}^{M}\int dx_{m_j+l_j}\ldots dx_1\,dy_1 K_j(x_{m_j+l_j},\ \ldots,\ x_1,\ y_1,\ y_2)\,a^*(x_{m_j+l_j})\ldots$$
$$\ldots a^*(x_{l_j+1})\,a(x_{l_j})\ldots a(x_1)\,a^*(\psi_r)\ldots a^*(\psi_1)\,\Omega\otimes\psi(y_1), \qquad (1.3)$$

т. е. по выделенной частице V есть интегральный оператор; если же $V\in\mathfrak{B}$, то

$$Vf=\sum_{j=1}^{M}\int dx_{m_j+l_j}\ldots dx_1 K_j(x_{m_j+l_j},\ \ldots,\ x_1,\ y)\,a^*(x_{m_j+l_j})\ldots$$
$$\ldots a^*(x_{l_j+1})\,a(x_{l_j})\ldots a(x_1)\,a^*(\psi_r)\ldots a^*(\psi_1)\,\Omega\otimes\psi(y), \qquad (1.4)$$

т. е. по выделенной частице V есть оператор умножения, где $M<\infty$, $K_j\in S(R^{\nu(l_j+m_j+2)})$, x_j, y_j, $y\in R^\nu$ в случае $\mathfrak{A}$, и аналогично в $\mathfrak{B}$; мы использовали операторнозначные обобщенные функции, определяемые равенствами

$$a^*(\tilde f)=\int a^*(k)\,\tilde f(k)\,dk;\quad a^*(f)=\int a^*(x)\,f(x)\,dx,$$
$$a(\tilde f)=\int a(k)\,\bar{\tilde f}(k)\,dk,\quad a(f)=\int a(x)\,f(x)\,dx, \qquad (1.5)$$
$$a^*(k)\,a(k')+a(k')\,a^*(k)=\delta(k-k'),\quad \tilde f(k)=\frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}}\int e^{-i(k,x)}f(x)\,dx.$$

Если T_z — представление группы пространственных сдвигов в $\mathscr{H}$, т. е.

$$T_z(F_0(y),\,F_1(x_1,\,y),\,\ldots)=(F_0(y-z),\,F_1(x_1-z,\,y-z),\,\ldots),$$

то V_z имеет вид (1.3) (для $\mathfrak{A}$) и вид (1.4) (для $\mathfrak{B}$) с ядром (например, в случае $\mathfrak{A}$)

$$K_j(x_{m_j+l_j}-z,\ \ldots,\ x_1-z,\ y_1-z,\ y_2-z).$$

Оператор V является ограниченным в $\mathscr{H}$ и мы считаем его самосопряженным. Тогда, если выполнены условия

$$m_j\geqslant 1,\quad l_j\geqslant 1,\quad m=\max_j m_j=\max_j l_j<\infty, \qquad (1.6)$$

то H является симметрическим оператором на всюду плотном подпространстве D в $\mathscr{H}$ векторов вида

$$a^*(\psi_r)\ldots a^*(\psi_1)\Omega\otimes\psi, \qquad (1.7)$$

где Ω есть вакуумный вектор в $\mathscr{F}_a(L_2(R^\nu))$, ψ_j, $\psi\in S(R^\nu)$.

В действительности известно, что H является, в существенном, самосопряженным оператором на R. Это следует из критерия Като, либо из критерия Нельсона. Это также будет следовать из сходимости полученных ниже разложений.

Определим обратные и прямые волновые операторы

$$W_t=\exp(-itH_0)\exp(itH),\quad \hat W_t=\exp(-itH)\exp(itH_0).$$

ТЕОРЕМА 1. *Если $\nu\geqslant 3$, выполнено условие* (1.6) *и V принадлежит $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$, то существует $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\nu,\ m,\ V)$ такое, что при $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ существуют сильные пределы прямых*

$$\hat W_\pm=s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty}\hat W_t$$

и обратных

$$W_{\pm} = s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} W_t$$

волновых операторов.

Замечание 1. Условия теоремы 1 в некотором смысле неулучшаемы. В размерности $\nu=1, 2$ даже для частиц во внешнем поле могут возникать связанные состояния для как угодно малых ε. При $m_{\min}=0$, где $m_{\min}=\min\limits_j m_j=\min\limits_j l_j$, согласно существующим представлениям требуется перенормировка массы. Условия на гладкость ядер K_j могут быть ослаблены, но это при существующем положении дел не является актуальным.

Стандартным следствием теоремы 1 является

Следствие 1. $W_+=\hat{W}_-^*$, $W_-=\hat{W}_+^*$ *унитарны и осуществляют унитарную эквивалентность* H *и* H_0, *т. е., например,* $H_0W_+=W_+H$.

§ 2. Ряды теории возмущений

Рассмотрим следующий ряд при $0\leqslant t<\infty$, $\Psi\in D$:

$$\Psi+\sum_{n=1}^{\infty}(i\varepsilon)^n\int\limits_{Q_t^n}U_{t_n}\ldots U_{t_1}\Psi dt_1\ldots dt_n, \tag{2.1}$$

где

$U_t=\exp(-itH_0)U\exp(itH_0)$, $\quad Q_t^n=\{(t_1,\ldots,t_n): t>t_n>\ldots>t_1>0\}\subset R^n$.

