ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1969

т. 187 № 6

Доклады Академии наук СССР
1969. Том 187, № 6

УДК 517.948.32

МАТЕМАТИКА

В. А. МАЛЫШЕВ

О РЕШЕНИИ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА — ХОПФА В ЧЕТВЕРТЬ-ПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 XII 1968)

Дискретные уравнения Винера — Хопфа в четверть-плоскости имеют вид

$$\eta_{ij} = \sum_{k,\, l=0}^{\infty} a_{i-k,\, j-l}\xi_{kl}, \quad ij = 0, 1, 2, \ldots$$

Мы будем считать, что $\sum\limits_{i\,j=0}^{\infty} |\eta_{ij}| < \infty$, $\sum\limits_{p,q=-\infty}^{\infty} |a_{pq}| < \infty$, и искать решение $\{\xi_{kl}\}_{k,\,l=0}$, также принадлежащее пространству l_1 последовательностей.

Одномерные уравнения Винера — Хопфа на полупрямой хорошо изучены (см. ([1], [2])). Многомерные уравнения с ядром, зависящим от разности аргументов, во всем пространстве решаются применением преобразования Фурье, а в полупространстве являются по существу уравнениями на полупрямой с параметром и решаются обычным методом факторизации (см. ([3], [4])). Прямое применение метода факторизации для уравнений (1) не проходит, кроме некоторых весьма частных случаев, например, когда разделяются переменные, т. е.

$$\sum_{p,q=-\infty}^{\infty} a_{pq}x^p y^q = a(x, y) = a(x)\tilde{a}(y),$$

ввиду чего требуется существенно новый подход.

Оказывается, что существует процедура явного решения этих уравнений, по крайней мере для случая, когда существует такое целое число $N > 0$, что $a_{pq} = 0$, если либо $|p| > N$, либо $|q| > N$. Идея такого алгоритма и излагается в настоящей работе. Мы в основном ограничиваемся случаем, когда $N = 1$.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathfrak{R}$ — кольцо функций $r(x, y) = \sum\limits_{i,j=-\infty}^{\infty} r_{ij}x^i y^j$ на торе $\{(x, y): |x| = |y| = 1\}$ таких, что $\sum\limits_{i,j=-\infty}^{\infty} |r_{ij}| < \infty$; $\mathfrak{R}_{\underset{x}{+}}$, $\mathfrak{R}_{\underset{x}{-}}$ — подкольца функций $r(x, y)$ таких, что $r_{ij} = 0$ соответственно для $i < 0$ и $i \geqslant 0$; $P_{\underset{x}{+}}$, $P_{\underset{x}{-}}$ — операторы проектирования на эти подкольца. Аналогично определяются $R_{\underset{y}{+}}$, $R_{\underset{y}{-}}$ и т. д. Рассмотрим оператор $A\xi = \{\sum a_{i-k,\, j-l}\xi_{kl}\}_{i,j=0}$ в пространстве l_1 последовательностей $\{\xi_{kl}\}_{k,\,l=0}^{\infty}$, определяемый матрицей $\|a_{pq}\|_{p,\,q=-\infty}^{\infty}$.

Теорема. *Оператор A является оператором Нётера тогда и только тогда, когда*

$$a(x, y) \neq 0, \quad |x| = |y| = 1; \tag{2}$$

$$\operatorname*{ind}_{|x|=1} a(x, 1) = \operatorname*{ind}_{|y|=1} a(1, y) = 0. \tag{3}$$

При выполнении этих условий оператор A является обратимым, т. е. $\dim\ker A = \dim\operatorname{coker} A = 0$. *Явное обращение оператора дается последовательностью формул* (7), (8), (9), (14).

Первое утверждение теоремы следует из результатов И. Б. Симоненко по локально нётеровым операторам (см. ([7], [8])) и теории многомерных уравнений Винера — Хопфа в полупространстве ([3], [4]). Доказательство второго утверждения и процедура обращения оператора A по существу даются ниже. Положим

$$\eta(x,y)=\sum_{ij=0}^{\infty}\eta_{ij}\,x^iy^j;\quad \xi(x,y)=\sum_{k,l=0}^{\infty}\xi_{kl}x^ky^l;$$
$$\xi(y)=\xi(0,y),\qquad \xi(x,0)=\tilde{\xi}(x),$$
$$b(y)=a_{-1,1}y+a_{-1,0}+a_{-1,1}\frac{1}{y};\qquad \tilde{b}(x)=a_{1,-1}x+a_{0,-1}+a_{-1-1}\frac{1}{x}.$$

