МИНИСТЕРСТВС
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОГО МАШИНОСТРОЕНИЯ

На правах рукописи

МАЛЫШЕВ В.А.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Специальность 01.01.01-Теория функций и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва-1973

Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР
Московский институт электронного машиностроения

на правах рукописи

Малышев Вадим Александрович

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

/OI.OI.OI. - Теория функций и функциональный анализ/

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва, I975 г.

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и в Лаборатории статистических методов МГУ

Официальные оппоненты:

1. Доктор физ.-мат.наук, проф. М.А.Евграфов.
2. Доктор физ.-мат.наук, проф. И.И.Пятецкий-Шапиро.
3. Доктор физ.-мат.наук, проф . Б.В.Шабат.

Ведущее предприятие

Институт теоретической физики им. Ландау АН СССР

Автореферат разослан 7 сентября 1973 г.

Защита диссертации состоится 23 октября 1973 г. на заседании Совета Московского института электронного машиностроения: Москва, Б.Вузовский пер., д. 3/12 в ауд.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета В.В.Андреев

Теория краевых задач для аналитических функций одной комплексной переменной представляет собой классическую и сейчас в основном завершенную область математики. Эта теория развивалась от основополагающих работ Ю.В.Сохоцкого, Д.Гильберта, И.Племельи, Т.Карлемана, Н.Винера и Э.Хопфа до завершающих исследований М.Г.Крейна, Н.И.Мусхелишвили, И.Н.Векуа , Ф.Д.Гахова, И.Ц.Гохберга и др. Следует отметить, что теория краевых задач имеет много параллелей, а подчас и полных совпадений, с теорией сингулярных интегральных уравнений, интегральных и разностных уравнений Винера-Хопфа на полупрямой, теорией операторов Теплица, что и отражено в ряде фундаментальных монографий (см., например, [1], [2], [3]).

Краевые задачи для аналитических функций возникают во многих казалось бы совершенно не связанных между собой областях, по большинству из которых имеется монографическая литература: теория упругости, диффракция, электромагнитные и акустические волноводы, квантовое взаимодействие и рассеяние частиц, теория переноса излучения, теория массового обслуживания, надежности, водохранилищ, страхования, математическая статистика и т.д. Укажем в качестве примера монографии [4], [5], [6].

Особенно развивалось в последнее время применение краевых задач в теории случайных блужданий и смежных областях. Работы Ф.Спицера, Г.Бакстера, Дж.Венделя в этой области имели не только вероятностное содержание.

Важным фактом является то, что применения всегда стимулировали новые постановки задач в этой математической теории

В данной диссертации рассматриваются краевые задачи для аналитических функций двух комплексных переменных вида

$$G(x,y)F_{++}(x,y) + G_1(x,y)F_{+-}(x,y) + G_2(x,y)F_{-+}(x,y) + G_3(x,y)F_{--}(x,y) = H(x,y) \qquad \text{(I)}$$

и их приложения. Точнее, требуется найти функции F_{++}, F_{+-}, F_{-+}, F_{--}, аналитические соответственно в областях $|x|,|y|<1$; $|x|<1, |y|>1$, и т.д., непрерывные на границах этих областей и удовлетворяющие при $|x|=|y|=1$ соотношению (I), где G, G_1, G_2, G_3, H – функции, определенные и непрерывные при $|x|=|y|=1$.

Укажем сначала как более ранние так и последние результаты, связанные с задачами типа (I), принадлежащие другим авторам. Эти исследования естественно разбиваются на два направления.

К первому направлению можно отнести работы, в которых задачи (I) сильно вырождаются в некотором смысле и поэтому к ним применимы методы, работающие в одномерном случае. Например, если $G \equiv G_1 \equiv G_2 \equiv G_3 \equiv 1$, то задача (I) решается с помощью обычного интеграла Коши (другие случаи см. [7], [8], этому посвящен также § 4 главы 3). К этому направлению можно отнести также исследования И.Ц.Гохберга и Л.С.Гольденштейна по уравнениям Винера-Хопфа в полупространстве [9].