Основной результат, который мы докажем, состоит в следующем:

ТЕОРЕМА 2. *В условиях теоремы* 1 *существует* $\varepsilon_0>0$ *такое, что при* $|\varepsilon|<\varepsilon_0$:

1) *норма n-го члена ряда* (2.1) *оценивается сверху* $(\varepsilon C)^n C(\Psi)$, *где* C *не зависит от* n, ψ, t, ψ_j, *а* $C(\Psi)$ *не зависит от* n, t;

2) *n-ый член ряда* (2.1) *при* $t\to+\infty$ *имеет предел в топологии нормы.*

Из первого утверждения теоремы 2 стандартно следует, что ряд (2.1) равен $W_t\Psi$, а из второго, что существуют обратные волновые операторы $W_\pm$. Для $\hat{W}_\pm$ все аналогично, и поэтому теорема 1 следует из теоремы 2.

Замечание 2. При $\nu=1, 2$ аналитичность по ε не может быть доказана даже для прямых волновых операторов, однако их существование может быть легко доказано методом Кука без предположения о малости ε. Малость ε не требуется для существования прямых волновых операторов и при $\nu\geqslant 3$.

Мы докажем теорему 2 для взаимодействий V из класса $\mathfrak{A}$. Для класса $\mathfrak{B}$ доказательство аналогично: в формуле (3.2) (см. ниже) лишь несколько иначе выглядит функция $G_v(\overline{k_v})$. Причем сначала теорема 2 будет доказана для некоторого плотного подмножества в $\mathfrak{A}$, а затем распространена на все взаимодействия из $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим взаимодействия, которые в k-представлении имеют специальный вид

$$V=\sum_{j=1}^{M}V_j^{(1)}\otimes V_j^{(2)},$$
$$V_j^{(1)}=\int\prod_{p=1}^{m_j+l_j}f_{jp}(k_{jp})\,a^{\#}(k_{jp})\,dk_{jp}, \tag{2.2}$$

здесь $\# = *$ при $p = m_j + l_j, \ldots, l_j + 1$, порядок операторов рождения и уничтожения в произведении такой же, как в (1.4),

$$V_j^{(2)}\psi = (\psi, \bar{g}_j) f_j, \quad \psi \in L_2(R^\nu), \tag{2.3}$$

для некоторых $f_{jp}, f_j, g_j \in S(R^\nu)$.

Выпишем более подробно n-ый член ряда (2.1) для векторов вида (1.7):

$$\sum_\pi \int_{Q_t^n} dt_n \ldots dt_1 \int_{(R^\nu)^n} dz_n \ldots dz_1 \times$$

$$\times \int \prod_{v,p} f_{\pi(v),p}(k_{vp})\, a^\#(k_{vp}) \exp\{\pm(it_v h_1(k_{vp}) \pm i(z_v, k_{vp}))\}\, dk_{vp}\, a^*(\psi_r) \ldots$$

$$\ldots a^*(\psi_1)\Omega \otimes \int \prod_{v=1}^n \exp\{i(t_{v-1} - t_v) h_2(k_v) + i(z_{v-1} - z_v, k_v)\} \times$$

$$\times f_{\pi(v-1)}(k_v)\, g_{\pi(v)}(k_v)\, dk_v \exp\{-it_n h_2(k_{n+1}) - i(z_n, k_{n+1})\} f_{\pi(n)}(k_{n+1}), \tag{2.4}$$

где π — произвольная функция π: $(1, \ldots, n) \to (1, \ldots, M)$, $\psi_0 = z_0 = 0$, $f_{\pi(0)} = \psi$. Знак $\pm$ зависит от того, соответствует ли переменная k_{vp} оператору рождения или уничтожения (в первом случае «+», во втором — «—»).

Далее мы будем делать оценки равномерно по π, поэтому для краткости обозначений положим $\pi(v) \equiv v$. Проинтегрируем по пространственным переменным $z_1, \ldots, z_n$, а затем избавимся от возникших δ-функций интегрированием по переменным $k_1, \ldots, k_n$, «относящимся к частице». Несложные выкладки приводят (2.4) к виду (обозначаем $G_v = f_{\pi(v-1)} g_{\pi(v)}$)

$$\int_{Q_t^n} dt_n \ldots dt_1 \int \prod_{v,p} f_{v,p}(k_{vp})\, a^\#(k_{vp}) \exp\{\pm it_v h_1(k_{vp})\}\, dk_{vp} \times$$

$$\times \int \prod_{v=1}^n \exp\{i(t_{v-1} - t_v) h_2(k_v)\}\, G_v(k_v)\, \delta\left(\sum_p (\pm k_{vp}) + k_v - k_{v+1}\right) dk_v a^*(\psi_r) \ldots$$

$$\ldots a^*(\psi_1)\Omega \otimes \exp\{-it_n h_2(k_{n+1})\} f_n(k_{n+1}) =$$

$$= \int_{Q_t^n} dt_n \ldots dt_1 \int \prod_{v,p} f_{v,p}(k_{vp})\, a^\#(k_{vp}) \exp\{\pm it_v h_1(k_{vp})\}\, dk_{vp} \times$$

$$\times \int \prod_{v=1}^n \exp\{i(t_{v-1} - t_v) h_2(\bar{k}_v)\}\, G_v(\bar{k}_v)\, a^*(\psi_r) \ldots$$

$$\ldots a^*(\psi_1)\Omega \otimes \exp\{-it_n h_2(k_{n+1})\} f_n(k_{n+1}), \tag{2.5}$$

где

$$\bar{k}_v = -\sum_{v'=v}^n \sum_p (\pm k_{vp}) + k_{n+1}$$

и знак $\pm$ определяется аналогично (2.4).

