ISSN 0374-1990

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ · ТОМ 13 · ВЫПУСК 1

МОСКВА · 1979

Функциональный анализ и его приложения,
т. 13, вып. 1, 1979, 31—41.

УДК 517.9

СОЛИТОННЫЕ СЕКТОРЫ В РЕШЕТЧАТЫХ МОДЕЛЯХ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В. А. Малышев

Солитонным решением в классической теории непрерывных полей называется не зависящее от времени решение уравнений Эйлера — Лагранжа, имеющее конечную энергию. Так, для уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi + \frac{dU(\varphi)}{d\varphi} = 0$$

солитоны $\varphi(x)$ должны иметь конечный интеграл энергии

$$E(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \quad (\varphi)\right) dx$$

и обращать в нуль вариацию δE, т. е. служить решением вышеприведенного уравнения.

В частном случае $U = (1 - \varphi^2)^2$ такими решениями будут: а) $\varphi_+ \equiv 1$, б) $\varphi_- \equiv -1$. На этих решениях энергия достигает абсолютного минимума $E(\varphi_\pm) = 0$; такие решения называются вакуумными. Кроме того, имеется солитонное решение вида

$$\varphi_c = \pm \operatorname{th}(x - x_0) \to \begin{cases} \pm 1, & x \to \infty, \\ \mp 1, & x \to -\infty, \end{cases}$$

с относительным минимумом энергии $E(\varphi_c) = 4/3$.

В данной работе рассматриваются некоторые вопросы, относящиеся к квантованию нелинейных полей, и построен квантовый аналог солитонной динамики. Вместо поля $\varphi(x, t)$ на $\mathbf{R}^2$ мы рассматриваем поле $\sigma(x, t)$, определенное на $\mathbf{Z} \times \mathbf{R}$ и принимающее значения ± 1. Энергия взаимодействия в заданный момент времени для конфигурации $\sigma(x)$, $x \in \mathbf{Z}$, задается суммой

$$E(\sigma) = -\beta \sum_{x \in \mathbf{Z}} (\sigma(x)\sigma(x+1) - 1) \tag{1}$$

(кинетическую часть мы задаем сразу квантовым образом). Вариация $E(\sigma') - E(\sigma)$ конечна во всяком случае для любых двух конфигураций σ' и σ, отличающихся в конечном числе мест. Для этого случая естественно определить «классический» солитон как конфигурацию σ_c такую, что 1) для любой σ, отличающейся от σ_c в конечном числе мест, $E(\sigma) - E(\sigma_c) \geqslant 0$; 2) $0 < E(\sigma^c) < \infty$. Наряду с вакуумными конфигурациями $\sigma_\pm \equiv \pm 1$ с энергией $E(\sigma_\pm) = 0$ здесь существует «классический» солитон-кинк

$$\sigma_c = \begin{cases} 1, & x \geqslant x_0 \\ -1, & x < x_0 \end{cases}, \quad E(\sigma_c) = \beta.$$

Теорема 1.4. *В условиях теоремы* 1.2 (*т. е. для достаточно больших* β *и* $4\beta < \ln 1/\lambda$) *меры* μ^+, μ^-, μ^s, μ^{as} *взаимно сингулярны.*

Положим $\mathscr{L}_\mu = L_2(\Omega, \Sigma_0, \mu)$, и пусть $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathscr{L}_\mu$. Пусть $\mathscr{H}_V$ — подпространство $\mathscr{L}_{\mu_{0\lambda}}$ случайных величин, зависящих лишь от $\xi_x(0)$, $x \in V$, $\mathfrak{A}_V$ — C^*-алгебра всех линейных операторов в $\mathscr{H}_V$. Индуктивный предел $\mathfrak{A}$ этих $\mathfrak{A}_V$ совпадает с обычной C^*-алгеброй квазилокальных наблюдаемых квантовой спиновой системы на $\mathbf{Z}$. Путь $e_x^\pm = 1/\sqrt{2}\cdot(1 \pm \xi_x(0))$ — базис в $\mathscr{H}_x$.

Каждая мера (вероятностная) μ на Σ_0 определяет состояние φ_μ на $\mathfrak{A}$ по формуле $\varphi_\mu(A) = (\chi_\Omega, A\chi_\Omega)_\mu$, где χ_Ω — тождественная единица на Ω. Правая часть этой формулы имеет очевидный смысл для локальных A и продолжается на всю $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathscr{L}_\mu$ можно отождествить с пространством представления ГНС по этому состоянию с циклическим вектором χ_Ω.