Второе направление развития теории пошло по пути исследования нетеровости и вычисления индекса общих краевых задач. Одним из наиболее известных здесь результатов является теорема Атьи-Зингера об индексе [10]. Для случая задач (I) соответствующие результаты принадлежат И.Б.Симоненко ([11], [12], [13]). Методы И.Б.Симоненко являются аналогом метода замораживания коэффициентов. Теория нетеровости для трехмерного случая уже не получается подобным образом. В последнее время это направление существенно пополнилось методами некоммутативных банаховых алгебр [14]. Основным результатом работы [14] (развитым в [15]) является утверждение, состоящее грубо говоря в том, что теория нетеровости краевых задач для n - мерного случая столь же трудна, сколь и теория обратимости для ($n-1$) - мерного случая.

Работы вероятностного характера, в которых существенно используются краевые задачи типа (I), можно отнести к первому из вышеупомянутых направлений. Примерами подобных случаев могут быть случайные блуждания в четверти плоскости с неотрицательными скачками в направлении одной из осей; в качестве применения можно привести задачу о стационарном распределении в системе массового обслуживания с приоритетами требований (см., например, [16]).

Следует заметить, что возможность построения полной теории краевых задач в одномерном случае основывается на одном простом приеме алгебраического характера (любопытно, что алгебраичность этого приема особенно подчеркивалась специалистами по теории вероятностей, см.например, [17]), позволяющем получить прозрачное явное решение краевой задачи. Отсутствие такого метода в двумерном случае определяет существенное отличие от одномерного случая. Состояние теории задач типа (I) в настоящее время таково, что самые тонкие аспекты алгебраико-арифметического характера (глава 2 диссертации) при ослаблении предположений на коэффициенты приходится заменять более грубыми постановками задач (например, дополнение к главе [3]). Эта тенденция и показана в настоящей диссертации.

Переходим к изложению содержания работы.

В главе I рассматривается ненетерова краевая задача (I) с

$$G(x,y)=1-\sum_{i,j=-1}^{1} p_{ij}x^i y^j,\ p_{ij}\geq 0,\ \sum p_{ij}=1;$$

$$G_1(x,y)=1-\sum_{i=-1}^{1}\sum_{j=0}^{1} p'_{ij}x^i y^j,\ p'_{ij}\geq 0,\ \sum p'_{ij}=1;$$

$$G_2(x,y)=1-\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=-1}^{1} p''_{ij}x^i y^j,\ p''_{ij}\geq 0,\ \sum p''_{ij}=1; \tag{2}$$

$$G_3(x,y)=1-\sum_{i,j=0}^{N} p^{\circ}_{ij}x^i y^j,\ p^{\circ}_{ij}\geq 0,\ \sum p^{\circ}_{ij}=1,\ N<\infty$$

$$H(x,y)=0.$$

Эта задача является простейшей и в то же время неразрешимой одномерными методами, о которых речь шла выше. Она возникает как функциональное уравнение для производящих функций

$$F_{++}(x,y)=\sum_{i,j=1}^{\infty}\pi_{ij}x^{i-1}y^{j-1},\quad F_{--}(x,y)=\frac{\pi_{00}}{xy},$$

$$F_{+-}(x,y)=\frac{1}{y}\pi(x)=\frac{1}{y}\sum_{i=1}^{\infty}\pi_{i0}x^{i-1},$$

$$F_{-+}(x,y)=\frac{1}{x}\tilde{\pi}(y)=\frac{1}{x}\sum_{j=1}^{\infty}\pi_{0j}y^{j-1}$$

стационарных вероятностей π_{mn} состояний (m,n) для случайного блуждания в $\mathbb{Z}^2_+$, где $\mathbb{Z}^2_+=\{(m,n):\ m,n\geq 0$ целые $\}$.

