РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • «Наука»

Том 37
Выпуск 2, 1992 г.
апрель, май, июнь

ИГНАТЮК И. А., МАЛЫШЕВ В. А., СИДОРАВИЧЮС В.

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА СТОХАСТИЧЕСКОГО КВАНТОВАНИЯ. I

Гиббсовские случайные поля определяются и изучаются обычно либо с помощью термодинамического предельного перехода из конечного объема, либо с помощью уравнений Добрушина – Лэнфорда – Рюэлля [2]. Метод стохастического квантования основан на замечании, состоящем в том, что гиббсовское поле можно получить также как предельное для эволюции во времени системы стохастических дифференциальных уравнений специального вида – уравнений Ланжевена, строящихся по потенциалу соответствующего гиббсовского поля.

Этот метод впервые введен физиками [7]. Общепринятой физической интерпретации этот метод так и не получил, и сейчас он трактуется [6] или как теоретическое, или как вычислительное средство изучения и аппроксимации гиббсовских полей. Время в уравнениях Ланжевена иногда называется машинным временем, и считается, что моделировать методом Монте-Карло эволюцию уравнений Ланжевена проще, чем моделировать непосредственно гиббсовские поля.

Мы рассматриваем гиббсовские поля на решетке. Сходимость эволюции (эргодичность) уравнений Ланжевена в конечном объеме есть несложный факт из теории конечномерных уравнений Ито, который может быть доказан, например, с помощью функций Ляпунова.

Основной результат настоящей статьи состоит в доказательстве сходимости для бесконечной системы уравнений Ланжевена в случае слабого взаимодействия. Класс гиббсовских полей, который мы рассматриваем, соответствует решетчатым $P(\varphi)$-моделям эвклидовой квантовой теории поля. Мы рассматриваем грассмановы поля (в частности, возмущение

плотностью

$$f(\lambda)=\left[2\sum_{y\in\mathbf{Z}^d} a_y e^{-i(\lambda,\,y)}\right]^{-1}, \qquad \lambda\in[-\pi,\pi]^d,$$

где коэффициенты a_y, $y\in\mathbf{Z}^d$, удовлетворяют условиям:

(a) $a_y\neq 0$ только для конечного числа $y\in\mathbf{Z}^d$ (множество тех $y\in\mathbf{Z}^d$, для которых $a_y\neq 0$, обозначим через Q),

(b) $a_y=a_{-y}$ для всех $y\in\mathbf{Z}^d$,

(c) $a_0-\sum_{y\neq 0}|a_y|>0.$

Мера, соответствующая данному гауссовскому полю (обозначим ее через μ_0) может быть получена как предел в смысле слабой сходимости конечномерных распределений гиббсовских мер $\mu_{\Lambda,0}$, $\Lambda=[-N_\Lambda, N_\Lambda)^d\cap\mathbf{Z}^d$, с квадратичным потенциалом

$$U_\Lambda^0=\sum_{x\in\Lambda} a_0\xi_x^2+\sum_{\substack{x\neq y\\ x,\,y\in\Lambda}} a^\Lambda_{x-y}\xi_x\xi_y,$$

где $a_y^\Lambda=a_y$ для всех $y\in\Lambda$, с периодическими граничными условиями: $a^\Lambda_{y+N_\Lambda e}=a_y^\Lambda$ для всех $y\in\Lambda$, $e\in\mathbf{Z}^d$, $|e|=1$.

Система уравнений Ланжевена для μ_0 имеет вид

$$d\xi_x(t)=-\sum_{y\in Q} a_y\xi_{x+y}(t)\,d(t)+dw_x(t)\,dt, \qquad x\in\mathbf{Z}^d. \tag{2}$$

Пусть начальные условия $\xi_x(0)$, $x\in\mathbf{Z}^d$,— гауссовское, трансляционно-инвариантное случайное поле, $\langle\xi_x(0)\rangle=0$, $x\in\mathbf{Z}^d$, и

$$|\langle\xi_0(0)\xi_x(0)\rangle|\leqslant c_0e^{-\gamma_0|x|}, \qquad c_0>0,\ \gamma_0>0 \tag{3}$$

для всех $x\in\mathbf{Z}^d$. Соответствующую гауссовскую меру на $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$ обозначим $\mu_0(0)$. Символ $\langle\cdot\rangle$ здесь и далее обозначает математическое ожидание. Когда нужно указать меру μ, относительно которой берется математическое ожидание, будем записывать $\langle\cdot\rangle_\mu$.

Легко видеть, что решением системы (2) в данном случае является гауссовский процесс $\{\xi_x(t),\ x\in\mathbf{Z}^d\}$, $t\in\mathbf{R}_+$, и для исследования эволюции этого процесса достаточно рассмотреть первые и вторые моменты: $\langle\xi_x(t)\rangle$ и $\langle\xi_x(t)\xi_y(s)\rangle$, $x, y\in\mathbf{Z}^d$, $t, s\in\mathbf{R}_+$. Поскольку выражение для моментов любого порядка здесь выписывается в явном виде, доказательство сходимости (см. ниже) к инвариантному распределению μ_0 в данном случае не представляет труда.

Рассмотрим теперь гиббсовскую перестройку μ_Λ, $\Lambda\subset\mathbf{Z}^d$, гауссовской меры μ_0. Пусть

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\mu_0}=\frac{1}{Z_\Lambda}\exp\left\{-\varepsilon\sum_{x\in\Lambda}P'(\xi_x)\right\}, \qquad \varepsilon>0,$$

где $P(\xi)$ — ограниченный снизу полином.