Для любого $V = [-L, L]$ рассмотрим гамильтониан

$$H_V = \sum_{x=-L}^{L} H_x + \sum_{x=-L}^{L-1} H_{x,x+1},$$

где $H_{x,x+1}$ — оператор умножения на $\beta\xi_x(0)\xi_{x+1}(0)$, $H_x = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$ в базисе $e_x^\pm$. Пусть $\hat{H}_V = H_V - E_V$, где E_V — наименьшее собственное значение H_V.

По теореме Робинсона [4] существует группа автоморфизмов η_t алгебры $\mathfrak{A}$

$$\eta_t A = \lim_{L\to\infty} e^{i\hat{H}_V t} A e^{-i\hat{H}_V t}.$$

η_t определяет временну́ю эволюцию на $\mathfrak{A}$, а пространственные сдвиги определяют представление η_x группы $\mathbf{Z}$ в группу автоморфизмов $\mathfrak{A}$ очевидным образом.

По хорошо известным свойствам представления ГНС (см. [4]) группа $\eta_{t,x}$ в пространстве $\mathscr{L}_{\mu^+}$ (а также $\mathscr{L}_{\mu^-}$) ввиду инвариантности состояния φ_{μ^+} относительно $\eta_{t,x}$ унитарно представима и, следовательно, определяет гамильтониан H_+ (H_-). При этом имеет место формула Фейнмана — Каца (это стандартный результат, его доказательство вполне аналогично многим имеющимся для подобных ситуаций, см., например, [5], и мы его опускаем):

$$e^{-\tau H_+}\Phi = P_0 S_\tau \Phi, \tag{1.4}$$

где $\Phi \in \mathscr{L}_{\mu^+} \subset L_2(\Omega, \Sigma, \mu^+)$, S_τ — сдвиг случайной величины Φ на вектор $(0, \tau)$ в построенном выше гиббсовском поле на $\mathbf{Z}\times\mathbf{R}$, P_0 — ортогональная проекция в $L_2(\Omega, \Sigma, \mu^+)$ на $\mathscr{L}_{\mu^+}$.

Пространство $\mathscr{L}_{\mu^s}$ будем называть *солитонным сектором.* Состояние φ_{μ^s} на $\mathfrak{A}$ не инвариантно ни относительно η_t, ни относительно η_x. Поэтому предыдущие соображения не применимы. Однако имеет место

Теорема. 1.5. I. *В солитонном секторе существуют такие унитарные операторы* V_t *и* V_x, *что*

$$V_x \pi_s(A) V_x^{-1} = \pi_s(\eta_x A), \tag{1.5}$$

и аналогично с заменой x *на* t, *где* π_s — *представление ГНС алгебры* $\mathfrak{A}$ *относительно состояния* φ_{μ^s}.

Более того, если выполнены условия теоремы 1.2, *то*

II. *Операторы* V_x *не имеют дискретного спектра* (*т. е. в солитонном секторе нет вакуума*).

III. *Представления ГНС относительно состояний* φ_{μ^+}, φ_{μ^-}, φ_μ *дизъюнктны (т. е. солитонный сектор действительно является новым; это же верно и для антисолитонного сектора).*

IV. *Спектр гамильтониана* H_S *в солитонном секторе, определяемого в* § 4, *ограничен снизу положительным числом (положительность массы солитона).*

§ 2. Существование фазового перехода

Здесь мы докажем теорему 1.2, начав с доказательста неединственности гиббсовского распределения. Будем считать $\nu = 1$ и вложим $\mathbf{Z} \times \mathbf{R}$ стандартным образом в $\mathbf{R}^2$. Разобьем $\mathbf{R}^2$ на единичные квадраты

$$\Delta_{mn} = \left\{m - \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant m + \frac{1}{2}, \quad n \leqslant t \leqslant n + 1\right\}.$$

Квадрат Δ_{mn} назовем правильным (для заданной конфигурации $f(x, t)$), если в нем $f(x, t) \equiv 1$. Пусть заданы два квадрата с общей стороной (ребром) l, один из которых правильный, а другой нет. Объединение всех таких ребер l образует систему контуров в $V = \{(x, t): |x|, |t| \leqslant T\}$. Далее мы рассматриваем случай, когда все внешние к V квадраты (т. е. с $|m|, |n| \geqslant T$) правильные.