Теорема. Задача (2) имеет ровно одно линейно независимое решение тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий

I) $M_x<0,\ M_y<0,$

$$M_x M'_y-M_y M'_x<0,\ M_y M''_x-M_x M''_y<0;$$

2) $M_x\geq 0,\ M_y<0,$

$$M_x M'_y-M_y M'_x<0;$$

3) $M_x<0,\ M_y\geq 0,\ M_y M''_x-M_x M''_y<0,$

где $M_x=G'_x(1,1),\quad M_y=G'_y(1,1),$

$$M'_x=(G_1)'_x(1,1),\quad M'_y=(G_1)'_y(1,1),$$

$$M''_x=(G_2)'_x(1,1),\quad M''_y=(G_2)'_y(1,1).$$

В противном случае задача (2) не имеет ни одного решения.

Для доказательства существенно применение как аналитического метода, развиваемого в главе I (о нем мы скажем ниже) так и вероятностного (дополнение I к главе I). В дополнении I к главе I с помощью построения специальных полумартингалов доказывается гораздо более общее утверждение, дающее полную классификацию однородных внутри и по осям блужданий в четверти плоскости $\mathbb{Z}_+^2$. Аналитическая часть доказательства проводится в § I, 8 главы I.

В § 3 главы I проводится первый шаг развиваемого аналитического метода – проектирование уравнения (2) на алгебраическую кривую $G(x,y)=0$. Расположение областей аналитичности проекций функций $\pi(x)$ и $\widetilde{\pi}(y)$ на римановой поверхности S, соответствующей алгебраической кривой $G(x,y)=0$, изучается в § 4.

Уравнение на римановой поверхности S содержит тем не менее две неизвестные функции π и $\widetilde{\pi}$. Дополнительные соотношения получаются из условия инвариантно сти π и $\widetilde{\pi}$ относительно некоторых автоморфизмов Галуа римановой поверхности S.

Аналитические продолжения проекций π и $\widetilde{\pi}$ на римановой поверхности S оказываются многозначными функциями. Поэтому естественно перейти на универсальную накрывающую.

Введенные в § 6 автоморфизмы Галуа используются для доказательства основной теоремы § 7 об аналитическом продолжении: π и $\widetilde{\pi}$ допускают мероморфное продолжение на всю универсальную накрывающую, которая в некоторых предположениях на коэффициенты p_{ij} оказывается комплексной плоскостью.

В § 9 находится явное представление для обеих неизвестных функций π и $\widetilde{\pi}$ на универсальной накрывающей в виде бесконечных рядов и произведений. Это представление обобщает аналогичные представления для эллиптических $\wp$-функ-

ций и σ-функций. Приведен также метод получения быстро (экспоненциально) сходящихся рядов для решений (аналогичный введению ϑ - функций в теории эллиптических функций).

Возможность получения явных представлений обусловлена тем, что с помощью автоморфизмов Галуа можно исключить одну из двух неизвестных функций из основного соотношения. При этом вторая неизвестная функция оказывается удовлетворяющей линейного неоднородному уравнению в конечных разностях на комплексной плоскости. Трудность состоит в обеспечении сходимости формальных рядов и произведений для решения этого уравнения. Для этого оказывается необходимой факторизация (вторая по счету) коэффициентов основного соотношения между π и $\widetilde{\pi}$.

В качестве следствия в § 9 доказывается аналитическая зависимость решений от параметров.

В § IO главы I получено другое (интегральное) представление для решений. Это представление получается как решение краевой задачи Римана на римановой поверхности. В некоторых случаях оно принимает вид обычного эллиптического интеграла, зависящего от параметра.

Введенные в § 7 главы I автоморфизмы Галуа римановой поверхности S порождают группу $\mathcal{H}$. В § I главы 2 показывается связь задачи вычисления этой группы с решенной Е.И.Золотаревым классической задачей об интегрируемости абелевых дифферинциалов на эллиптической кривой в логарифмах [I8].

В § 2, 3 главы получены необходимые и достаточные условия рациональности решений задачи (2) в случае конечности группы Галуа и явный вид этих рациональных решений. Один более тонкий случай рассмотрен отдельно в § 4 . Основным при этом является тривиальность аддитивной и мультипликативной групп когомологий Галуа.