<1 функции $g(z)$ получим

$$\langle g(\zeta_x^0(T))\rangle_{\mu_\varepsilon(T)} = \Big\langle g(\zeta_x^0(T)) \prod_{(x,\,t)\in V(\Lambda,\,T)} F_{x,\,t+T}\Big\rangle_{\mu_0{}^\Lambda[0,\,T]} =$$

$$= \langle g(\zeta_x^0(T))\rangle_{\mu_0{}^\Lambda[0,\,T]} Z^T_{\Lambda,\,V(\Lambda,\,T)} + \int_0^1 ds \Big\{ \sum_{\substack{x_1\in\Lambda \\ t\in\{-T,\,0\}}} \langle \zeta_x^0(T)\,\zeta_{x_1}^0(t+T)\rangle_{\mu_0{}^\Lambda[0,\,T]} \times$$

$$\times \Big\langle \frac{d}{d\zeta_x^0(T)} g(\zeta_x^0(T))\, F_{x,\,t+1}\Big(\delta_{t,\,-T}\frac{d}{d\zeta_{x_1}^0(0)} + \delta_{(t,\,0)}(1-\delta_{x,\,x_1})\Big) \times$$

$$\times \frac{d}{d\zeta_{x_1}^0(T)} \prod_{\substack{(y,\,\tau)\in V(\Lambda,\,T) \\ (y,\,\tau)\neq(x,\,1)}} F_{y,\,\tau+T}\Big\rangle_{R^s_{\{(x,\,1)\}}(\mu_0{}^\Lambda[0,\,T])} +$$

$$+ \sum_{\substack{(x_1,\,t)\in V(\Lambda,\,T) \\ t\neq 1,\,-T}} \sum_{y\in Q} \int_{t+T-1}^{t+T} d\tau_1 \langle \zeta_x^0(T)\,\zeta_{x_1}^y(\tau_1)\rangle \Big\langle \frac{d}{d\zeta_x^0(T)} g(\zeta_x^0(T))\, F_{x,\,T+1} \times$$

$$\times \frac{d}{d\zeta_{x_1}^y(\tau_1)} U_\varepsilon(\zeta_{x_1}^2(\tau_1),\, z\in Q) \prod_{\substack{(y,\,\tau)\in V(\Lambda,\,T) \\ (y,\,\tau)\neq(x,\,1)}} F_{(y,\,\tau)}\Big\rangle_{R^s_{\{(x,\,1)\}}(\mu_0{}^\Lambda[0,\,T])}\Big\}.$$

Итерируя равенство (22) с использованием формулы интегрирования по частям, получим (19) и (21).

Доказательство кластерных оценок (19) и (20) дословно повторяет рассуждения в [4], гл. IV, § 7 и в [5], гл. 3, § 1, с использованием первого неравенства в (12) и следующего утверждения.

Лемма 3. Справедлива оценка

$$U_\varepsilon(\zeta^y,\, y\in Q) \geqslant c_1 + c_2\varepsilon \sum_{y\in Q} (\zeta^y)^l + c_3\varepsilon^2 \sum_{y\in Q} (\zeta^y)^{2(l-1)},$$

и для любых $m\in\mathbf{Z}_+$ и $z\in Q$

$$\left|\frac{\partial^m}{(\partial\zeta^z)^m} U_\varepsilon(\zeta^y,\, y\in Q)\right| \leqslant c_1\varepsilon^{m/l} + c_2\varepsilon \sum_{y\in Q} |\zeta^y|^{l-m} + c_3\varepsilon^2 \sum_{y\in Q} |\zeta^y|^{2(l-1)-m}$$

при всех $\zeta^y\in\mathbf{R}$, $y\in Q$, где c_1, c_2, c_3 — некоторые положительные константы.

Справедливость утверждения этой леммы легко следует из условия (с) на коэффициенты a_y, $y\in Q$. Величины $k_\Gamma^{\Lambda,\,T}(g)$, $k_\Gamma^{\Lambda,\,T}$, $c_{x,\,t}^{\Lambda,\,T}$, $\Gamma\subset\Lambda\times\{-T+1,\dots,0\}$, используя формулу интегрирования по частям (21), можно выписать в явном виде. Существование пределов этих величин при $\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^d$ и $T\to\infty$ и независимость этих пределов от начального распределения $\mu_0{}^\Lambda(0)$ непосредственно следуют из сходимости $\mu_0{}^\Lambda(t)\to\mu_0$ при $\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^d$, $t\to\infty$, в смысле слабой сходимости конечномерных распределений.

Из утверждения 3 и утверждения 4, используя стандартные рассуждения в теории кластерных разложений [4], нетрудно вывести существование пределов

$$\lim_{T\to\infty}\lim_{\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^d} \langle g(\xi_{x_0}(T))\rangle_{\mu_\varepsilon{}^\Lambda(T)} = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^d}\lim_{T\to\infty} \langle g(\xi_0(T))\rangle_{\mu_\varepsilon{}^\Lambda(T)}$$

и показать, что они не зависят от начального распределения $\mu_0{}^\Lambda(0)$.

нетрудно получить

$$\frac{d}{dt} c_{tt}(x) = -2\sum_y a_y c_{tt}(x+y) + \delta_{x0},$$

$$\frac{d}{dt} c_{ts}(x) = -\sum_y a_y c_{ts}(x+y) \text{ при } t > s,\ x \in \mathbf{Z}^d,$$

где δ_{x0} — символ Кронекера.

Переходя здесь к преобразованию Фурье

$$\tilde{c}_{ts}(\lambda) = \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} e^{-i(\lambda,\, x)} c_{ts}(x)$$

и решая полученные уравнения, находим при $t \geqslant s$

$$\tilde{c}_{ts}(\lambda) = e^{-\alpha(\lambda)(t-s)} \left\{ \frac{1}{2\alpha(\lambda)} - \frac{1}{2\alpha(\lambda)} e^{-2\alpha(\lambda)s} + \tilde{c}_0(\lambda) e^{-2\alpha(\lambda)s} \right\}, \tag{6}$$

где $\tilde{c}_0(\lambda) = \tilde{c}_{00}(\lambda)$ и $\alpha(\lambda) = \sum\limits_y a_y e^{-i(\lambda,\, y)}$. Отсюда в силу (3) и условия (с) на коэффициенты a_y, $y \in \mathbf{Z}^d$, справедливы неравенства

$$\begin{gathered} |c_{ts}(x)| \leqslant c_2 \exp\{-\gamma_2|t-s| - \gamma_2|x|\}, \\ |c_{tt}(x) - c(x)| \leqslant c_2 \exp\{-\gamma_2 t - \gamma_2|x|\}, \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$c(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\ \pi]} \frac{e^{i(\lambda,\, x)}}{2\alpha(\lambda)} d\lambda, \quad \gamma_2 > 0, \quad c_2 > 0, \qquad x \in \mathbf{Z}^d.$$

Из (7) легко следует сходимость конечномерных распределений $\{\xi_x(t),\ x \in \mathbf{Z}^d\}$ при $t \to \infty$.