Фиксируем некоторый замкнутый контур Γ такой, что квадрат Δ_{00} расположен внутри него. Будем оценивать вероятность $\mathbf{P}_\Gamma$ (при заданных граничных условиях) конфигурации f такой, что Γ принадлежит множеству контуров f и не содержит внутри себя контуров, охватывающих Δ_{00}.

Л е м м а 2.1. *В условиях теоремы* 1.2 $\mathbf{P}_\Gamma \leqslant \exp[-C\beta\Gamma]$, *где* C *не зависит от* β *и от длины* Γ *контура* Γ.

Из этой леммы наше утверждение о неединственности следует стандартным образом. Докажем лемму.

Заметим, что все квадраты, лежащие вне Γ и имеющие с Γ общую сторону, являются правильными. Любая прямая $x = \mathrm{const}$ (целое) пересекает внутренность Γ по нескольким связным отрезкам. Концы этих отрезков лежат на Γ. Квадраты Δ_{mn}, лежащие внутри Γ, а также ребра Γ, содержащие эти концы, назовем вертикальными. Остальные квадраты внутри Γ, имеющие общую сторону с Γ, назовем горизонтальными. Будем считать, что вертикальный квадрат имеет только одну вертикальную сторону (общий случай разбирается совершенно аналогично). Тогда для любой конфигурации f (совместной с Γ) и для любого вертикального квадрата Δ_{mn} пусть $a_{mn} \in \Delta_{mn}$—точка перемены знака, ближайшая к вертикальной стороне l этого квадрата, и l_{mn} — «горизонтальный» отрезок от a_{mn} до l.

Определим преобразование Φ в множестве конфигураций

$$(\Phi f)(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & \text{если } (x, t) \text{ лежит вне } \Gamma \text{ или если } (x, t) \\ & \text{принадлежит одному из отрезков } l_{mn}, \\ -f(x, t) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Мы будем теперь доказывать лемму 2.1 отдельно в каждом из следующих четырех случаев, исчерпывающих все возможности.

Случай 1a. Пусть число вертикальных квадратов $\Gamma_в \geqslant \alpha\Gamma$, $\alpha < 1/2$, причем существует хотя бы один вертикальный квадрат только с одной переменной знака. Тогда

$$\mathbf{P}_\Gamma \leqslant \max_f [\exp[U(f) - U(\Phi f)]], \tag{2.1}$$

где

$$U(f) \equiv U_1 + U_2 = \beta \sum_{x=-L}^{L-1} \int f(x,t) f(x+1,t)\,dt + \sum_{x=-L}^{L} N_x \ln \frac{1}{\lambda}.$$

Доказательство (2.1) такое же, как при обычном убивании контуров. Для сравнения двух распределений поступим так (мы сравниваем μ_{01} до и после преобразования Φ). Фиксируем в конфигурации f все точки $a_i = (x_i, t_i)$ перемены знака, кроме точек a_{mn}. Возьмем произвольный вертикальный квадрат Δ_{mn}, его вертикальное ребро l и точку $a_i \equiv b_{mn}$, ближайшую к l и лежащую на той же горизонтальной прямой, что и a_{mn}. Определим отрезок $\tilde{l}_{mn}$ как отрезок между b_{mn} и l, если $b_{mn} \in \Delta_{mn}$, или как весь единичный отрезок, принадлежащий Δ_{mn}, в противном случае. Отношение условных мер (по распределению μ_{01}) того, что на $\tilde{l}_{mn}$ будет только одна перемена знака, и того, что не будет ни одной, очевидно не превосходит 1. Поэтому (2.1) доказано.

Но

$$U_1(f) - U_1(\Phi f) \leqslant \beta(\Gamma_г + \Gamma_в),$$

где $\Gamma_г$ — число горизонтальных квадратов, и

$$U_2(f) - U_2(\Phi f) \leqslant -\ln \frac{1}{\lambda} - \Gamma_в.$$

Так как $2(\Gamma_г + \Gamma_в) \geqslant \Gamma \geqslant \Gamma_г + \Gamma_в$, то

$$\mathbf{P}_\Gamma \leqslant \exp[\beta\Gamma - \Gamma_в \ln 1/\lambda] \leqslant \exp[\Gamma(\beta - \alpha \ln 1/\lambda)].$$

Поэтому при $\alpha \ln 1/\lambda > \beta(1+\varepsilon)$ получаем утверждение леммы с $C = \varepsilon$.