§ 3. Разложение по пересуммированным диаграммам

Подынтегральное выражение в правой части формулы (2.5) имеет конечную норму, однако нам надо еще выполнить интегрирование по времени в бесконечном интервале. Для того чтобы получить необходимое убывание по времени, заметим, что последнее произведение $\prod_{v,p}$ в правой части (2.5) есть произведение виковских мономов и их можно разложить в сумму виковских мономов, нумеруемых диаграммами Фридрихса [5]. Каждая диаграмма, как хорошо известно, имеет необходимое убывание по переменным t_j, но число диаграмм имеет факториальный рост по n. Поэтому необходимо их взаимное сокращение. Мы используем другое разложение, но, конечно, эквивалентное некоторому частичному обратному суммированию диаграмм.

Для этого выделим в каждой вершине v крайний справа оператор рождения $a(k_{v1})$ и будем, пользуясь антикоммутационными соотношениями

$$a(k_{v1})\,a^*(k_{v'j}) = -a^*(k_{v'j})\,a(k_{v1}) + \delta(k_{v1} - k_{v'j}), \tag{3.1}$$

переносить его вправо к вакуумному вектору Ω.

При каждой такой перестановке возникает один из двух членов в правой части (3.1). Если возник первый член, мы продолжаем перенос, если возникла δ-функция, т. е. спаривание, то скажем, что возникла линия $(v1, v'j)$ диаграммы. Таким образом у нас возникнет ровно n линий $(v1, v'(v)j(v))$, $v=1, \ldots, n$. При этом если спаривание возникло с оператором рождения, относящимся к вектору

$$a^*(\psi_r)\ldots a^*(\psi_1)\,\Omega = \int \prod a^*(k_{vj})\,\psi_j(k_{vj})\,dk_{vj}\Omega,$$

мы скажем, что $v'(v)=0$. При этом, конечно, все пары $(v'(v), j(v))$ попарно различны.

При этом после этих операций в формуле (2.4) исчезнут соответствующие операторы рождения — уничтожения $a(k_{v1})$, $a^*(k_{v'(v)j(v)})$, но под интегралом появится

$$\sum_{\{(v'(v),\, j(v))\}} \prod_{v=1}^{n} \delta(k_{v1} - k_{v'(v)j(v)}),$$

где сумма берется по всем наборам попарно различных пар таких, что $v'(v)<v$. Эту сумму мы вынесем за знак интеграла и проинтегрируем по всем переменным $k_{v'(v)j(v)}$, $v=1, \ldots, n$. При этом все δ-функции исчезнут, и если положить

$$F = \prod_{v=1}^{n} f_{v1}(k_{v1})\, f_{v'(v)j(v)}(k_{v1})\, G_v(\bar{k}_v),$$

подынтегральное выражение примет вид

$$F \prod_v{}' \left(f_{vp}(k_{vp}) \exp\{\pm i t h_1(k_{vp})\}\, a^{\#}(k_{vp})\right) \times$$
$$\times \exp\left\{-i \sum_{v=1}^{n} (-t_{v-1} + t_v)\, h_2(\bar{k}_v)\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-i \sum_{v=1}^{n} (t_v - t_{v'(v)})\, h_1(k_{v1})\right\} \Omega \otimes \exp\{-i t_n h_2(k_{n+1})\}\, f_n(k_{n+1}),$$

где в $\bar{k}_v$ все $k_{v'(v)j(v)}$ заменены на k_{v1}, $\prod\limits_v{}'$ означает, что отсутствуют множители, соответствующие $v1$ и $(v'(v)j(v))$; $f_{0p}=\psi_p$, $p=1, \ldots, r$.

Рассмотрим граф G с вершинами $n, n-1, \ldots, 1, 0$ и ребрами (линиями) $(v, v'(v))$. Заметим, что по построению этот граф связный.

§ 4. Оценки по методу стационарной фазы и суммирование диаграмм

Выделим в (3.2) интеграл

$$\int F \exp\left(-i\sum_{v=1}^{n}[(t_v-t_{v-1})(\overline{k}_v)^2+(t_v-t_{v'(v)})k_{v1}^2]\right)\times$$
$$\times\prod_{v=1}^{n} dk_{v1}=\int F_1\exp\left[-\frac{1}{2}(B\vec{k},\vec{k})+i(\vec{a},\vec{k})\right]d\vec{k}, \tag{4.1}$$

где $\vec{k}=(k_{11},\ \ldots,\ k_{n1})$, $\vec{a}$ — вектор линейных комбинаций k_{vj}, $j\neq 1$, получающийся из раскрытия скобок в $(\overline{k}_v)^2$.

Положим

$$\begin{gathered}-\frac{1}{2}(B\vec{k},\vec{k})=-\left[\sum_{v=1}^{n}(t_v-t_{v-1})(\overline{k}_v^{(1)})^2+\sum_{v=1}^{n}(1+t_v-t_{v'(v)})k_{v1}^2\right]-\\ -\frac{1}{2}(B_1\vec{k},\ \vec{k})-\frac{1}{2}(B_2\vec{k},\ \vec{k}),\\ F_1=F\exp\left(i\sum_{v=1}^{n}(t_{v-1}-t_v)(\overline{k}_v^{(2)})^2+i\sum_{v=1}^{n}k_{v1}^2\right),\end{gathered} \tag{4.2}$$

где $\overline{k}_v^{(1)}=\overline{k}_v$ и все переменные, отличные от $k_{11},\ \ldots,\ k_{n1}$, положены равными нулю; $k_v^{(2)}=k_v-\overline{k}_v^{(1)}$.