Несложные выкладки показывают, что система (1) эквивалентна следующему уравнению в производящих функциях (символах):

$$\eta(x,y)=a(x,y)\,\xi(x,y)-\frac{1}{x}b(y)\,\xi(y)-\frac{1}{y}\tilde{b}(x)\,\tilde{\xi}(x)+a_{-1,-1}\frac{\xi_{00}}{xy}. \tag{4}$$

Лемма 1. *Система* (1) *имеет решение тогда и только тогда, когда существуют такие функции* $\xi(y)=\sum_{j=0}^{\infty}\xi_jy^j;\ \tilde{\xi}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{\xi}_ix^i$ *и константа* ξ, *причем* $\xi=\xi_0=\tilde{\xi}_0$, *что*

$$P_{\bar{y}}\left[\frac{1}{a_{\bar{y}}(x,y)}\left(\eta(x,y)+\frac{1}{x}b(y)\,\xi(y)+\frac{1}{y}\tilde{b}(x)\,\tilde{\xi}(x)-\frac{\xi a_{-1,1}}{xy}\right]=0, \tag{5}$$

$$P_{\bar{x}}\left[\frac{1}{a_{\bar{x}}(x,y)}\left(\eta(x,y)+\frac{1}{x}b(y)\,\xi(y)+\frac{1}{y}\tilde{b}(x)\,\tilde{\xi}(x)-\frac{\xi a_{-1,-1}}{xy}\right)\right]=0. \tag{6}$$

При этом для любого решения $(\tilde{\xi}(x),\xi(y),\xi)$ системы (5), (6) решение системы (1) находится по формуле

$$\xi(x,y)=\frac{1}{a_{\overset{+}{y}}(x,y)}P_{\overset{+}{y}}\left[\frac{1}{a_{\bar{y}}(x,y)}\left(\eta(x,y)+\frac{1}{x}b(x)\,\xi(y)\right)\right]. \tag{7}$$

Здесь мы положили $b(x,y)=\ln a(x,y)$, $a_{\overset{+}{y}}(x,y)=a(x,y)/a_{\bar{y}}(x,y)$, $a_{\bar{y}}(x,y)=\exp\Big[\sum_{\substack{j<0\\-\infty<i<\infty}}b_{ij}x^iy^j\Big]$, $b(x,y)=\sum_{i,j=-\infty}^{\infty}b_{ij}x^iy^j\in R$.

Возможность последнего представления следует при условиях (2) и (3) из обобщенной теоремы Винера (см. ([5])). Отметим, что применение метода факторизации в лемме 1 не приводит сразу к явному решению как в одномерном случае. Получившаяся система двух уравнений для функций от одного переменного объясняет значительно бо́льшую сложность сравнительно с первоначальной техникой Винера — Хопфа.

В нашем случае *

$$a(x,y)=\frac{a_{11}x^2+a_{01}x+a_{-1,1}}{xy}(y-y_0(x))(y-y_1(x)),\qquad a_{\bar{y}}(x,y)=1-\frac{y_0(x)}{y},$$

где $y_0(x)$ и $y_1(x)$ — однозначные ветви алгебраической функции, одна из которых $y_0(x)$ принимает значения строго внутри единичного круга при $|x|=1$, а вторая $y_1(x)$ — строго вне ее. Это нетрудно следует из свойств (2) и (3).

Подставляя выражения для $a_{\bar{y}}(x,y)$ в (5), получим **

---

* См. замечание в конце работы.

** Используя следующий факт: $P_{\bar{y}}\left(\frac{1}{1-y_0/y}\,\omega(y)\right)=\omega(y_0)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{y_0}{y}\right)^k$ для любой $\omega(y)\in R_y+$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} y^{-k}\Big(y_0^k \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i y_0^i \frac{1}{x} + y_0^{k-1}\widetilde{\omega}(x) + \frac{a_{-1,-1}}{x}\xi y_0^{k-1} + \eta(x, y_0)\Big) = 0, \qquad (8)$$

где $\omega(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i y^i = b(y)\xi(y) - \frac{a_{-1,-1}\xi}{y}$, $\widetilde{\omega}(x) = \widetilde{b}(x)\widetilde{\xi}(x) - \frac{a_{-1,-1}\xi}{x}$.