Случай 1б. Пусть $\Gamma_в \geqslant \alpha\Gamma$ и все вертикальные квадраты содержат более одной перемены знака. Применяем тогда последовательно операцию Φ до тех пор, пока это не изменит контур Γ. При этом аналогично предыдущему

$$\sup_f \exp[U(\Phi^k f) - U(\Phi^{k+1} f)] \leqslant e^{-C\beta\Gamma}$$

и

$$\mathbf{P}_\Gamma \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-C\beta\Gamma})^n.$$

Случай 2а. Пусть $\Gamma_в < \alpha\Gamma$ и число $\Gamma_г'$ горизонтальных квадратов, в которых нет перемен знаков, удовлетворяет неравенству $\Gamma_г' > {}^3/_4\Gamma_г$. Сделаем тогда преобразование Φ. Оценки, аналогичные приведенным выше, доказывают справедливость нашего утверждения.

Случай 2б. Пусть $\Gamma_в < \alpha\Gamma$, $\Gamma_г' < {}^3/_4\Gamma_г$. Сделаем тогда следующее преобразование Ψ:

$$(\Psi f)(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x,t) \text{ принадлежит горизонтальному квадрату,} \\ f(x,t) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При этом преобразовании общая энергия горизонтальных взаимодействий $(-U_2)$ увеличится не менее, чем на $\Gamma_г' \ln 1/\lambda \geqslant {}^3/_4 \Gamma_г \ln 1/\lambda \geqslant {}^3/_8(\Gamma - 2\Gamma_в) \ln 1/\lambda \geqslant {}^3/_8(1-2\alpha)\Gamma \ln 1/\lambda$, а энергия вертикальных взаимодействий $(-U_1)$ уменьшится не более, чем на $2\Gamma_г\beta \leqslant 2\Gamma(1-\alpha)\beta$. Изменение же меры μ_{01} при преобразовании Ψ мажорируется числом $(l-1)^{\Gamma_г}$, что и доказывает лемму.

После получения оценки вероятности контура доказательство остальной части теоремы 1.2 следует из контурных моделей Минлоса — Синая

[8]. Отсюда же можно получить экспоненциальное убывание корреляций для построенного случайного поля. Само же существование пределов может быть доказано также с помощью корреляционных неравенств.

Теорема 1.4 теперь легко следует из теоремы 1.2. Действительно, например, для сравнения μ^+ и μ^s достаточно рассмотреть множество $A \subset \subset \Sigma_0$, соответствующее событию

$$\left\{\lim \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} \xi_x(0) \text{ существует и не превосходит } 0\right\}.$$

Тогда $\mu^+(A) = 0$, $\mu^s(A) = 1$.

Замечание. Не существует единого марковского процесса с локальным взаимодействием в смысле Р. Л. Добрушина [9], порождающего марковскую полугруппу в различных секторах. Действительно, в [9] показано, что в двумерном случае нет фазового перехода для марковских процессов с локальным взаимодействием. Если строить в нашем случае эти процессы, исходя из конечного объема, то получатся разные процессы.

§ 3. Солитоны в модели Изинга

Здесь мы докажем теорему 1.5. Пусть α_x — автоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_x$

$$\alpha_x A = u_x A u_x^{-1},$$

где u_x переставляет e_x^+ и e_x^-. Можно считать α_x автоморфизмом $\mathfrak{A}$ (если умножить его тензорно на тождественный автоморфизм). Положим $\alpha_{a,b} = \prod_{a \leqslant x \leqslant b} \alpha_x$. Тогда, например, $\varphi_{\mu^s}(A) = \varphi_{\mu^+}(\alpha_{0,\infty} A)$. Рассмотрим сплетающий изоморфизм $T: \mathscr{L}_{\mu^+} \to \mathscr{L}_{\mu^s}$ такой, что

$$T\pi_+(A) = \pi_s(\alpha_{0,\infty} A)\, T, \tag{3.1}$$

где π_+ и π_s — представления ГНС относительно φ_{μ^+} и φ_{μ^s} соответственно. T очевидным образом связан с введенным в § 2 преобразование $T_{0,\infty}$.