С помощью преобразования Фурье по переменным $(k_{11},\ \ldots,\ k_{n1})$ выражение (4.1) приводится к виду

$$\frac{1}{(2\pi i)^{n\nu/2}\sqrt{\det B}}\int\exp\left(i\frac{1}{2}(B^{-1}\vec{x},\ \vec{x})\right)\widetilde{F}_1(\vec{x}-\vec{a})\,d\vec{x}, \tag{4.3}$$

где $\vec{x}=(x_{11},\ \ldots,\ x_{n1})$.

Заметим, что (4.3) является функцией от параметров k_{vp}, где $p\neq 1$ и $(v,p)\neq(v'(v),\ j(v))$.

Для оценки (4.3) используем следующие два утверждения.

Утверждение 1. *Так как матрицы $B_1\geqslant 0$, $B_2\geqslant 0$, то*

$$(\det B)^{-1}\leqslant(\det B_2)^{-1}=\prod_{v=1}^{n}\frac{1}{(|t_v-t_{v'(v)}|+1)^{\nu}}.$$

Утверждение 2. *Интеграл в (4.3), являющийся функцией от переменных k_{vp} таких, что $p\neq 1$, $(v,\ p)\neq(v'(v),\ j(v))$, принадлежит одновременно пространствам $S(R^{\nu N})$ и $L_2(R^{\nu N})$, где N — число переменных, причем его норма $\|\cdot\|_2$ ограничена выражением C^nC_Ψ равномерно по $\{t_v\}$, где $C>0$ — некоторая константа, независящая от n, ψ, ψ_j.*

Доказательство. Положим теперь

$$f_1=\prod_{v=1}^{n}f_{v1}(k_{v1})\exp(-ik_{v1}^2),\qquad f_4=\prod_{v=1}^{n}G_v(\overline{k}_v),$$
$$f_2=\prod_{v}{}' f_{v'(v)j(v)}(k_{v1}),\qquad f_3=\prod_{v}{}''\psi_{j(v)}(\boldsymbol{k}_{v1}),$$

где $\prod_v{}'$ — произведение по всем v, которые «спариваются» не с нулевой вершиной, $\prod_v{}''$ — произведение по тем вершинам, которые «спариваются» с нулевой вершиной. Тогда

$$F_1 = f_1 f_2 f_3 f_4 \exp\left(i \sum_{v=1}^{n} (t_{v-1} - t_v)\,(\overline{k}_v^{(2)})\right)^2,$$

$$\left|\int \exp\left[i\,\frac{1}{2}(B^{-1}\vec{x}, \vec{x})\right] \widetilde{F}_1(\vec{x} - \vec{a})\, d\vec{x}\right| \leqslant \|\widetilde{F}_1\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \|(\widetilde{f_1 f_2 f_3 f_4})\|_1 \underset{(1)}{=} \|\widetilde{f}_1 * (\widetilde{f_2 f_3}) * \widetilde{f}_4\|_1 \underset{(2)}{\leqslant}$$

$$\underset{(2)}{\leqslant} \|\widetilde{f}_1\|_1 \,\|(\widetilde{f_2 f_3})\|_1 \,\|\widetilde{f}_4\|_1, \tag{4.4}$$

где в (1) мы представили преобразование Фурье от произведения функций в виде свертки, а в (2) воспользовались неравенством Юнга. Оценим равномерно по $\{\overline{k}_v^{(2)}, v=1, \ldots, n\}$ норму каждого сомножителя:

$$\|\widetilde{f}_1\| = \prod_{v=1}^{n} \|(\widetilde{f_{v1}(k_{v1}) \exp(ik_{v1}^2)})\|_1,$$

$$\|(\widetilde{f_2 f_3})\|_1 = \prod_v{}' \|\widetilde{f}_{v'(v) j(v)}\|_1 \prod_v{}'' \|\psi_{j(v)}\|,$$

$$\|\widetilde{f}_4\| = \frac{1}{(2\pi)^{n\nu/2}} \int \left| \int \exp\left(-i \sum_{v=1}^{n} (x_v, k_v)\right) G_v(\overline{k}_v) \prod_{v=1}^{n} dk_{v1} \right| \prod_{v=1}^{n} dx_v =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n\nu/2}} \int \left| \int \exp(-i(x, D^{-1}\overline{k}))\, f_4(\overline{k}) \prod_{v=1}^{n} d\overline{k}_{v1} (\det(D^{-1})) \right| \times$$

$$\times \prod_{v=1}^{n} dx_v = \frac{1}{(2\pi)^{n\nu/2}} \int |\widetilde{f}_4((D^{-1})^* x)(\det(D^{-1}))| \prod_{v=1}^{n} dx_v =$$

$$= \left(\prod_{v=1}^{n} \int |\widetilde{G}_v(x_v)|\, dx_v\right) (\det(D^{-1}))(\det(D)^*) =$$

$$= \prod_{v=1}^{n} \|\widetilde{G}_v\|_1 \leqslant \left(\prod_{v=1}^{n} \|\widetilde{f}_v\|_1\right)\left(\prod_{v=1}^{n} \|\widetilde{g}_v\|_1\right), \tag{4.5}$$

где D — матрица с постоянными коэффициентами такая, что $k = D\overline{k}$, где $\overline{k} = (\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n)$, $k = (k_{11}, \ldots, k_{n1})$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$, $\overline{x} = (D^{-1})^* x$.