Алгебраический факт простоты группы $\mathcal{H}$ имеет ясную вероятностную и функциональную интерпретацию. В § I главы 2 доказана теорема: группа $\mathcal{H}$ имеет порядок 4 (минимально возможный) тогда и только тогда, когда определяемое переходными вероятностями p_{ij} случайное блуждание либо является простым либо независимым по каждой из осей.

Факт простоты группы Галуа позволяет для таких случаев получать существенно более простые явные формулы для решений краевой задачи (2), чем в общем случае. В дополнении 2 к главе I предлагается прием сведения задачи (2) в таких случаях к одномерной краевой задаче, которая и решается.

Остальная часть главы 2 посвящена исследованию асимптотики коэффициентов π_{mn} функций

$$F_{++}(x,y),\ \pi(x),\ \tilde{\pi}(y),$$

т.е. стационарных вероятностей, при $m \to \infty$, $\frac{n}{m} \to \alpha$.

В зависимости от того, $\alpha = 0$ или $\alpha \neq 0$ применяются существенно разные методы.

В § 5–10 главы 2 рассматривается случай $\alpha \neq 0$. Первым шагом в исследовании этого случая является получение представления π_{mn} в виде интеграла по одномерному циклу на римановой поверхности S' . При этом подинтегральное выражение оказывается имеющим классический вид для применения техники метода перевала. Это представление получено в § 5 с помощью техники вычетов Лере.

Для применения метода перевала необходимо доказать, что контур интегрирования можно деформировать так, чтобы он проходил через точку перевала, а в остальном лежал ниже ее уровня. Ввиду большого числа параметров прямыми вычислениями это показать невозможно. Используется следующая идея: проверяется выполнение этого условия для частного случая и используется устойчивость линий уровня при изменении параметров. При этом путем скрупулезного исследования вещественных точек алгебраической кривой, критических точек и критических значений проверяется выполнение условий основной теоремы Морса и структурной устойчивости линий уровня, [19] . Этому посвящен § 6 .

При деформации контура могут встретиться полюса. Этот факт определяет существенно различные области асимптотического поведения стационарных вероятностей. Основная теорема формулируется в § 10 и доказывается в § 7,8,9 .

Асимптотика оказывается имеющей вид

$$\pi_{mn} \sim C_1 \frac{1}{m^{C_2}} C_3^{-m}, \qquad (3)$$

где $C_i = C_i(p_{ij}, p'_{ij}, p''_{ij}, \alpha)$. Выделяется область изменения параметров, где основная константа C_3 не зависит от p'_{ij}, p''_{ij} (область устойчивости). Вычисляется явный вид границ этой области и констант C_i . Например, при фиксированных p_{ij} и α граница области устойчивости оказывается кусочно-линейной.

В § 12, 13 рассматривается случай $\alpha = 0$, где например, асимптотическое поведение Π_{m0} определяется либо наименьшим полюсом, либо точкой ветвления функции $\Pi(x)$.

В главе 3 рассматриваются задачи

$$G(x,y)F_{++} + F_{+-} + F_{-+} + F_{--} = H(x,y) \qquad (3)$$

с рациональной $G(x,y)$ (соответствующие дискретным уравнениям Винера-Хопфа или теплицевым операторам в четверти плоскости), а также общие задачи (1) с произвольными рациональными коэффициентами.

В § 3 главы 3 доказывается существование и единственность решения задачи (3) в нетеровом случае, когда

$$G(x,y) = \frac{1}{xy}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} a_{ij}\,x^i y^j, \quad \sum|a_{ij}|<\infty, \qquad (4)$$

(в [14] обсуждается неулучшаемость в некотором смысле этого результата).

Вводится понятие двойного расширения Галуа поля алгебраических функций E относительно двух его элементов x, y (§ 12): так называется алгебраическое расширение F поля E, если F есть расширение Галуа как поля $C(x)$ так и поля $C(y) \subset E$.

Пусть S_0 - риманова поверхность алгебраических функций $y(x)$ и $x(y)$, определенных уравнением $G(x,y) = 0$; F_0 - поле мероморфных функций на S_0.