Для доказательства теоремы в общем случае мы воспользуемся конечномерными аппроксимациями решения системы (5).

3. Конечномерные аппроксимации решения. Пусть $\Lambda = [-N,\ N)^d \cap \mathbf{Z}^d$ и пусть $Q \subset \Lambda$.

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$d\xi_x^\Lambda(t) = -\sum_y a_y \xi_{x+y}^\Lambda(t)\, dt - \varepsilon p(\xi_x^\Lambda(t))\, dt + dw_x(t), \quad x \in \Lambda, \tag{8}$$

где граничные условия периодичны, а начальным условиям $\xi_x^\Lambda(0)$, $x \in \Lambda$, при $\varepsilon = 0$ соответствует гауссовская мера $\mu_0^\Lambda(0)$ с нулевыми средними $\langle \xi_x^\Lambda(0) \rangle_{\mu_0^\Lambda(0)} = 0$, $x \in \Lambda$, и ковариациями

$$\langle \xi_0^\Lambda(0)\, \xi_x^\Lambda(0) \rangle_{\mu_0^\Lambda(0)} = c_0^\Lambda(x) = \sum_{y\in\mathbf{Z}^d} c_0(x + 2Ny), \qquad x \in \Lambda, \tag{9}$$

где $c_0(y) = \langle \xi_0(0)\, \xi_0(y) \rangle_{\mu_0(0)}$, а при $\varepsilon > 0$ начальным условиям соответствует гиббсовская перестройка $\mu_\varepsilon^\Lambda(0)$ этой гауссовской меры с потенциалом

$$\varepsilon \sum_{x\in\Lambda} P_0(\xi_x(0)).$$

$$+\frac{\varepsilon}{|Q|}\Big(a_0-\sum_{y\in Q}|a_y|\Big)\sum_{y\in Q}\zeta_x{}^y(t)\,p(\zeta_x{}^y(t))-$$
$$-\frac{\varepsilon}{2}p'(\zeta_x{}^0(t))+\frac{\varepsilon^2}{2|Q|}\sum_{y\in Q}p^2(\zeta_x{}^y(t)). \qquad (17)$$

Тогда из (16) получим

$$\frac{d\mu_\varepsilon{}^\Lambda[0,T]}{d\mu_0{}^\Lambda[0,T]}=\frac{1}{Z}\exp\Big\{-\varepsilon\sum_{x\in\Lambda}\Big(\frac{1}{2}P(\zeta_x{}^0(T))-$$
$$-\frac{1}{2}P(\zeta_x{}^0(0))+P_0(\zeta_x{}^0(0))\Big)-\sum_{x\in\Lambda}\int_0^T U_\varepsilon(\zeta_x{}^y(t),\,y\in Q)\,dt\Big\}. \qquad (18)$$

Пусть $x_0\in\Lambda$ и $g(z)$ — функция, аналитичная и ограниченная в полосе $|\mathrm{Im}\,z|<1$. Покажем, что при $T\to\infty$

$$\langle g(\xi_x(T))\rangle_{\mu_\varepsilon(T)}\to\langle g(\xi_x)\rangle_{\mu_\varepsilon}.$$

Для этого получим сначала кластерное разложение для $\langle g(\xi_x(T))\rangle_{\mu_\varepsilon{}^\Lambda(T)}$. Здесь удобно считать $T\in\mathbf{R}_+$ целым, что никак не ограничивает общности рассуждений.

Определим «статсуммы». Пусть $V(\Lambda,T)=\Lambda\times\{-T,\dots,1\}$, $V\subseteq V(\Lambda,T)$; положим

$$Z^T_{\Lambda,V}=\Big\langle\prod_{(x,t)\in V}F_{x,t+T}\Big\rangle_{\mu_0{}^\Lambda[0,T]},$$

где

$$F^T_{x,t}=\exp\Big\{-\varepsilon\delta_{0,t}\Big(P_0(\zeta_x{}^0(0))-\frac{1}{2}P(\zeta_x{}^0(0))\Big)-$$
$$-(1-\delta_{0,t})(1-\delta_{T+1,t})\int_{t-1}^{t}U_\varepsilon(\zeta_x{}^y(s),\,y\in Q)\,ds-\frac{\varepsilon}{2}\delta_{T+1,t}P(\zeta_x{}^0(T))\Big\},$$

$\delta_{0,t}$ и $\delta_{T+1,t}$ — символы Кронекера.

Утверждение 3. *Для любой аналитической и ограниченной в полосе* $|\mathrm{Im}\,z|<1$ *функции* $g(z)$

$$\langle g(\xi_x(T))\rangle_{\mu_\varepsilon{}^\Lambda(T)}=\langle g(\xi_x(T))\rangle_{\mu_0{}^\Lambda(T)}+\sum k^{\Lambda,T}_{\Gamma,x}(g)\,Z^T_{\Lambda,V(\Lambda,T)\setminus\Gamma}/Z_\Lambda, \qquad (19)$$

где сумма берется по всевозможным подмножествам $\Gamma\subset\Lambda\times\{-T,\dots,1\}$, $|\Gamma|\geqslant2$, *а величины* $k^{\Lambda,T}_{\Gamma,x}(g)$ *удовлетворяют условиям*:

(1) *для всех* $\Gamma\subset V(\Lambda,T)$ *существуют пределы*

$$\lim_{\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^d}\lim_{T\to\infty}k^{\Lambda,T}_{\Gamma,x}(g)=\lim_{T\to\infty}\lim_{\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^d}k^{\Lambda,T}_{\Gamma,x}(g)=k_{\Gamma,x}(g),$$

и эти пределы не зависят от распределения $\mu_\varepsilon{}^\Lambda(0)$,

(2) *при достаточно малых* $\varepsilon>0$

$$\sum_{\substack{\Gamma\subset V(\Lambda,T)\\|\Gamma|=n}}|k^{\Lambda,T}_{\Gamma,x}(g)|\leqslant c_1(c_2\varepsilon^{1/l})^{n-1}, \qquad (20)$$

где l — *степень полинома* $P(\xi)$ *и все константы не зависят от* Λ *и* T.