Так как D — треугольная матрица с единицами на диагонали, то из (4.5) получаем оценку

$$\|(\widetilde{f_1 f_2 f_3 f_4})\| \leqslant (C_f)^{4n} C_\Psi,$$

где

$$C_f = \max_{v,p} \{\|f_{vp}\|_2,\ \|\widetilde{f}_{vp}\|_1,\ \|(f_{v1} \exp(ik_{v1}^2))\|_1\} > 1,$$

$$C_\Psi = \max_{v,p} \{\|\psi_p\|_2,\ \|\widetilde{\psi}_p\|_1\} > 1.$$

Воспользовавшись тем, что для любой функции $Q \in L_2$ имеет место оценка

$$\left\| \int Q(y_1, \ldots, y_N)\, a^\#(y_1) \ldots a^\#(y_N)\, dy_1 \ldots dy_N \right\| \leqslant \|Q\|_2,$$

получаем утверждение 2 при $C = (C_f)^{2m+2}$.

Из утверждений 1, 2 следует, что n-ый член ряда оценивается как

$$C^n \left(\sum_{\{(v'(v), j(v))\}} \prod_{v=1}^{n} \frac{1}{(|t_v - t_{v'(v)}| + 1)^{\nu/2}} \right). \tag{4.6}$$

Для оценки суммарного вклада всех диаграмм воспользуемся следующей леммой [4].

ЛЕММА. *При $\nu \geqslant 3$ имеет место следующая оценка*:

$$\int\limits_{Q_t^n} \sum_{\{(v'(v), j(v))\}} \prod_{v=1}^{n} \frac{1}{(|t_v - t_{v'(v)}| + 1)^{\nu/2}} \leqslant$$

$$\leqslant ((8m)^{2m})^n r! \left(\int\limits_R \frac{dt}{(1+|t|)^{\nu/2}} \right)^n, \qquad (4.7)$$

где сумма берется по всем наборам $v'(v) < v$.

Очевидно, что из оценок (4.6) и (4.7) следует теорема 2.

Доказательство леммы. Доказательство оценки (4.6) аналогично доказательству оценки (4.1) работы [4], где она доказана для случая $m_{\min} = 2 = m$, $r = 1$. Мы приведем его для полноты изложения.

Рассмотрим римановы суммы обеих частей неравенства (4.7) и докажем, что это неравенство верно при любом $d > 0$ для римановых сумм, где d есть шаг аппроксимации

$$d^n \sum_{0 < t_1 < \ldots < t_n} \left(\sum_{\{v'(v)\}} \prod_{v=1}^{n} \frac{1}{(|t_v - t_{v'(v)}| + 1)^{\nu/2}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant ((8m)^{2m})^n \, r! \, d^n \left(\sum_{s \neq 0} \frac{1}{(1+|s|)^{\nu/2}} \right)^n =$$

$$= ((8m)^{2m})^n \, r! \, d^n \left(\sum_{s_1 \neq 0} \ldots \sum_{s_n \neq 0} \frac{1}{(1+|s_1|)^{\nu/2}} \ldots \frac{1}{(1+|s_n|)^{\nu/2}} \right). \qquad (4.8)$$

Суммы в неравенстве (4.7) берутся по всем t_i, $s_i \in Z_d$, где Z_d — одномерная решетка с шагом $d > 0$.

Покажем с помощью некоторого алгоритма, что любому набору $(s_1, \ldots, s_n)$, $s_i \neq 0$, из суммы в правой части неравенства (4.8) можно отнести не более $((8m)^{2m})^n r!$ возможных диаграмм из левой части с вкладом

$$\frac{1}{(1+|s_1|)^{\nu/2}} \ldots \frac{1}{(1+|s_n|)^{\nu/2}}.$$

Алгоритм будет состоять не более чем из $2mn$ шагов. Мы будем нумеровать шаги $(1, 1), \ldots, (1, 2m), \ldots, (n, 1), \ldots, (n, 2m)$. На шаге $(1, 1)$ мы возьмем s_1 и построим ребро из первой вершины в 0. Мы построили вершины 1, 0 и ребро между ними. Далее действуем по индукции. Пусть линии длины $s_1, \ldots, s_q$ построены и следующий шаг — (i, j). Далее действуем по правилам.

Правила алгоритма будут следующие:

1. На каждом шаге мы строим либо одно ребро, либо не строим ни одного ребра и, соответственно, одну или ни одной вершины.

2. Если на шаге (i, j) мы решаем не строить ребро, то на следующих шагах (i, j'), $j' > j$, мы также не строим ребер.

3. На шаге $(i, 1)$ мы выбираем одну из построенных уже вершин v_i и на следующих шагах $(i, 2), \ldots, (i, 2m)$ мы можем строить ребра только из вершины v. При этом мы будем называть вершину v_i «использованной» на шаге $(i, 1)$.

4. Выбор вершины v_i определяется однозначно с помощью следующего правила: v_i — первая (с наименьшим номером) из уже построенных

вершин, но «неиспользованных» на предыдущих шагах, исключая нулевую вершину; если все построенные вершины являются «использованными», то выбирается непостроенная вершина с наименьшим номером, исключая нулевую вершину.

5. Алгоритм останавливается или на шаге $(n, 2m)$, или если нет неиспользованных вершин, или все n ребер построены, т. е. все $s_1, \ldots, s_n$ исчерпаны.

Очевидно, что каждая диаграмма G будет построена алгоритмом и каждый набор $s_1, \ldots, s_n$ будет использован не более чем $r!(2^{2m}\cdot 2^{2m}(2m)!)^n < ((8m)^{2m})^n r!$ раз, так как на шагах $(i, 1), \ldots, (i, 2m)$ при каждом $(i, 1), \ldots, (i, 2m)$ алгоритм имеет следующие разветвления:

а) ребро ведется либо вправо, либо влево;

б) в v_i-ой вершине на этих шагах строится не более $2m$ ребер;

в) если ребро ведется вправо, то мы можем либо попасть в нулевую вершину, либо нет.

