Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия I

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

6

Отдельный оттиск

1964

Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1964

В. А. МАЛЫШЕВ

ПОЧТИ ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ

Собственные значения эргодической динамической системы с чисто точечным спектром образуют группу. Естественным континуальным аналогом является следующее свойство спектрального типа σ некоторых динамических систем: $\sigma * \sigma \ll \sigma$, то есть свертка спектрального типа такой системы с самим собой эквивалентна или подчинена ему. Это свойство могло бы быть выполнено, если почти все сдвиги этой меры были бы эквивалентны ей самой (почти квазиинвариантная мера). Тогда эта мера была бы сосредоточена на подгруппе прямой (см. ниже теорему 1). Такие и почти инвариантные (см. ниже) меры, отличные от дискретных или лебеговской мер, отсутствуют на прямой. Все нижеизложенное можно перенести на случай более общих локально-бикомпактных групп.

Мы рассматриваем σ-конечные меры (пополненные или нет), определенные на всех борелевских множествах прямой R. Существенно то, что рассматриваемые меры не предполагаются регулярными.

Пусть R' есть множество всех тех x, для которых мера μ_x такая, что $\mu_x(E)=\mu(E+x)$, эквивалентна R'. Заметим, что R' есть подгруппа. Если μ конечна на всех компактных множествах (беровская мера), то R' есть замкнутая подгруппа, то есть счетная либо тривиальная для случая прямой (см. [1], теорема 7, стр. 265). Имеет место

Теорема 1. Если R' имеет положительную внутреннюю меру в смысле меры μ, то R' есть аналитическое и, следовательно, абсолютно измеримое множество.

Рассмотрим борелевское множество $B \subset R'$ положительной меры μ. Порожденная множеством B подгруппа $\{B\}$ есть объединение множеств вида: $B^k+(-B)^l$ $(k, l=1, 2, \ldots)$; $(-B)$ есть отражение множества B относительно точки O; знак $+$ обозначает арифметическую сумму и $B^k=\underbrace{B+B+\ldots+B}_{k\text{ раз}}$. Каждое множество этого вида аналитическое [2], и, следовательно, $\{B\}$ есть аналитическое множество как объединение счетного числа аналитических множеств.

Рассмотрим $\frac{R'}{\{B\}}$. Каждый смежный класс в силу квазиинвариантности μ относительно сдвигов из R' имеет положительную меру. Поэтому $\frac{R'}{\{B\}}$ не более чем счетная группа в силу σ-конечности меры μ.

Отсюда следует, что R' также есть аналитическое множество как объединение счетного числа аналитических множеств.

Если $\mu^*(R-R')=0$, то мера μ называется почти квазиинвариантной. Такая мера почти инвариантна, если $\mu(E)=\mu(E+x)$ для любого $x \in R'$ и для любого борелевского множества $E \subset R$.

Рассмотрим в R' σ-алгебру L' множеств, являющихся пересечением с R' борелевских множеств R. Отображение $(x, y) \to x-y$ измеримого пространства $(R', L') \times (R', L')$ в (R', L') будет при этом измеримым. Следовательно, R' является аналитической борелевской группой в смысле Макки (см. [3], стр. 141).

Из леммы 7.3 статьи [3] вытекает, что всякая почти квазиинвариантная мера μ на R' эквивалентна некоторой почти инвариантной мере. Достаточно, следовательно, изучить почти инвариантные меры, что мы и делаем далее. Следующая теорема 2 сводит изучение почти инвариантных мер к непрерывным мерам.

Теорема 2. Если μ почти инвариантна, то следующие условия эквивалентны: 1) μ содержит дискретную компоненту; 2) R' есть счетная подгруппа; 3) μ — мера, сосредоточенная на счетной подгруппе, все точки которой имеют одинаковую положительную меру.

$1 \to 2$. Если μ содержит дискретную компоненту, то R' не может быть несчетной в силу σ-конечности μ.

$2 \to 3$. По условию, $\mu^x(R-R')=0$. Если подгруппа счетна, то меры всех точек одинаковы в силу инвариантности меры μ относительно сдвигов из R' и положительны в силу того, что $\mu(R')>0$.

$3 \to 1$. Очевидно.

Теорема 3. На прямой нет непрерывных почти инвариантных мер, отличных от меры Лебега.

Согласно теореме 7.1 из [3] в аналитической борелевской группе R' существует локально-бикомпактная топология T', порождающая ту же самую σ-алгебру борелевских множеств L_1. Порождающую систему окрестностей нуля образуют в T' множества вида $E+(-E)$, где E есть любое множество положительной меры μ. Из доказательства следует также, что счетная подгруппа R' в топологии T' сепарабельна.

С другой стороны, обычная топология прямой R индуцирует на R' топологию T. Покажем, что T слабее T'.

Действительно, достаточно доказать, что в каждом как угодно малом интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ содержится некоторое множество вида $E+(-E)$, но для этого достаточно найти множество положительной меры E диаметра, меньшего ε. Если таких подмножеств в R' нет, то взяв интервал Δ длины, меньшей ε, получим, что $\mu(\Delta \cap R')=0$. Но счетное множество сдвигов множества $\Delta \cap R'$ покрывает всю подгруппу R', то есть $\mu(R')$ равнялось бы нулю, что невозможно.

Докажем, что $R'=R$, то есть что тождественное непрерывное (так как T слабее T') взаимно однозначное отображение $\varphi R'$ в R есть эпиморфизм. Рассмотрим φ на связной компоненте группы R' (в топологии T'). Так как связная компонента открыта, то на ней φ непрерывно. Но связная компонента сепарабельной коммутативной локально-бикомпактной топологической группы имеет вид: $R^n \times K$, где K есть биокомпактная группа (см. [4], теорема 51, стр. 274).

Так как образ бикомпактного множества при непрерывном отображении бикомпактен, а на прямой нет бикомпактных непустых подгрупп, то $K=0$.

Утверждаем, что $n \neq 0$, так как, по теореме 2, R' несчетна; и, следовательно, в силу сепарабельности ее связный компонент также несчетен.

Таким образом, имеем отображение φ: $R^n \to R$, взаимно однозначное непрерывное и аддитивное. В силу первых двух свойств $n=1$, а в силу последних двух φ должно иметь вид λx, $x \in R$, что и требовалось. Таким образом, μ оказывается инвариантной мерой относительно R. В силу единственности инвариантной меры (см. [1], стр. 254) μ есть мера Лебега.

В заключение хочу искренне поблагодарить В. М. Алексеева за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Халмош П. Теория меры. ИЛ, М., 1953.
2. Sierpinski W. Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel. «Fundam. math.», 1, 1920.
3. Mackey G. W. Borel structures in groups and their cluals. «Trans. Amer. Math. Soc.», 85, No. 1, 134—165, 1957.
4. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. Гостехиздат, М., 1954.

Поступила в редакцию
28. 6 1963 г.

Кафедра
теории функций и функционального анализа

V. A. MALYSHEV

Almost invariant measures

The main result of this paper is the proof of the absence on a straight line of almost invariant measures other than Lebesgue or discrete measures.