где

$$c^{\Lambda}(x)=\sum_{z\in\mathbf{Z}^d}\langle\xi_0\xi_{x+2zN}\rangle_{\mu_0}$$

и константы $c_3>0$, $\gamma_3>0$ не зависят от Λ.

Рассмотрим теперь случай $\varepsilon>0$, $\varepsilon<\varepsilon_0$.

Лемма 1. *Пусть* $\{\xi_x(t),\ x\in\Lambda\}$, $t\in\mathbf{R}_+$,*— решение системы* (8) *с периодическими граничными условиями и начальными условиями* $\xi_x(0)$, $x\in\Lambda$, *причем*

$$\max_{x\in\Lambda}\langle\xi_x^2(0)\rangle<\varkappa_0, \tag{13}$$

где константа $\varkappa_0>0$ *не зависит от* Λ.

Тогда для любого $t\in\mathbf{R}_+$

$$\max_{x\in\Lambda}\langle\xi_x^2(t)\rangle\leqslant c_4e^{\gamma_4t}, \tag{14}$$

где константы $c_4>0$ *и* γ_4 *не зависят от* Λ.

Доказательство. Действительно, из (13) следует (см., например, [1]), что для любого $T\in\mathbf{R}_+$

$$\max_{t\in[0,\,T]}\max_{x\in\Lambda}\langle\xi_x^2(t)\rangle\leqslant C(T)<\infty.$$

Для того чтобы получить (14), воспользуемся формулой Ито:

$$d\xi_x^2(t)=-2\sum_{y\in Q}a_y\xi_x(t)\,\xi_{x+y}(t)\,dt-2\varepsilon\xi_x(t)\,p(\xi_x(t))\,dt+2\xi_x(t)\,dw_x(t)+dt.$$

Отсюда

$$\langle\xi_x^2(t)\rangle\leqslant\langle\xi_x^2(0)\rangle+2\sum_{y\in Q}|a_y|\int_0^t|\langle\xi_x(\tau)\,\xi_{x+y}(\tau)\rangle|\,d\tau+ct,$$

где $c=\mathrm{const}>0$. Здесь мы воспользовались ограниченностью снизу полинома $\xi p(\xi)$. Таким образом,

$$\max_{x\in\Lambda}\langle\xi_x^2(t)\rangle\leqslant\max_{x\in\Lambda}\langle\xi_x^2(0)\rangle+2\sum_{y\in Q}|a_y|\int_0^t\max_{x\in\Lambda}\langle\xi_x^2(\tau)\rangle\,d\tau+ct,$$

и, следовательно,

$$\max_{x\in\Lambda}\langle\xi_x^2(t)\rangle\leqslant\left(\max_{x\in\Lambda}\langle\xi_x^2(0)\rangle+\frac{c}{2\sum_{y\in Q}|a_y|}\right)\exp\left\{2\sum_{y\in Q}|a_y|\cdot t\right\}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\Lambda_1\subset\Lambda_2\subset\mathbf{Z}^d$, $\{\xi_x^{(j)}(t),\ x\in\Lambda_j\}$, $t\in\mathbf{R}_+$,*— решение системы* (8) *при* $\Lambda=\Lambda_j$, $j=1,\ 2$, *с периодическими граничными условиями, и пусть* $\xi_x^{(j)}(0)=\xi_x^{(2)}(0)$ *для всех* $x\in\Lambda_1$ *с вероятностью* 1, *и*

$$\max_{x\in\Lambda_2}\langle(\xi_x^{(2)}(0))^2\rangle\leqslant\varkappa_0,$$

где $\varkappa_0=\mathrm{const}>0$ *не зависит от* Λ_2.

Тогда для любого $t\in\mathbf{R}_+$ и любого $x\in\Lambda_1$

$$\langle(\xi_x^{\Lambda_1}(t)-\xi_x^{\Lambda_2}(t))^2\rangle\leqslant c_5'\,\frac{(c_5t)^{q\rho(x,\,\partial\Lambda_1)}}{[q\rho(x,\partial\Lambda_1)]!}\,e^{\gamma_5 t},$$

где $q=1/\max\{|y|,\ y\in Q\}$, $\rho(x,\ \partial\Lambda_1)$ — расстояние от x до границы куба Λ_1, $[q\rho(x,\ \partial\Lambda_1)]$ — целая часть числа $q\rho(x,\ \partial\Lambda_1)$, $c_5>0$, $c_5'>0$ $\gamma_5>0$ — константы, не зависящие от Λ_1, Λ_2, и x, t.

Доказательство. Действительно, используя формулу Ито и свойство монотонности полинома нечетной степени:

$$(\xi-\eta)(p(\xi)-p(\eta))\geqslant-K(\xi-\eta)^2$$

для всех ξ, $\eta\in\mathbf{R}$ где $K=\mathrm{const}>0$, нетрудно получить

$$\langle(\xi_x^{\Lambda_1}(t)-\xi_x^{\Lambda_2}(t))^2\rangle\leqslant\mathrm{const}\sum_{y\in Q}\int_0^t\langle(\xi_{x+y}^{\Lambda_1}(s)-\xi_{x+y}^{\Lambda_2}(s))^2\rangle\,ds.$$

Итерируя это неравенство для всех $x+y\in\Lambda_1$ и используя лемму 1 в случае $x+y\in\Lambda_2\setminus\Lambda_1$, получим

$$\langle(\xi_x^{\Lambda_1}(t)-\xi_x^{\Lambda_2}(t))^2\rangle\leqslant\mathrm{const}\sum_n(c_1t)^n\,e^{c_2t},$$

где константы $c>0$, $c'>0$ и $\gamma'>0$ не зависят от Λ_1, Λ_2, x и t и суммирование идет по всем $n\geqslant[q\rho(x,\ \partial\Lambda_1)]$. Из последнего неравенства легко следует утверждение леммы 2.