Рассматривается башня полей $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots$, причем F_{2i} есть наименьшее расширение Галуа поля $C(y)$, содержащее F_{2i-1}, а F_{2i+1} есть наименьшее расширение Галуа поля $C(x)$, содержащее F_{2i}.

В § 12 получено необходимое и достаточное условие стабилизации последовательности F_i (т.е. конечности $\varinjlim F_i$ над F_0).

Пусть S_k - риманова поверхность поля F_k, $\lambda_k : \tilde S_k \to S_k$, - универсальное накрытие. По последовательности F_i строится коммутативная диаграмма отображений (§ 13)

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \tilde S_k \arrow[l] \arrow[d, "\lambda_k"'] & \tilde S_{k+1} \arrow[l, "\tilde f_{k+1}"'] \arrow[d, "\lambda_{k+1}"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & S_k \arrow[l] & S_{k+1} \arrow[l, "f_{k+1}"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

основная для дальнейшего.

В § 16 доказывается следующее утверждение: для любого решения краевой задачи (1) $G_1F_{+-} + G_2F_{-+} + G_3F_{--}$ может быть представлено в следующем виде для некоторых m, n:

$$\sum_{i=0}^{n-1} q_i(x,y)\Pi_i(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \tilde q_j(x,y)\tilde\Pi_j(y) + q^0(x,y),$$

где $q_i, \tilde q_j, q^0$ рациональны, а $\Pi_i(x)$, $\tilde\Pi_j(y)$ аналитичны при $|x|<1$ и $|y|<1$ соответственно и непрерывны на границах этих областей.

Это утверждение вместе с развиваемым в § 1,2,5,6 методом сводит решение задачи (1) к нахождению π_i, $\tilde{\pi}_j$.

Пусть $E = \{s \in S_o : |x(s)|, |y(s)| < 1\}$; $E_1, \ldots, E_k$ его связные компоненты; $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ – связные компоненты $\{s \in S_o : |x(s)| < 1\}$, пересекающиеся с $E_1, \ldots, E_k$ соответственно. Для любого i фиксируем связную компоненту $\tilde{\Delta}_i^o$ множества $\lambda_o^{-1}(\Delta_i) \subseteq \tilde{S}_o$. Через $\tilde{\Delta}_i^o(r)$ обозначается множество точек $\tilde{S}_o$, находящихся на расстоянии не большем r в фиксированной метрике Лобачевского от $\tilde{\Delta}_i^o = \tilde{\Delta}_i^o(r)$. Определим по индукции $\tilde{\Delta}_i^j(r)$, $\tilde{\Delta}_i^o(r) \supset \tilde{\Delta}_i^o$ как связные компоненты $\tilde{f}_j^{-1}(\tilde{\Delta}_i^{j-1}(r))$. Функции π_e естественным образом поднимаются на все Δ_i, $\tilde{\Delta}_i^j(0)$ и $\varinjlim \tilde{\Delta}_i^j(0)$. Пусть $\mathfrak{M}(\tilde{S}_i)$ – пучок мероморфных функций на $\tilde{S}_i$.

В § 14 доказывается основная теорема о том, что в некоторых предположениях типа нетеровости, а также связности S_o' и $\rho(S_o) > 1$, функции π_e как сечения индуктивного предела пучков $\mathfrak{M}(S_i)$ продолжаются на $\bigcup_r \varinjlim \tilde{\Delta}_i^j(r)$.

<u>Следствие</u>. Риманова поверхность $\pi_e(x)$ как накрытие комплексной сферы x имеет только алгебраические точки ветвления. Это следствие является основным для получения разного рода асимптотических результатов.

<u>Следствие</u>. В случае стабилизации последовательности F_i π_e допускают мероморфное продолжение на $\tilde{S}_k$, где k – индекс, с которого все F_i совпадают.

Отсюда возникает классификации аналитических продолжений краевых задач, характеризующая в некотором смысле сложность задачи. Многие важные для приложений частные случаи задач (1) обладают свойством стабилизации последовательности F_i.

В § 4, 15 доказывается, что если задачи (3) разрешимы методом Винера-Хопфа, то π_e являются мероморфными функциями на S_2.