Отсюда можно получить эквивалентное условие

$$\Omega(y_0(x)) + \widetilde{\Omega}(x) = H(x), \qquad (9)$$

где обозначено $\Omega(x) = x\omega(x)$, $\widetilde{\Omega}(x) = x\widetilde{\omega}(x) + a_{-1,-1}\xi$, $H(x) = -xy_0(x)\eta(x, y_0(x))$.

Аналогично, для уравнения (6) получим

$$\widetilde{\Omega}(x_0(y)) + \widetilde{\Omega}(y) = \widetilde{H}(y), \qquad (10)$$

где $\widetilde{H}(y) = -yx_0(y)\eta(x_0(y)\eta(x_0(y), y)$.

Лемма 2. *У однородной системы*

$$\Omega(y_0(x)) + \widetilde{\Omega}(x) = 0, \qquad \widetilde{\Omega}(x_0(y)) + \widetilde{\Omega}(y) = 0$$

не существует непостоянных решений $\Omega(x)$ *и* $\widetilde{\Omega}(x)$, *принадлежащих кольцу* $\mathfrak{R}_x^+$.

Лемма 3. $\operatorname{ind} A = 0$.

Доказательство. При условиях (2) и (3) функция $a(x, y)$ осуществляет гомотопное нулю отображение тока $\{(x, y): |x| = |y| = 1\}$ на плоскость с выброшенной точкой (началом координат). Это следует из того, что отображение тора на единичную окружность $a(x, y) / |a(x, y)|$, соответствует нулевому элементу группы Брушлинского (см. ([12])). Таким образом, оператор A можно соединить путем с единичным оператором. Используя теперь факт, что ind есть локально постоянная функция на множестве нётеровых операторов, получаем доказательство леммы.

Уравнение (9) напоминает обобщенные краевые задачи Римана со сдвигом для аналитических функций, однако оно не совпадает с изученными случаями (см. ([6], [9])). Обозначим через Г единичную окружность на плоскости комплексного переменного C. Одна из трудностей состоит в том, что образ Г при отображении $y_0(x)$ или $y_1(x)$ может иметь самопересечения. Чтобы избавиться от этого, рассмотрим следующую конструкцию.

Пусть S_1 и S_2 — римановы поверхности функций $y(x)$ и $x(y)$ соответственно, а $h_1\colon S_1 \to \bar{C}$ и $h_2\colon S_2 \to \bar{C}$ — естественные разветвленные накрытия комплексной сферы $\bar{C}$; D — внутренность единичного круга. Из изложенного нетрудно видеть, что накрывающие пути $h_1^{-1}(\Gamma)$ и $h_2^{-1}(\Gamma)$ состоят каждый из двух непересекающихся простых замкнутых контуров на S_1 и S_2 соответственно. $h_1^{-1}(\Gamma)$ является границей для открытого множества $h_1^{-1}(D) \subset S_1$, а $h_2^{-1}(\Gamma)$ — для $h_2^{-1}(D) \subset S_2$.

Известно ([10]), что существует естественное конформное взаимно однозначное соответствие между римановыми поверхностями взаимно обратных алгебраических функций $y(x)$ и $x(y)$. Будем обозначать это соответствие $f\colon S_1 \to S_2$.

Теперь мы можем перенести уравнения (9) и (10) на одну из поверхностей, например на S_2. Введем функции $\Omega_1(p) = \Omega(h_2(p))$, $p \in h_2^{-1}(D)$; $\Omega_2(p) = \widetilde{\Omega}(h_1(f^{-1}(p)))$, $p \in fh_1^{-1}(D)$. Заметим, что одна компонента границы $fh_1^{-1}(\Gamma)$ множества $fh_1^{-1}(D)$ будет лежать внутри множества $h_2^{-1}(D)$, а другая вне его (обозначим эти компоненты соответственно Γ_1 и Γ_2). Аналогично одна из компонент $h_2^{-1}(\Gamma)$ (обозначаемая $\widetilde{\Gamma}_1$) лежит внутри $fh_1^{-1}(D)$, а другая $\widetilde{\Gamma}_2$ — вне его. Это следует из того, что, как было отмечено выше, одна из ветвей $y(x)$ при $|x| = 1$ лежит строго внутри единичного круга, а другая строго вне его.