При $d\to 0$ из неравенства (4.8) следует неравенство (4.7). Лемма доказана.

Из леммы и оценки (4.6) следует доказательство теоремы 2.

§ 5. Взаимодействия общего вида

Чтобы доказать теорему 1 для взаимодействий общего вида, достаточно доказать утверждение 2. Для этого достаточно доказательства оценки (4.4).

Пусть сначала преобразования Фурье ядер K_i (в случае $\mathfrak{A}$)

$$\hat{K}_i \in C_0^\infty (R^{\nu(l_i+m_i+2)}),$$

тогда можно выбрать N так, что $\operatorname{supp} \hat{K}_i \subset [-N, N]^{\nu(l_i+m_i+2)}$ для любого i. Пусть $e_n(k) = \chi(k)\exp(2\pi i n k/A)$, где функция $\chi(k)$ из $C_0^\infty(R)$, $0 \leqslant \chi(k) \leqslant 1$; $\chi(k)=1$ для $|k| \leqslant B$ и $\chi(k)=0$ для всех $|k| \geqslant B+1$. Выберем A и B так, что $N<B<2N<A$, тогда

$$\hat{K}_i = \sum_{\bar{n}} c_{\bar{n}} \prod_i e_{n_i}(k_i), \tag{5.1}$$

где $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_L)$, $L=\nu(m_i+l_i+2)$. Очевидно, что для любого q существует $C(q)$ такая, что

$$|C_{\bar{n}}| \leqslant \frac{C(q)}{|\bar{n}|^q}, \quad |\bar{n}| = \sum_i |n_i|. \tag{5.2}$$

Мы представили оператор V в виде ряда:

$$V = \sum_{\bar{n}} c_{\bar{n}} V_{\bar{n}}^{(1)} \otimes V_{\bar{n}}^{(2)}, \tag{5.3}$$

где $V_{\bar{n}}^{(1)}$ — виковские мономы и $V_{\bar{n}}^{(2)}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} V_{\bar{n}}^{(2)}\psi &= \sum_{\bar{m}} (V_{\bar{n}}^{(2)}\psi, e_{\bar{m}}) e_{\bar{m}} = \\ &= \sum_{\bar{m}} (\psi, (V_{\bar{n}}^{(2)})^* e_{\bar{m}}) e_{\bar{m}} = \sum_{\bar{m}} b_{\bar{n}-\bar{m}}(\psi) e_{\bar{m}}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

где для $b_{\bar{n}-\bar{m}}(\psi)$ выполняется оценка, аналогичная (5.2),

$$|b_{\bar{n}-\bar{m}}(\psi)| \leqslant \frac{C(q)}{|\bar{n}-\bar{m}|^q} \|\psi\|_2. \tag{5.5}$$

Выберем $q>2\nu+1$, чтобы обеспечить сходимость ряда из коэффициентов.

С учетом оценок (5.2) и (5.5), пользуясь тем, что $\sum_{\pi} \leqslant M^n$, для взаимодействия V вида (5.3) вместо (1.4) легко повторить доказательство теорем 1—2.

Если же $\hat{K}_i \in S(R^{\nu(l_i+m_i+2)})$, воспользуемся разложением единицы,

$$\sum_{\bar{n}} \chi_{\bar{n}}(k) = 1, \tag{5.6}$$

где $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\chi_{\bar{n}}) \leqslant \mathrm{const}$ равномерно по $\bar{n}$.

Затем представляем ядро $\hat{K}_i$ в виде суммы $\hat{K}_i\chi_{\bar{n}}$ финитных ядер и, используя аналогичные (5.1) разложения для $\hat{K}_i\chi_{\bar{n}}$ с соответствующим образом сдвинутыми функциями $e_{\bar{n}}$, повторяем доказательство.

§ 6. Двухчастичное взаимодействие

Здесь мы рассмотрим сохраняющий число частиц оператор H, ограничение которого на $\mathcal{F}_a^{(N)}(L_2(R^\nu))\otimes L_2(R^\nu)$ имеет вид

$$H_N = -\sum_{j=1}^{N} \Delta_{x_j} - \Delta_y + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} V(x_j - y) = H_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} V(x_j - y), \tag{6.1}$$

где $V(\cdot) \in S(R^\nu)$, x_j, $y \in R^\nu$.

ТЕОРЕМА 3. *Если $\nu \geqslant 3$, $V \in S(R^\nu)$, то существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\nu, V) > 0$, независящее от N, такое, что при всех N и $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ система (6.1) асимптотически полна и H_N унитарно эквивалентен свободному гамильтониану H_0.*

Отличие от предыдущих результатов состоит в том, что оператор взаимодействия в «представлении» вторичного квантования имеет вид

$$\varepsilon \int V(x-y)\, a^*(x)\, a(x)\, dx,$$

т. е. имеет дополнительную δ-функцию.

Доказательство этой теоремы проводится слово в слово, как и теорем 1—2, с изменениями, обусловленными отмеченным обстоятельством. Поэтому мы укажем лишь, какие изменения надо внести в доказательство.

Формально отличие состоит в том, что в выражении (2.2) $M=1$, $m_i = l_i = 1$ и есть дополнительная δ-функция

$$V = \int V(x_1 - y)\, \delta(x_2 - x_1)\, a^*(x_2)\, a(x_1)\, dx_2 dx_1 \otimes \delta_y dy,$$

где δ_y есть δ-функция в точке y.