Докажем теперь утверждение 1.

Заметим прежде всего, что в силу (3) и (9)

$$|\langle\xi_0(0)\,\xi_x(0)\rangle_{\mu_0\Lambda(0)}|\leqslant c_6e^{-\gamma_6|x|},\tag{14'}$$

$$|\langle\xi_0(0)\,\xi_x(0)\rangle_{\mu_0\Lambda(0)}-\langle\xi_0(0)\,\xi_x(0)\rangle_{\mu_0(0)}|\leqslant c_6e^{-\gamma_6(|x|+2N)},$$

где $\Lambda=[-N,\ N)\cap\mathbf{Z}^d$ и константы $c_6>0$, $\gamma_6>0$ не зависят от Λ. Рассматривая кластерное разложение величин $\langle(\xi_x^{\Lambda}(0))^2\rangle_{\mu_\varepsilon{}^\Lambda(0)}$ (см. [4], гл. IV. § 7) и используя (14′), можно показать, что для любого $x\in\Lambda$

$$\langle(\xi_x(0))^2\rangle_{\mu_\varepsilon{}^\Lambda(0)}\leqslant\varkappa_0<\infty,$$

где $\varkappa_0=\mathrm{const}>0$ не зависит от Λ и $\mu_\varepsilon{}^\Lambda(0)\to\mu_\varepsilon(0)$ при $\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^d$ в смысле слабой сходимости конечномерных распределений. Отсюда и из леммы 2 следует утверждение 1.

4. Доказательство теоремы 1. Как уже было показано в п. 2, гауссовская мера μ_0 с нулевым средним и спектральной плотностью

$$f(\lambda)=\Big[2\sum_{y\in Q}a_ye^{-i(\lambda,\,y)}\Big]^{-1}$$

является инвариантной мерой для системы (1).

Из утверждения 2 нетрудно вывести, что инвариантной мерой для системы (8) при $\varepsilon=0$ является гауссовская мера $\mu_0{}^\Lambda$ с нулевыми средними и ковариациями

$$\langle \xi_x \xi_{x+y} \rangle_{\mu_0^\Lambda} = \sum_{z \in Z^d} \langle \xi_x \xi_{x+y+2Nz} \rangle_{\mu_0}, \qquad x, x+y \in \Lambda.$$

Рассмотрим случай $\varepsilon > 0$. Из уравнений Колмогорова легко следует, что инвариантной мерой для системы (8) при $\varepsilon > 0$ является гиббсовская перестройка μ_ε^Λ меры μ_0^Λ с потенциалом $\varepsilon \cdot \sum_{x \in \Lambda} P(\xi_x)$.

Поскольку $\mu_\varepsilon^\Lambda \to \mu_\varepsilon$ при $\Lambda \uparrow Z^d$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$ в смысле слабой сходимости конечномерных распределений, утверждение 1 обосновывает инвариантность меры μ_ε для системы (2).

Для доказательства сходимости к инвариантному распределению воспользуемся формулой Гирсанова

$$\frac{d\mu_\varepsilon^\Lambda[0,T]}{d\mu_0^\Lambda[0,T]} = \exp\left\{-\varepsilon \sum_{x \in \Lambda} \int_0^T p(\xi_x(t))\, dw_x(t) - \right.$$
$$\left. - \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{x \in \Lambda} \int_0^T p^2(\xi_x(t))\, dt \right\} \frac{d\mu_\varepsilon^\Lambda(0)}{d\mu_0^\Lambda(0)} \tag{15}$$

(см., например, [1]). Учитывая теперь, что

$$\frac{d\mu_\varepsilon^\Lambda(0)}{d\mu_0^\Lambda(0)} = \frac{1}{Z} \exp\left\{-\varepsilon \cdot \sum_{x \in \Lambda} P_0(\xi_x(0))\right\},$$

и используя формулу Ито, преобразуем (15) к виду

$$\frac{d\mu_\varepsilon[0,T]}{d\mu_0[0,T]} = \frac{1}{Z} \exp\left\{-\sum_{x \in \Lambda} \left(\frac{\varepsilon}{2} P(\xi_x(T))\right) - \frac{\varepsilon}{2} P(\xi_x(0)) + \varepsilon P_0(\xi_x(0)) + \right.$$
$$\left. + \varepsilon \sum_{y \in Q} a_y \int_0^T p(\xi_x(t))\, \xi_{x+y}(t)\, dt - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T p'(\xi_x(t))\, dt + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^T p^2(\xi_x(t))\, dt \right\}. \tag{16}$$

Таким образом, мера $\mu_\varepsilon^\Lambda[0, T]$ является гиббсовской перестройкой гауссовской меры $\mu_0^\Lambda[0, T]$. Для доказательства теоремы мы воспользуемся известным методом кластерных разложений для гиббсовских перестроек гауссовских мер ([4] гл. IV, § 7), сделав при этом необходимые обобщения.

Перепишем (16) в удобном для нас виде.