Вместо того чтобы в доказательстве части I теоремы 1.5 искать операторы $V_{x,t}$ в $\mathscr{L}_{\mu^s}$, удовлетворяющие соотношению (1.5), мы будем искать операторы

$$U_{x,t} = T^{-1} V_{x,t} T \tag{3.2}$$

в $\mathscr{L}_{\mu^+}$, удовлетворяющие соотношению

$$TU_{x,t}T^{-1}T\pi_+(\alpha_{0,\infty} A)\, T^{-1}TU_{x,t}^{-1}T^{-1} = T\pi_+(\alpha_{0,\infty}\eta_{x,t} A)\, T^{-1}. \tag{3.3}$$

Последнее соотношение эквивалентно (1.5) ввиду (3.1) и (3.2). Соотношение (3.3) эквивалентно следующему:

$$U_{x,t} B U_{x,t}^{-1} = (\alpha_{0,\infty}\eta_{x,t}\alpha_{0,\infty})\, B \tag{3.4}$$

для всех $B \in \pi_+(\mathfrak{A})$.

Рассмотрим сначала случай временно́й эволюции. Тогда

$$U_t B U_t^{-1} = \alpha_{0,\infty}[e^{itH_+}(\alpha_{0,\infty} B)\, e^{-itH_+}].$$

Но мы знаем, что $\alpha_{0,\infty}[e^{it\hat{H}_V}(\alpha_{0,\infty} B)\quad e^{-it\hat{H}_V}]$ сходится в топологии, определяемой нормой, для достаточно малых t при $V \to \infty$. Это последнее выражение, очевидно, равно $e^{it\alpha_{0,\infty}(\hat{H}_V)} B e^{-it\alpha_{0,\infty}(\hat{H}_V)}$. Но

$$\alpha_{0,\infty}(\hat{H}_V) = \hat{H}_V - 2\beta f_0(0)\, f_{-1}(0) \equiv \hat{H}_V + \delta H.$$

Мы можем, таким образом, определить искомую унитарную группу U_t в $\mathscr{L}_{\mu^+}$ формулой $U_t = e^{it(H_+ + \delta H)}$. Определим гамильтониан H_s в солитонном секторе как $H_s = T(H_+ + \delta H)T^{-1}$.

Перейдем теперь к рассмотрению пространственных сдвигов. Воспользовавшись (3.4), получим $U_x B U_x^{-1} = \alpha_{0,\,x-1}\eta_x B$. Группа η_x, как уже замечалось, унитарно представлена в $\mathscr{L}_{\mu^+}$. Легко проверить, что и α_x унитарно представлена в $\mathscr{L}_{\mu^+}$. Поэтому и $\alpha_{0,\,x-1}\eta_x$ унитарно представлена в $\mathscr{L}_{\mu^+}$.

Для доказательства части II теоремы 1.5 заметим, что сопряженный к η_x автоморфизм действует на состояниях алгебры $\mathfrak{A}$. Более того, он переводит состояние типа меры в состояние такого же типа. Поэтому достаточно доказать, что не существует меры $\tilde{\mu}$ на (Ω, Σ_0), абсолютно непрерывной относительно μ^s и инвариантной относительно пространственных сдвигов. Но это следует из [14]. Мы дадим простое доказательство.

Для такой меры $\tilde{\mu}(\{\xi_x(0) = 1\}) = \tilde{\mu}(\{\xi_0(0) = 1\}) = a$ для всех x. Пусть a, например, не совпадает с $\mu^s(\{\xi_x(0) = 1\})$ для $x > 0$. Тогда можно выбрать множество A с $\tilde{\mu}(A) > 0$ (например, объединяя некоторые эргодические компоненты относительно группы сдвигов) такое, что

$$\liminf \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} \xi_x(0) \neq \mu^s(\{\xi_x(0) = 1\}) - \mu^s(\{\xi_x(0) = -1\}).$$

Но тогда по закону больших чисел $\mu^s(A) = 0$ (см. конец § 2).

Утверждение III теоремы 1.5 следует из теоремы 1.4.

Перейдем к доказательству утверждения IV. Достаточно оценить снизу спектр оператора $H_+ + \delta H$ в $\mathscr{L}_{\mu^+}$ или равномерно по V оценить снизу спектр оператора $\hat{H}_{+,V} + \delta H$, где $\hat{H}_{+,V} = H_{+,V} - E_{+,V}$, а $H_{+,V} = H_V + \beta\xi_0(L) + \beta\xi_0(-L)$, т. е. является оператором H_V с граничными членами, соответствующими граничным условиям $+$; $E_{+,V}$ — его наименьшее собственное значение. Наш вывод аналогичен [10]. Положим

$$Z^{+\pm}_{L,T} = \int \exp\left(\beta \int \left[\sum_{x=-L}^{L-1} \xi_x(t)\,\xi_{x+1}(t) + \xi_L(t) \pm \xi_{-L}(t)\right] dt\right).$$