Обратное к этому последнему утверждению неверно и в связи с этим теорию рациональности главы 2 можно рассматривать как исследование случаев возможности мероморфного продолжения на S_o.

Другие важные и в некотором смысле простейшие случаи возникают, когда $\{F_i\}$ стабилизируется начиная с $i = 0$. В этом случае роду 0 или 1 римановой поверхности S_o' отвечает равенство $N = M = 1$ в выражении (4). (Здесь π_e не продолжаются ни на одну из S_i, но продолжаются на $\tilde{S}_o$). В § 7, 8 получены явные выражения для решений в этих случаях.

В § 9 рассмотрен случай несвязности S_o'. Основой всех рассмотрений в главе 3 являются автоморфизмы Галуа полей F_k над $\mathbb{C}(x)$ и $\mathbb{C}(y)$.

В дополнении к главе 3 рассматриваются краевые задачи типа (3) с произвольной функцией

$$G(x,y) = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} a_{ij} x^i y^j, \quad \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} |a_{ij}| < \infty,$$

и их многомерные обобщения, соответствующие теплицевым операторам в многомерном ортанте.

Развивается другой подход к исследованию таких задач, являющийся в некотором смысле прямым обобщением подхода, основанного на идее факторизации. В отличие от классического подхода (в одномерной краевой задаче) приходится получать факторизацию функций, определенных на единичной окружности, со значениями в некоторой некоммутативной банаховой алгебре. В нашем случае этой алгеброй является алгебра, порожденная всеми теплицевыми операторами в $\ell^1(\mathbb{Z}_+)$.

Основным результатом является необходимое и достаточное условие (легко проверяемое) существования вполне правильной (в смысле [20]) факторизации для таких оператор - функций. Построение такой факторизации, эквивалентное нахождению решения задачи (3), эффективно сводится в данной работе к построению факторизации для оператор функции вида $1+K(\zeta)$, где $K(\zeta)$ вполне непрерывен для всех ζ, $|\zeta|=1$.

Использование техники тензорных произведений некоммутативных банаховых алгебр позволяет обобщить эти результаты на n - мерные краевые задачи типа (3) ($n \geqslant 3$). Это обобщение проводится в § 3 дополнения.

В § 4 дополнения рассматривается приложение развитой в § I-3 техники факторизации оператор-функций к получению факторизационного тождества для двухканальной системы массового обслуживания.

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах при Московском Государственном Университете, секции теории вероятностей Московского математического общества, всесоюзных конференциях. Результаты диссертации опубликованы в работах [2I - 34].

Литература

1. Гахов Ф.Д. – Краевые задачи. Физматгиз. Москва, 1963.

2. Мусхелишвили Н.И. – Сингулярные интегральные уравнения. "Наука". – Москва. 1968.

3. Крейн М.Г. – Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, Успехи матем. наук, 13, 5, 1958, 3-120.

4. Такач Л. – Комбинаторные методы в теории случайных процессов. "Мир". Москва. 1971 .

5. Боголюбов Н.Н., Медведев Б.В., Тавхелидзе А.Н. – Применение методов Н.И.Мусхелишвили для решения сингулярных интегральных уравнений в квантовой теории поля. Сб. "Проблемы механики сплошной среды", Москва, 1961.

6. Roos B.W. – Analytic functions in physics and engineering. 1969. New York.

7. Рабинович В.С. – Многомерное уравнение Винера-Хопфа для конусов, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Республ.научн.сб., г. Харьков, 1967, 5, 59-67.

8. Какичев В.А. – Краевые задачи линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Республ. научн. сб., г. Харьков, 1967, 37-58.

9. Гохберг И.Ц., Гольденштейн Л.С. – О многомерном интегральном уравнении на полупространстве с ядром, зависящим от разности аргументов, и его дискретном аналоге, ДАН СССР, 131, 1, 1960, 1-12.

10. Пале Р. – Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе. Москва. "Мир". 1970.

11. Симоненко И.Б. – Операторы типа свертки в конусах, Матем. сб., 74, 2, 1967, 298-313.

12. Симоненко И.Б. – О многомерных дискретных свертках, Матем. исследования, 3, 1, 1968, 108-122, Кишинев.