Пусть $\{\xi_x(t), x \in \Lambda\}$, $t \in \mathbf{R}_+$ — решение системы (8) при $\varepsilon \geqslant 0$. Определим процесс $\{\zeta_x^y(t), x \in \Lambda, y \in Q\}$, $t \in \mathbf{R}_+$, положив с вероятностью единица $\zeta_x^y(t) = \xi_{x+y}(t)$ для всех $x \in \Lambda$, $y \in Q$, $t \in \mathbf{R}_+$. Для меры, соответствующей процессу $\{\zeta_x^y(t), x \in \Lambda, y \in Q\}$, $t \in [0, T]$, сохраним обозначение $\mu_\varepsilon^\Lambda[0, T]$. Пусть

$$U_\varepsilon(\zeta_x^y(t), y \in Q) = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\substack{y \in Q \\ y \neq 0}} [\,|a_y|\, \zeta_x^0(t)\, p(\zeta_x^0(t)) + a_y \zeta_x^0(t)\, p(\zeta_x^y(t)) +$$
$$+ a_y \zeta_x^y(t)\, p(\zeta_x^0(t)) + |a_y|\, \zeta_x^y(t)\, p(\zeta_x^y(t))] +$$

Пусть $\mu_\varepsilon^\Lambda[0, T]$ — мера в пространстве реализаций, соответствующая решению системы (8) на отрезке времени $[0, T]$ а $\mu_\varepsilon[0, T]$ — мера, соответствующая решению системы (2) на отрезке времени $[0, T]$, $T\in\mathbf{R}_+$.

Утверждение 1. *При* $\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^d$ *и* $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$

$$M_\varepsilon^\Lambda[0, T]\to M_\varepsilon[0, T]$$

в смысле слабой сходимости конечномерных распределений.

Прежде чем переходить к доказательству этого утверждения, рассмотрим отдельно случай $\varepsilon=0$.

Утверждение 2. *Пусть* $\{\xi_x(t),\ x\in\mathbf{Z}^d\}$, $t\in\mathbf{R}_+$,— *решение линейной системы* (2), *а* $\{\xi_x^\Lambda(t),\ x\in\mathbf{Z}^d\}$ — *решение системы* (8) *при* $\varepsilon=0$. *Тогда*

$$\langle\xi_x^\Lambda(t)\rangle=\langle\xi_x(t)\rangle=0$$

для всех $x\in\Lambda$ *и* $t\in\mathbf{R}_+$ *и*

$$\langle\xi_x^\Lambda(t)\,\xi_y^\Lambda(s)\rangle=\sum_{z\in\mathbf{Z}^d}\langle\xi_x(t)\,\xi_{y+2zN}(s)\rangle \tag{10}$$

для всех $x,\ y\in\Lambda$, $t,\ s\in\mathbf{R}_+$.

Доказательство. В силу периодичности граничных условий системы (8) достаточно рассмотреть $\langle\xi_x^\Lambda(t)\,\xi_y^\Lambda(s)\rangle=c_{ts}^\Lambda(x-y)$ при $x-y\in\Lambda$. Выписывая уравнение для $c_{ts}^\Lambda(x)$, $x\in\Lambda$, переходя в них к преобразованию Фурье

$$\tilde c_{ts}^\Lambda(\lambda_k)=\sum_{x\in\Lambda}e^{-i(\lambda_k,\,x)}c_{ts}^\Lambda(x),$$

где $\lambda_k=\dfrac{\pi}{N}k$, $k\in\Lambda$, и решая полученные уравнения, находим

$$\tilde c_{ts}^\Lambda(\lambda_k)=\left[\frac{1}{2\alpha(\lambda_k)}\left(1-e^{-\alpha(\lambda_k)s}\right)+\tilde c_0^\Lambda(\lambda_k)\,e^{-2\alpha(\lambda_k)s}\right]e^{-\alpha(\lambda_k)(t-s)}, \tag{11}$$

где, как и раньше,

$$\alpha(\lambda)=\sum_y a_y e^{-i(\lambda,\,y)},\qquad \lambda\in[-\pi,\pi]^d,\qquad \lambda_k=\frac{\pi}{N}k,\qquad k\in\Lambda.$$

Заметим, что в силу (9) для всех $k\in\Lambda$

$$\tilde c_0(\lambda_k)=\sum_x e^{-i(\lambda_k,\,x)}\langle\xi_0(0)\,\xi_0(x)\rangle_{\mu_0(0)}.$$

Сравнивая теперь (6) и (11), получим, что для всех $t,\ s\in\mathbf{R}_+$ и $k\in\Lambda$

$$\tilde c_{ts}^\Lambda(\lambda_k)=\tilde c_{ts}(\lambda_k)=\sum_x e^{-i(\lambda_k,\,x)}\langle\xi_0(t)\,\xi_x(s)\rangle.$$

Отсюда легко следует (9).

Из утверждения 2 и из (7), в частности, следует, что для всех $x\in\Lambda$ и всех $t,\ s\in\mathbf{R}_+$

$$\begin{gathered}|c_{ts}^\Lambda(x)|\leqslant c_3\exp\{-\gamma_3|x|-\gamma_3|t-s|\},\\ |c_{tt}^\Lambda(x)-c^\Lambda(x)|\leqslant c_3\exp\{\gamma_3 t-\gamma_3|x|\},\end{gathered} \tag{12}$$

Утверждение 4. *Величины* $Z^T_{\Lambda,V}$, $V \subseteq V(\Lambda, T)$, *допускают кластерное представление*

$$Z^T_{\Lambda,V} = \sum_{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n} k^{\Lambda,T}_{\Gamma_1} \cdot \ldots \cdot k^{\Lambda,T}_{\Gamma_n} \prod c^{\Lambda,T}_{x,t}, \tag{21}$$

где суммирование идет по всевозможным неупорядоченным наборам попарно непересекающихся подмножеств $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \subset V$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $|\Gamma_i| \geqslant 2$, $i = 1, \ldots, n$, *а произведение — по всем точкам* $(x, t) \in V \setminus (\Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n)$. *При этом величины* $k^{\Lambda,T}_\Gamma$, $\Gamma \subset V(\Lambda, T)$, $c^{\Lambda,T}_{x,t}$, $(x, t) \in V$, *удовлетворяют условиям*:

(1) *существуют пределы*

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d} \lim_{T \to \infty} k^{\Lambda,T}_\Gamma = \lim_{T \to \infty} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d} k^{\Lambda,T}_\Gamma = k_\Gamma$$

для всех $\Gamma \subset \mathbf{Z}^d \times \{1, 0, -1, -2, \ldots\}$,

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d} \lim_{T \to \infty} c^{\Lambda,T}_{x,t} = \lim_{T \to \infty} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d} c^{\Lambda,T}_{x,t} = c_{x,t}$$