Пусть функция $V(\cdot)$ имеет преобразование Фурье $\tilde{V}(\cdot)$, тогда в k-представлении n-ый член ряда (2.1) для векторов вида (1.7) в данном случае имеет вид

$$\int_{Q_t^n} dt_n \ldots dt_1 \int \prod_{v} (\tilde{V}(k_{v2} - k_{v1}) \exp(it_v(h(k_{v1}) - h(k_{v2})))\times$$
$$\times a^*(k_{v1})\, a(k_{v2})\, dk_{v1} dk_{v2})\, a^*(\psi_r) \ldots a^*(\psi_1)\, \Omega \otimes$$
$$\otimes \left(\prod_{v=1}^{n} \int \exp(i(t_{v-1} - t_v)\, h(k_v))\, \delta(-k_{v1} + k_{v2} + k_v - k_{v+1})\, dk_v \right) dk_{n+1} \psi(k_1), \tag{6.2}$$

где $h(k) = k^2$.

Заметим, что в данном случае отличие от (2.5) состоит в том, что все функции $f_v \equiv 1$, $g_v \equiv 1$ при $v=1, \ldots, n$; $f_0 \equiv \psi$.

Избавляясь от δ-функций в (6.2), получаем

$$\int\limits_{Q_t^n} dt_n \ldots dt_1 \int \prod_{v=1}^{n} (\widetilde{V}(k_{v2} - k_{v1}) \exp(it_v (h(k_{v1}) - h(k_{v2}))) \times$$
$$\times a^*(k_{v1}) a(k_{v2}) dk_{v1} dk_{v2}) a^*(\psi_r) \ldots a^*(\psi_1) \Omega \otimes$$
$$\otimes \left(\prod_{v=1}^{n} \exp(i(t_{v-1} - t_v) h(\bar{k}_v)) \right) dk_{n+1} \psi(\bar{k}_1), \tag{6.3}$$

где

$$\bar{k}_v = \sum_{v'=v}^{n} (k_{v'1} - k_{v'2}) + k_{n+1}.$$

Как и (2.5), выражение (6.3) можно представить в виде сумм по диаграммам Фридрихса. Обозначим через $'v(\bar{v})$ номер вершин, которая спаривается с v-ой вершиной, $'v(v) > v$. Положим, что $\psi_{j(v)} \equiv 1$, если $v'(v) \neq 0$. Тогда каждое слагаемое этой суммы имеет вид

$$\int dt_n \ldots dt_1 \int F \left(\prod_{v \in I_2} a^*(k_{v2}) \right) \left(\prod_{j \in I} a^*(\psi_j) \right) \Omega \otimes$$
$$\otimes \exp(-it_n h(k_{n+1})) \left(\prod_{v=1}^{n} dk_{v1} \right) \left(\prod_{v \in I_2} dk_{v2} \right), \tag{6.4}$$

где

$$F = \left(\prod_{v \in I_2} \widetilde{V}(k_{v2} - k_{v1}) \exp(-i(t_v - t_{v'(v)}) h(k_{v1})) \times \right.$$
$$\left. \times \psi_{j(v)}(k_{v1}) \right) \left(\prod_{v \in I_1} \widetilde{V}(k_{'v(v)1} - k_{v1}) \exp(-i(t_v - t_{v'(v)}) h(k_{v1})) \times \right.$$
$$\left. \times \psi_{j(v)}(k_{v1}) \right) \exp \left(i \sum_{v=1}^{n} (t_{v-1} - t_v) h(\bar{k}_v) \psi(\bar{k}_1) \right) \tag{6.5}$$

и I_1 — множество вершин, с которыми есть спаривание, I_2 — множество вершин, с которыми нет спаривания, и I — множество неспаренных отростков нулевой вершины.

Рассмотрим функцию F_1 от переменных $\{k_{v1}, v=1, \ldots, n\}$ и $\{k_{v2}, v \in I_2\}$, где

$$F_1 = \left(\prod_{v \in I_1} \widetilde{V}(k_{'v(v)1} - k_{v1}) \psi_{j(v)}(k_{v1}) \right) \left(\prod_{v \in I_2} \widetilde{V}(k_{v2} - k_{v1}) \psi_{j(v)}(k_{v1}) \right).$$

Как и в (4.2), сделаем преобразование Фурье в (6.5). Остается только доказать аналог утверждения 2 для функции

$$F_2(\{k_{v2}, v \in I_2\}, k_{n+1}) = \frac{1}{(2\pi)^{nv/2}} \int \left| \int \exp \left(-i \sum_{v=1}^{n} (x_v, k_{v1}) \right) \times \right.$$
$$\left. \times F_1(k) \prod_{v=1}^{n} dk_{v1} \right| \prod_{v=1}^{n} dx_v. \tag{6.6}$$

Утверждение 3. *Функция* $F_2(\{k_{v2}, v \in I_2\}, k_{n+1})$ *принадлежит* $L_2(R^{vN})$, *где* N — *число переменных* $\{k_{v2}, v \in I_2\}$, k_{n+1}, *и ее* L_2-*норма допускает оценку*

$$\|F_2\|_2 \leqslant C^n C_\Psi,$$

где $C>0$ — некоторая константа, независящая от n, ψ, $\psi_1, \ldots, \psi_r$, t_v, $v=1, \ldots, n$; C_ψ зависит только от ψ, $\psi_1, \ldots, \psi_r$.