Заметим, что

$$Z^{+-}_{L,T} = \int \exp\left(\beta \int \left[\sum_{x=-L}^{L-1} \xi_x(t)\,\xi_{x+1}(t) + \xi_{-L}(t) + \xi_L(t) - 2\xi_0(t)\,\xi_{-1}(t)\right] dt\right). \quad (3.5)$$

По формуле Фейнмана — Каца

$$E_{+,V} = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln Z^{++}_{L,T}.$$

Аналогично, используя (3.5), находим, что наименьшее собственное значение гамильтониана $H_{+,V} + \delta H$ равно

$$\tilde{E}_{+,V} = -\lim_{T\to\infty} \ln Z^{+-}_{L,T}.$$

Поэтому

$$H_S \geqslant \tau \equiv \overline{\lim_{L\to\infty}} \lim_{T\to\infty} \left(-\frac{1}{T} \ln \frac{Z^{+-}_{L,T}}{Z^{++}_{L,T}}\right).$$

τ есть поверхностное натяжение в нашей модели. Доказательство того, что $\tau > 0$, проводится аналогично работе [11] с помощью контурных моделей Минлоса — Синая [8]. Теорема доказана.

§ 4. Вихри в калибровочной модели

Мы построим сейчас калибровочную модель с непрерывным временем по аналогии с моделью Изинга. Подобные калибровочные модели сейчас активно изучаются в физике элементарных частиц (см., например, [12]).

Пусть $\tilde{\mathbf{Z}}^\nu$ — множество всех ребер (т. е. отрезков между ближайшими соседями) решетки $\mathbf{Z}^\nu$. Мы будем строить случайное поле на $\tilde{\mathbf{Z}}^\nu \times \mathbf{R}$, $\nu \geqslant 2$, принимающее в каждой точке значение на единичной окружности S^1.

Для любого $\zeta \in \tilde{\mathbf{Z}}^\nu$ построим сначала стационарный марковский процесс $\xi_\zeta(t)$ со значениями в S^1 — броуновское движение на S^1 с инфинитезимальным оператором — $\lambda\Delta = H_\zeta$. Будем считать $\xi_\zeta(t)$ взаимно независимыми для разных ζ. Вероятностное пространство, где определены все $\xi_\zeta(t)$, обозначим через $(\Omega, \Sigma, \mu_{0\lambda})$. Ω можно считать множеством функций $f(\zeta, t)$, непрерывных по t при всех ζ.

Введем новое распределение μ_V на (Ω, Σ) с плотностью

$$\frac{d\mu_V}{d\mu_{0\lambda}} = Z_V^{-1} \exp\Bigl(\beta \sum_{\square} \int \operatorname{Re}\bigl(\tilde{\xi}_{\zeta_1}(t)\, \tilde{\xi}_{\zeta_2}(t)\, \tilde{\xi}_{\zeta_3}(t)\, \tilde{\xi}_{\zeta_4}(t)\, dt\bigr), \tag{4.1}$$

где суммирование по всем единичным квадратам $\square$ со сторонами ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4. Ребра ζ мы считаем ориентированными в положительном направлении оси координат, которой ζ параллельны. Будем считать, что граница квадрата $\square$ обходится по часовой стрелке, и положим

$$\tilde{\xi}_\zeta(t) = \begin{cases} \xi_\zeta(t), & \text{если ориентация } \zeta \text{ совпадает с направлением обхода,} \\ \xi_\zeta^{-1}(t), & \text{если не совпадает.} \end{cases}$$

Заметим, что $\xi_\zeta(t) = e^{i\varphi_\zeta(t)}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. При этом требуется также, чтобы все квадраты $\square$ принадлежали кубу

$$V = \{x = (x^1, \ldots, x^\nu) \colon |\, x^i \,| \leqslant L\} \subset \mathbf{R}^\nu$$

Пусть теперь $\nu = 2$ и $\pi_1(S^1)$ — множество гомотопических классов отображений $S^1 \to S^1$.

Мы стандартно вложим $\mathbf{Z}^2$ в $\mathbf{R}^2$ и для любого отображения $\gamma\colon S^1 \to S^1$ определим отображение $\tilde{\gamma}\colon \tilde{\mathbf{Z}}^2 \to S^1$ следующим образом. Для любого $\zeta \in \mathbf{Z}^2$ проведем луч из начала координат через центр ζ. Пусть s — точка пересечения этого луча с единичной окружностью $S^1 \subset \mathbf{R}^2$. Тогда положим $\tilde{\gamma}(\zeta) = \gamma(s)$.