для всех $(x, t) \in \mathbf{Z}^d \times \{1, 0, -1, \ldots\}$, *и эти пределы не зависят от распределения в начальный момент* $\mu_\varepsilon^\Lambda(0)$,

(2) *при достаточно малых* $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 = \mathrm{const} > 0$,

$$\sum_{\substack{\Gamma \subset \mathbf{Z}^d \times \{1,0,1\ldots\} \\ |\Gamma| = n}} |k^{\Lambda,T}_\Gamma| < (Ce^{1/l})^{n-1}, \qquad n \in \mathbf{Z}_+,$$

$$|c^{\Lambda,T}_{x,t}| \geqslant K > C\varepsilon^{1/l}$$

для всех $x \in \Lambda$ *и* $t \in \{-T, \ldots, 1\}$, *где все константы не зависят от* T *и* Λ.

Доказательство этих двух утверждений аналогично доказательству основной теоремы в [4], гл. IV, § 7 или в [5], гл. 3, § 1. Кластерное разложение так же, как в [4] и в [5], получается из формулы интегрирования по частям.

Пусть $\{\zeta_x^y(t), x \in \Lambda, y \in Q\}$, $t \in [0, T]$, **— гауссовский процесс со значениями в** $\mathbf{R}^{\Lambda \times Q}$, **и пусть** μ **— соответствующая ему мера на** $\mathbf{R}^{\Lambda \times Q \times [0, T]}$. **Для любого** $V \subset V(\Lambda, T)$ **определим гауссовскую меру** $R_V^s(\mu)$ **на** $\mathbf{R}^{\Lambda \times Q \times [0, T]}$ **с теми же средними, что и мера** μ,

$$\langle \zeta_x^y(t) \rangle_\mu = \langle \zeta_x^y(t) \rangle_{R_V^s(\mu)}$$

для всех $x \in \Lambda$, $y \in Q$, $t \in [0, T]$, **и следующими ковариациями:**

$$\langle \zeta_{x_1}^{y_1}(t_1) \zeta_{x_2}^{y_2}(t_2) \rangle_{R_V^s(\mu)} = s \langle \zeta_{x_1}^{y_1}(t_1) \zeta_{x_2}^{y_2}(t_2) \rangle_\mu,$$

если $(x_1, [t_1] - T + 1) \in V$ **при** $t_1 \neq 0$ **и** $(x_1, 0) \in V$ **при** $t_1 = 0$, **а** $(x_2, [t_2] - T + 1) \in V(\Lambda, T) \setminus V$ **при** $t_2 \neq 0$ **и** $(x_2, 0) \in V(\Lambda, T) \setminus V$ **при** $t_2 = 0$, **и**

$$\langle \zeta_{x_1}^{y_1}(t_1) \zeta_{x_2}^{y_2}(t_2) \rangle_{R_V^s(\mu)} = \langle \zeta_{x_1}^{y_1}(t_1) \zeta_{x_2}^{y_2}(t_2) \rangle_\mu$$

во всех остальных случаях.

Используя формулу интегрирования по частям (см. [4], гл. IV § 7; [5], гл. 3, § 1) для любой аналитической и ограниченной в полосе $|\mathrm{Im}\, z| <$

Заметим, что ковариации меры μ_0 экспоненциально убывают

$$|\langle\xi_x\xi_y\rangle_{\mu_0}|\leqslant C_1 e^{-\gamma_1|x-y|}, \qquad C_1,\ \gamma_1>0,\ x,\ y\in\mathbf{Z}^d, \tag{4}$$

что легко следует из условий на коэффициенты a_y, $y\in\mathbf{Z}^d$. Известно ([4]), что в данном случае при достаточно малых $\varepsilon>0$, $\varepsilon<\varepsilon_0$, существует

$$\lim_{\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^d}\mu_\Lambda=\mu_\varepsilon$$

в смысле слабой сходимости конечномерных распределений.

Выпишем для μ_ε систему уравнений Ланжевена

$$d\xi_x(t)=-\sum_{y\in Q}a_y\xi_{x+y}(t)\,dt-\varepsilon p(\xi_x(t))\,dt+dw_x(t), \qquad x\in\mathbf{Z}^d, \tag{5}$$

где $p(\xi)=\frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}P(\xi)$. Система (5) разрешима в действительном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}=l_2(\mathbf{Z}^d,\ e^{-|x|})$ со скалярным произведением (см. [3])

$$(f,g)_{\mathscr{H}}=\sum_{x\in\mathbf{Z}^d}f(x)\,g(x)\,e^{-|x|}.$$

Пусть $\{\xi_x(t),\ x\in\mathbf{Z}^d\}$, $t\in\mathbf{R}_+$,– решение системы (5). Обозначим через $\mu_\varepsilon(t)$ вероятностную меру на $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$, соответствующую решению в момент времени $t\in\mathbf{R}_+$.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon\geqslant0$ достаточно мало. Тогда мера μ_ε инвариантна относительно системы (2). Более того, пусть мера, соответствующая начальным условиям $\xi_x(0)$, $x\in\mathbf{Z}^d$, является гиббсовской перестройкой гауссовской меры $\mu_0(0)$ с потенциалом* $\varepsilon\sum_x P_0(\xi_x(0))$, *где $P_0(\xi)$ – полином с четной старшей степенью, удовлетворяющий условию* $P_0(\xi)-\frac{1}{2}P(\xi)\geqslant\mathrm{const}$ *при всех $\xi\in\mathbf{R}$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon\geqslant0$*

$$\mu_\varepsilon(t)\to\mu_\varepsilon \text{ при } t\to\infty$$

в смысле слабой сходимости конечномерных распределений.

Всюду далее мы будем предполагать, что $\varepsilon\geqslant0$ достаточно мало ($\varepsilon<\varepsilon_0$) и что для мер μ_ε и $\mu_\varepsilon(0)$ имеет место кластерное разложение (см. [4]).

Рассмотрим сначала случай $\varepsilon=0$.