13. Симоненко И.Б. – Краевые задачи аналитических функций двух переменных и связанные с ними интегральные уравнения, ДАН СССР, 199, 3, 1971, 551-552.

14. Douglas R.G., Howe R. – On the C*-algebra of Toeplitz operators in the quarter-plane , Trans. of Amer. Math. Soc. , 77, 3, 1971, 203-217.

15. Пилиди В.С. – Локальный метод исследования линейных операторных уравнений типа бисингулярных интегральных уравнений. Канд.дисс., Ростов. Гос.Университет, 1972 .

16. Heathcote C.R. – The Time-dependent Problem for a Queue with Preemptive Priorities, Oper. Research, 7, 5, 1959.

17. Кингман Дж. – Об алгебре очередей. Сб. переводов "Математика", 15:2, 1971, 126-165.

18. Золотарев Е.И. – Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению. Полное собрание сочинений, вып. 1, Л., 1931, 161-360.

I9. Арнольд В.И. – Особенности гладких отображений, Успехи матем.наук, 23, I, I966, 3-44.

20. Гохберг И.Ц. – Задача факторизации оператор-функции. Изв. АН СССР, сер.матем., 28, 5, I964, I055-I082.

2I. Малышев В.А. – О решении дискретных уравнений Винера-Хопфа в четверти-плоскости, ДАН СССР, I87, 6, I969, I243-I246.

22. Малышев В.А. – Аналитический метод в теории случайных блужданий в четверти плоскости: простое блуждание с косым отражением. Труды Советско-Японского Симпозиума по теории вероятностей в г. Хабаровске, I969, I76-I84.

23. Малышев В.А. – Случайные блуждания. Уравнения Винера-Хопфа в четверти плоскости. Автоморфизмы Галуа. Изд. МГУ. Ротапринт. I970, стр. I-20I.

24. Малышев В.А. – Положительные случайные блуждания и теория Галуа, Успехи математ. наук, 26, I, I97I, 227-228.

25. Малышев В.А. – Положительные случайные блуждания и обобщенные эллиптические интегралы, ДАН СССР, I96, 3, I970, 5I6-5I9.

26. Малышев В.А. – Уравнения Винера-Хопфа в четверти-плоскости, дискретные группы и автоморфные функции, Математ.сборник, 84, 4, I97I, 499-525.

27. Ю.И.Громак, В.А.Малышев – Стационарное распределение для вырожденного случайного блуждания в четверти плоскости. Вестник МГУ, I972, вып. 2, I8-24.

28. Малышев В.А. – Аналитический метод в теории двумерных положительных случайных блужданий. Сибирский математ. журнал, I3, 6, I972, I3I4-I329.

29. Малышев В.А. – Асимптотическое поведение стационарных вероятностей для двумерных положительных случайных блужданий. Сибирский математ. журнал, I4, I, I973, I56-I69.

30. Малышев В.А. – Классификация двумерных положительных случайных блужданий и почти линейные полумартингалы, ДАН СССР, 202, 3, I972, 526-528.

3I. Малышев В.А. – Аналитическое продолжение в краевых задачах для функций двух комплексных переменных, Функциональный анализ и его приложения, 7, 3, I973 .

32. Малышев В.А. – Нестандартные марковские системы массового обслуживания, "Теория массового обслуживания", Труды 2 школы-совещания по теории массового обслуживания, Дилижан,I970, Изд. МГУ, Москва, I97I, 9I-95.

33. Малышев В.А. – Простые явные формулы для некоторых случайных блужданий в четверти плоскости. Сб. "Вероятностные методы исследования" под ред. академика А.Н.Колмогорова. МГУ. I972, стр. I4-22.

34. Малышев В.А. – Факторизация функций со значениями в алгебрах многомерных теплицевых операторов, Успехи математ. наук, I8, 2, I973, 237-238.

Л.-96739 от 28.08.73г. Изд.№983
Зак.353 Объём I,4п.л. Тир. I50
МИЭМ. Москва,Б.Вузовский пер.д.3/I2