Определим теперь взаимно однозначное преобразование Ω в себя

$$(T_\gamma f)(\zeta, t) = \tilde{\gamma}(\zeta) f(\zeta, t).$$

Аналогично § 1 определим T_γ^*, действующее на мерах на (Ω, Σ_0),

$$(T_\gamma^* \mu)(A) = \mu(T_\gamma^{-1} A).$$

Также аналогично § 1 вводятся C^*-алгебры $\mathfrak{A}_\zeta$, $\mathfrak{A}_V$, $\mathfrak{A}$. Например, $\mathfrak{A}_\zeta$ изоморфны алгебре всех ограниченных линейных операторов в $L_2(S^1, ds)$, где ds — вероятностная инвариантная мера на S^1.

Определим унитарный оператор $u_\zeta(\gamma)$, действующий на случайные величины Φ в $L_2(\Omega, \Sigma_0, \mu_0\lambda)$, зависящие только от $\xi_\zeta(0)$, следующим образом. Будем писать $\Phi = \Phi(f) = \Phi(f(\zeta, 0))$, $f \in S^1$. Тогда положим

$$(u_\zeta(\gamma)\, \Phi)(f) = \Phi(\tilde{\gamma}^{-1}(\zeta) f).$$

Определим автоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$

$$\alpha_\zeta^\gamma(A) = u_\zeta(\gamma) A u_\zeta^{-1}(\gamma)$$

и

$$\alpha_V^\gamma = \prod_{\zeta\in V} \alpha_\zeta^\gamma, \qquad \alpha^\gamma = \alpha_{\mathbf{Z}^2}^\gamma.$$

Для гамильтониана $H_V = \sum_{\zeta\in V} H_\zeta + \sum_{\square\subset V} H_\square$ с $H_\square = \beta\xi_{\zeta_1}^{*}(0)\ldots\xi_{\zeta_4}(0)$ имеем

$$\alpha^\gamma(H_V) = H_V + \delta H_V,$$

где $\delta H_V = \sum_{\square\subset V} \delta H_\square$, $\delta H_\square = a_\square H_\square$, и комплексное число $a_\square$ с $|a_\square| = 1$ равно

$$a_\square = \tilde{\tilde{\gamma}}(\zeta_1)\,\tilde{\tilde{\gamma}}(\zeta_2)\,\tilde{\tilde{\gamma}}(\zeta_3)\,\tilde{\tilde{\gamma}}(\xi_4),$$

где

$$\tilde{\tilde{\gamma}}(\zeta_i) = \begin{cases} \tilde{\gamma}^{-1}(\zeta_i), & \text{если } \tilde{\xi}_{\zeta_i}(0) = \xi_{\zeta_i}(0), \\ \tilde{\gamma}(\zeta_i) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Л е м м а 4.1. *Для элемента n группы* $\pi_1(S^1) \sim \mathbf{Z}^1$, $n\in \mathbf{Z}^1$, *определим отображение* $\gamma(\varphi) = n\varphi$. *Тогда* $a_\square = O(r^{-4})$, *где r — расстояние* $\square$ *от начала координат.*

Эта лемма доказывается простыми вычислениями. Только такие «регулярные» γ мы и будем рассматривать.

Тогда в силу леммы 4.1 δH_V сходится в топологии нормы на $\mathfrak{A}$ к $\delta H = \sum_\square \delta H_\square \in \mathfrak{A}$.

Рассмотрим теперь некоторую трансляционно-инвариантную гиббсовскую меру μ для нашего случайного поля и перейдем к перечислению основных результатов.

Прежде всего в высокотемпературной области все результаты (т. е. теоремы 1.1 и 1.3 из § 1) сохраняются.

Т е о р е м а 4.1. *Если* γ *выбрана, как в лемме* 4.1, *то в солитонном секторе* $\mathscr{L}\mu^s$, $\mu^s = T_\gamma^*\mu$, *группа временной эволюции унитарно представима.*

Для доказательства, так же как в § 3, строим временну́ю эволюцию в виде

$$U_t = T^{-1} e^{it(H+\delta H)}\,T,$$

где H — гамильтониан в $\mathscr{L}_\mu$, а T: $\mathscr{L}_\mu \to \mathscr{L}_{\mu^s}$. Группа $e^{it(H+\delta H)}$ представляет собой локальное возмущение e^{itH}, $T(H + \delta H)T^{-1}$ — гамильтониан для $\mathscr{L}_{\mu^s}$, и он строится обычным образом (см., например, [13]). Теорема доказана.