Доказательство. Положим $k=(k_{11}, \ldots, k_{n1})$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Разбивая для каждой из компонент переменной $k=(k_{11}^{(1)}, \ldots, k_{11}^{(\nu)}, \ldots, k_{n1}^{(1)}, \ldots, k_{n1}^{(\nu)})$ внутренний интеграл на зоны $|x_v^{(i)}|\geqslant 1$ и $|x_v^{(i)}|<1$ и интегрируя в первом случае по частям два раза по $k_{v1}^{(i)}$, получим оценку

$$|F_2(\{k_{v2}, v\in I_2\}, \quad k_{n+1})|\leqslant C^n\int\left|\int\prod_{v=1}^{n}\frac{1}{(|x_v|+1)^{2\nu}}\cdot\frac{\partial^{2\nu n}F_1(k)}{\partial^2 k_{11}^{(1)}\ldots\partial^2 k_{n1}^{(\nu)}}\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{v=1}^{n}dk_{v1}\right|\prod_{v=1}^{n}dx_v\leqslant C^n\int\left|\frac{\partial^{2\nu n}F_1(k)}{\partial^2 k_{11}^{(1)}\ldots\partial^2 k_{n1}^{(\nu)}}\right|\prod_{v=1}^{n}dk_{v1}, \tag{6.7}$$

где $|x_v|=|x_v^{(1)}|+\ldots+|x_v^{(\nu)}|$.

Заметим, что $\psi(\bar{k}_1)$ зависит не более чем от $2r+1$ переменных, так как

$$\bar{k}_1=-\sum_{v\in I_2}k_{v2}+k_{n+1}+\sum_{v\in I_3}k_{v1},$$

где I_3 есть множество вершин, которые соединяются ребрами с нулевой вершиной. Поэтому, раскрывая производную в (6.7), мы получим не более чем $C^n(2r)^{2r}$ слагаемых, причем возникнут производные от функций $\tilde{V}$, $\psi_1, \ldots, \psi_{r-1}$, ψ_r порядка не выше 4ν, а от функции ψ — порядка $2r\nu$. Следовательно,

$$|F_2(\{k_{v2}, \quad v\in I_2\}, \quad k_{n+1})|\leqslant C^n\sum_j\int|F_1^{(j)}(k)|\prod_{v=1}^{n}dk_{v1}, \tag{6.8}$$

где $F_1^{(j)}$ имеет такой же, как у F_1, вид, но вместо $\tilde{V}$, ψ, ψ_j возникнут производные порядка не выше описанного. Откуда

$$\|F_2\|_2^2\leqslant C^n\sum_j\sum_{j'}\int\left[\left(\int|F_1^{(j)}(k)|\prod_{v=1}^{n}dk_{v1}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\int|F_1^{(j')}(k')|\prod_{v=1}^{n}dk'_{v1}\right)\right]\prod_{v\in I_2}dk_{v2}dk_{n+1}. \tag{6.9}$$

Делая в (6.9) очевидную замену переменных, получим требуемую оценку.

Замечание. Результат § 6 остается верным и для симметрического фоковского пространства. Действительно, рассмотрим сохраняющий число частиц оператор H, ограничение которого на $\mathcal{H}_N=\mathcal{F}_s^{(N)}(L_2(R^\nu))\otimes\otimes L_2(R^\nu)$ имеет вид

$$H_N=-\sum_{j=1}^{N}\Delta_{x_j}-\Delta_y+\varepsilon\sum_{j=1}^{N}V(x_j-y), \tag{6.10}$$

где $\mathcal{F}_s(L_2(R^\nu))$ есть симметрическое фоковское пространство, $V(\cdot)\in\in S(R^\nu)$, x_j, $y\in R^\nu$.

ТЕОРЕМА 4. *Если $\nu\geqslant 3$, $V\in S(R^\nu)$, то существует $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\nu, V)>0$, независящее от N, такое, что при всех N и $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ система (6.10) асимптотически полна и H_N унитарно эквивалентен свободному гамильтониану.*

Отличие доказательства теоремы 4 от теоремы 3 состоит только в том, что нужно заметить, что бозевские операторы рождения и уничтожения, являясь неограниченными во всем $\mathcal{F}_s(L_2(R^\nu))$, ограничены на каждом подпространстве $\mathscr{H}_r$ L_2-нормой, умноженной на $(r+1)^{1/2}$. В нашем случае мы получаем всегда ровно r неспаренных операторов рождения, что позволяет для каждого r оценить норму их произведения независимо от n.

Список литературы

1. *Фаддеев Л. Д.* Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц//Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1963. Вып. 69. С. 1—122.
2. *Iorio R., O'Carroll M.* Asymptotic completeness for multiparticle Schrodinger Hamiltonians with weak potentials//Comm. Math. Phys. 1972. V. 27, № 2. P. 137—145.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3—4. М.: Мир, 1982.
4. *Botvich D. D., Malyshev V. A.* Unitary equivalence of temperature dynamics of ideal and locally pertubed fermigas//Comm. Math. Phys. 1983. V. 91, № 3. P. 301—312.
5. *Domnenkov A. Sh., Malyshev V. A.* Example of asymptotic completeness for translation invariant infinite particle system//Comm. Math. Phys. 1988. V. 117, № 3. P. 316—322.
6. *Aizenstadt V. V., Malyshev V. A.* Spin interaction with an ideal fermi gas//Journ. Stat. Phys. 1987. V. 48, № 1/2. P. 51—88.
7. *Айзенштадт В. В.* Унитарная эквивалентность гамильтонианов в фоковском пространстве//Успехи матем. наук. 1988. Т. 39, № 2. С. 220—221.
8. *Домненков А. Ш.* Асимптотическая полнота для системы частица — ферми-газ// Теор. и матем. физ. 1987. Т. 71, № 3. С. 120—127.
9. *Глимм Дж., Джаффе А.* Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. М.: Мир, 1984.
10. *Хепп К.* Теория перенормировок. М.: Наука, 1974.
11. *Фридрихс К.* Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1969.

Поступила в редакцию
3.V.1988