В пересечении областей (непустом) $h_2^{-1}(D)$ и $fh_1^{-1}(D)$ уравнения (9) и (10) эквивалентны и имеют вид

$$\Omega_1(p) + \Omega_2(p) = H^*(p), \qquad (11)$$

где $H^*(p) = h^*(h_1 f^{-1}(p), h_2(p))$; $h^*(x, y) = -xyh(x, y)$. Применяя аналитическое продолжение, можно с помощью соотношения (11) доопределить функции $\Omega_1(p)$ и $\Omega_2(p)$ на области $G = fh_1^{-1}(D) \cup h_2^{-1}(D)$, где они также будут удовлетворять уравнению (11) (можно без ущерба считать, что $h(x, y)$ многочлен и, следовательно, продолжается на G). Область G ограничена кривыми Γ_2 и $\widetilde{\Gamma}_2$.

Для получения явного интегрального представления решения рассмотрим представление тока как фактор-группу его универсальной накрывающей C по решетке периодов $\{n\omega + n'\omega'\}$. Для данного двулистного накрытия γ тором S сферы $\overline{C}$ $(\gamma\colon S \to \overline{C})$ определяется эллиптический автоморфизм $\delta(\gamma)$ тора S, при котором две точки, имеющие один и тот же образ при отображении γ, переставляются. Из свойств эллиптических функций нетрудно вывести, что, поднимая $\delta(\gamma)$ на универсальную накрывающую C, мы получим (если перенести начало координат) автоморфизм C в виде $z \to -z$.

Прообразы кривых $\Gamma_{1,2}$ и $\widetilde{\Gamma}_{1,2}$ на некотором фундаментальном параллелограмме Π универсальной накрывающей будем обозначать теми же символами со штрихами; штрих для переменной и функции также будет обозначать поднятие на универсальную накрывающую.

Для функции $\Omega_1(p)$ имеют место соотношения, первое из которых определяется поднятием $\Omega_1(p)$ на риманову поверхность, а второе следует из (11)

$$\Omega_1[(\delta(h_2))(p)] = \Omega_1(p);$$

$$\Omega_1[(\delta(h_1f^{-1})(p)] - \Omega_1(p) = H^*[(\delta(h_1f^{-1})(p)] - H^*(p). \qquad (12)$$

Произведение эллиптических автоморфизмов $\delta(h_2)\delta(h_1f^{-1})$ на C дает сдвиг на некоторый вектор $2b$ (где b — вектор между центрами отражений для обоих автоморфизмов). Можно показать, что кривые $\Gamma_{1,2}$, $\widetilde{\Gamma}_{1,2}$ гомологичны и являются элементами канонического базиса гомологий на торе. Поэтому

$$\Omega_1'(p') = \Omega_1'(p' + \omega), \quad p' \in C;$$

$$\Omega_1'(p' + 2b) - \Omega_1'(p') = H^*(p' + 2b) - H^*(p') \qquad (13)$$

второе уравнение следует из обоих уравнений (12).

Решением системы (13), как нетрудно убедиться *, является функция (14)

$$\Omega_1'(p') = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2'} \zeta(p' - \tau')[H^*(\tau' + 2b) - H^*(\tau')]\, d\tau', \qquad (14)$$

где $\zeta(x)$ — функция Вейерштрасса, соответствующая периодам ω и $2b$. Это решение единственно (оно должно быть голоморфно ** в области, ограниченной кривыми Γ_2' и $\Gamma_2' + 2b$) с точностью до постоянной, так как однородная система (13) определяет голоморфную эллиптическую функцию, которая должна быть постоянной.

Замечание. Выше рассматривался по существу случай, когда род римановой поверхности S_1, а следовательно и S_2 равен 1. Случай рода 0 проще и здесь не рассматривается.

Выражаю искренною благодарность А. А. Боровкову, М. И. Вишику, Г. И. Эскину и А. Шнирельману за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 VII 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Wiener, E. Hopf, Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 696 (1931). [2] М. Г. Крейн, УМН, **13**, 5 (1958). [3] Л. С. Гольденштейн, И. И. Гохберг, ДАН, **131**, № 1, 9 (1960). [4] Л. С. Гольденштейн, ДАН, **155**, № 1 (1964). [5] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, 1963. [6] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, 1963. [7] И. Б. Симоненко, Изв. АН СССР, сер. матем., **29**, 3 (1965). [8] И. Б. Симоненко, Матем. сборн., **74**, 2 (1967). [9] Э. И. Зверович, Г. С. Литвинчук, УМН, **23**, 3 (1968). [10] Р. Неванлинна, Униформизация, ИЛ 1955. [11] Л. И. Чибрикова, Уч. зап. Казанск. гос. унив., **123**, кн. 10 (1964). [12] Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, 1964.

* Подобная задача для прямоугольника рассматривалась в ([11]).

** Полюса можно устранить добавлением подходящей эллиптической функции.