Предположим, что для нашей модели имеет место нарушение непрерывной симметрии, задаваемой группой α^{γ_0}, где γ_0: $S^1 \to S^1$ определяется формулой $s \to \gamma_0 s$ для $\gamma_0 \in S^1$.

Тогда построенные секторы являются новыми, и при слабых предположениях типа убывания корреляций для поля μ можно доказать остальные утверждения теоремы 1.5, кроме положительности массы солитона.

Можно доказать нарушение непрерывной симметрии при $\nu \geqslant 2$ в несколько другой модели, построенной следующим образом. Вместо $\tilde{\mathbf{Z}}^\nu$ берется $\mathbf{Z}^\nu$, $\xi_\zeta(t)$ заменяется на $\xi_x(t)$, $x \in \mathbf{Z}^\nu$, который является таким же броуновским движением на окружности. Вместо взаимодействия (4.1) берется $\beta\sum_{|x-x'|=1}\mathrm{Re}\ \xi_x(0)\xi_{x'}^{-1}(0)$. Однако в этой модели при попытке аналогичных построений мы имеем лишь $a_\square \sim c/r^2$, и при $\nu \geqslant 2$ нельзя доказать сходимость нужных рядов.

В нашей модели при $\nu \geqslant 3$ вместо $\pi_1(S^1)$ появляется гомотопическая группа $\pi_{\nu-1}(S^1)$, тривиальная при $\nu \geqslant 3$. Если вместо окружности S^1 рассмотреть другую компактную группу, то появляются так называемые неабелевы калибровочные модели [12]. Для них можно перенести результаты этого параграфа, но существование фазового перехода по-прежнему неизвестно.

Замечание. Из бесконечности энергии классического солитона, по-видимому, следует отсутствие квантового. В случае модели Изинга с непрерывным временем при $\nu \geqslant 2$ это утверждение может быть доказано объединением методов § 2, контурных моделей Минлоса — Синая и построения Добрушина нетрансляционно-инвариантного гиббсовского состояния [14]. При этом возникает новый вакуумный сектор с нетрансляционно-инвариантным вакуумом (т. е. «солитонная мера» не инвариантна относительно пространственных сдвигов).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 3 августа 1977 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Doplicher S., Haag R., Roberts J., Fields, observables and gauge transformations. I, Commun. Math. Phys. 13 (1969), 1—23.
2. Frölich J., New superselection sectors («Soliton states») in two dimensional Bose quantum field models, Commun. Math. Phys. 47 (1976), 269.
3. Coleman S., Classical lumps and their quantum descendants, Lectures at 1975 Intern. School «Ettore Majorana», preprint, 1976.
4. Рюэлль Д., Статистическая механика, М., «Мир», 1971.
5. Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой теории поля, М., «Мир», 1976.
6. Kadanoff L., The application of renormalisation group techniques to quarks and strings, Rev. Mod. Phys. 49, № 2 (1977), 267—296.
7. Malyshev V. A., One particle states and scattering for Markov processes, Lecture Notes in Math. 653 (1978), 173—193.
8. Минлос Р. А., Синай Я. Г., Явление разделения фаз при низких температурах в некоторых решетчатых моделях газа, Труды Моск. матем. об-ва 19 (1968), 113—178.
9. Добрушин Р. Л., Марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент, Проблемы передачи информации 7 (1971), 70—87.
10. Frölich J., Soliton Mass and Surface Tension in the $(\lambda|\varphi|)^4_2$. Quantum Field Theory, Phys. Rev. Lett. 38, № 12 (1977), 619—622.
11. Gallavotti G., Martin-Löf A., Surface Tension in the Ising Model, Commun. Math. Phys. 25 (1972), 87—126.
12. Kogut J., Susskind L., Hamiltonian formulation of Wilson's lattice gauge theories, Phys. Rev. D. 11, № 2 (1975), 395—408.
13. Robinson D., Return to equilibrium, Commun. Math. Phys. 31 (1973), 171—189.
14. Гуревич Б. М., Оселедец В. И., Распределения Гиббса и диссипативность У-диффеоморфизмов, ДАН СССР 209, № 5 (1973), 1021—1023.