2. Сходимость метода стохастического квантования в линейном случае. Пусть $\{\xi_x(t),\ x\in\mathbf{Z}^d\}$ – решение линейной системы (2) с гауссовскими начальными условиями $\xi_x(0)$, $x\in\mathbf{Z}^d$, которым соответствует мера $\mu_0(0)$.

Поскольку данный процесс является гауссовским, для доказательства сходимости $\mu_0(t)\to\mu_0$ при $t\to\infty$ достаточно рассмотреть первые и вторые моменты.

Легко видеть, что $\langle\xi_x(t)\rangle=0$ для всех $x\in\mathbf{Z}^d$, $t\in\mathbf{R}_+$. Для вторых моментов

$$c_{ts}(x)=\langle\xi_0(t)\,\xi_x(s)\rangle$$

В силу утверждения 1

$$\lim_{\Lambda \uparrow Z^d} \langle g(\xi_{x_0}(T))\rangle_{\mu_\varepsilon{}^{\Lambda}(T)} = \langle g(\xi_{x_0}(T))\rangle_{\mu_\varepsilon(T)},\ T \in \mathbf{R}_+,$$

$$\lim_{T\to\infty} \langle g(\xi_{x_0}(T))\rangle_{\mu_\varepsilon(T)} = \langle g(\xi_{x_0})\rangle_{\mu_\varepsilon}.$$

Аналогично доказывается сходимость

$$\langle g_1(\xi_{x_1}(T)\ldots g_k(\xi_{x_k}(T))\rangle_{\mu_\varepsilon(T)} \to \langle g_1(\xi_{x_1})\ldots g_k(\xi_{x_k})\rangle_{\mu_\varepsilon}$$

при $T\to\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – М., 1984, 354 с.
2. *Добрушин Р. Л.* Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности.– Теория вероятн. и ее примен., 1968, т. XIII, в. 2, с. 201–229.
3. *Крылов Н. В., Розовский Б. Л.* Об эволюционных стохастических уравнениях. – Итоги науки и техники, сер. современные проблемы математики, 1979, т. 14, с. 71–146.
4. *Малышев В. А., Минлос Р. А.* Гиббсовские случайные поля. М.: Наука, 1985, 288 с.
5. *Малышев В. А.* Ультрафиолетовые проблемы в теории поля и многомасштабные разложения. – Итоги науки и техники, сер. теория вероятностей, 1986, т. 24, с. 111–181.
6. *Мигдал А. А.* Стохастическое квантование теории поля. – Успехи матем. наук, 1986, т. 149, Вып. 1, с. 3–44.
7. *Parisi G., Wu Y.-S.* Perturbation theory without gauge sixing Sci. Sinica 24 (1981).– P. 483.
8. *Аккарди Л., Фриджерио А., Льюис Д.* Квантовые случайные процессы. – В сб.: Квантовые случайные процессы и открытые системы. Новое в зарубежной науке. М.: «Мир», 1988, с. 13–52.
9. *Хадсон Р., Партасарати К.* Конструкция квантовых диффузий. В сб.: Квантовые случайные процессы и открытые системы. М.: Мир, 1988, с. 92–123.

Поступила в редакцию
30.I.1990

поля Дирака). Для грассмановых полей пришлось заново в удобном для нас виде перенести все основные определения теории уравнений Ито на случай грассмановых переменных. Мы не смогли найти в литературе удобных для нас формулировок, несмотря на наличие большого числа работ по уравнениям Ито в алгебрах Клиффорда [8], [9].

Мы предпочли дать определение грассмановых стохастических уравнений более конструктивное, чем L_2-определение в классическом случае. Возможен ли полный аналог L_2-определения, пока неизвестно.

I. Сходимость метода стохастического квантования в классическом случае

1. Формулировка результата. Сопоставим каждому конечному подмножеству $\Lambda \in \mathbf{Z}^d$ некоторый полином U_Λ от переменных $\xi_x \in \mathbf{R}$, $x \in \Lambda$, такой, что

$$Z_\Lambda = \int_{\mathbf{R}^{|\Lambda|}} \exp\{-U_\Lambda\} \prod_{x \in \Lambda} d\xi_x < \infty,$$

и рассмотрим на $\mathbf{R}^{|\Lambda|}$ гиббсовскую меру μ_Λ с потенциалом U_Λ:

$$d\mu_\Lambda = \frac{1}{Z_\Lambda} \exp\{-U_\Lambda\} \prod_{x \in \Lambda} d\xi_x.$$

Определение 1. Системой уравнений Ланжевена для μ_Λ называют систему стохастических дифференциальных уравнений

$$d\xi_x(t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial U_\Lambda}{\partial \xi_x}(t)\, dt + dw_x(t), \qquad x \in \Lambda,$$

где $w_x(t)$ — стандартные винеровские процессы, независимые для разных $x \in \Lambda$.

Мера μ_Λ является инвариантной относительно соответствующей системы уравнений Ланжевена. В этом легко убедиться, рассмотрев уравнение Колмогорова для данной системы.

Пусть существует предел

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d} \mu_\Lambda = \mu$$

в смысле слабой сходимости конечномерных распределений, и пусть $F_x = \partial U_\Lambda / \partial \xi_x$ для любого $x \in \mathbf{Z}^d$ не зависит от Λ, если Λ достаточно велико.

Определение 2. Системой уравнений Ланжевена для предельной меры μ назовем бесконечную систему стохастических дифференциальных уравнений

$$d\xi_x(t) = -\frac{1}{2} F_x(t)\, dt + dw_x(t), \tag{1}$$

где $F_x(t) = F_x(\xi_y(t),\ y \in \mathbf{Z}^d)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только случай, когда U_Λ представимо в виде суммы квадратичной части и малого возмущения. Точнее, рассмотрим на решетке $\mathbf{Z}^d$ трансляционно-инвариантное гауссовское случайное поле $\{\xi_x,\ x \in \mathbf{Z}^d\}$ с нулевым средним $\langle \xi_x \rangle = 0$, $x \in \mathbf{Z}^d$, и спектральной