ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2015, том 464, № 5, с. 532–534

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.248.25

О НОВОМ ПОДХОДЕ К ЭРГОДИЧЕСКОЙ ГИПОТЕЗЕ БОЛЬЦМАНА

© 2015 г. А. А. Лыков, В. А. Малышев

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 16.03.2015 г.
Поступило 17.03.2015 г.

Мы рассматриваем самую плохую, в смысле сходимости к равновесию, многочастичную гамильтонову систему – линейную размерности $2N$, в которой есть N-параметрическое семейство инвариантных торов размерности N. Мы спрашиваем, какой минимальный контакт с внешним миром должен быть, чтобы имела место сходимость к мере Лиувилля на поверхности постоянной энергии из любого начального состояния на этой поверхности. Простейший пример такого контакта – для произвольной выделенной частицы в дискретные моменты времени меняется знак скорости, а между этими моментами частицы движутся согласно гамильтоновой динамике. Единственное отклонение от детерминированности состоит в том, что промежутки между моментами замены знака предполагаются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами.

DOI: 10.7868/S0869565215290083

Проблема эргодичности гамильтоновых многочастичных систем дала толчок к появлению новых дисциплин, таких как эргодическая теория динамических систем, КАМ-теория и т.д. [12]. Появилось много примеров неэргодичности: линейные системы, нелинейные с дополнительными интегралами движения и их возмущения. Можно было бы ожидать, что типичные гамильтонианы также не дадут эргодичности. Однако, насколько мы знаем, это все еще трудная открытая проблема с многими частичными результатами, см. [14, 15], и, после более чем вековой истории эргодической гипотезы, нелишне поискать альтернативные и более простые подходы к ней.

Естественно предположить, что любая физическая система всегда имеет некоторый контакт с внешним миром. Этот контакт может быть довольно различным по своей широте: 1) любая частица может иметь контакт с внешним миром или стохастическое поведение (например, с динамикой типа Глаубера); 2) только частицы на границе могут быть подвержены внешним случайным силам, и т.д. Но тогда естественно спросить: каким должен быть минимальный контакт, обеспечивающий эргодическое поведение. Возможная новая формулировка эргодической гипотезы может быть следующей: для типичного гамильтониана даже самый минимальный контакт обеспечивает эргодичность.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: alekslyk@yandex.ru

В этой работе и приведен пример такого минимального контакта, который состоит в том, что только одной выделенной частице разрешен контакт с внешним миром.

В статьях [7, 8] мы рассматривали частицу, на которую действовала внешняя случайная сила, что, при некоторых условиях на эту силу, гарантировало сходимость к распределению Гиббса. В данной работе мы предполагаем существенно меньшую случайность: выделенная частица подвергается некоторому простому детерминированному преобразованию (замене знака скорости, очень популярному в других задачах [2–6]), но в дискретные случайные моменты времени

$$0 < t_1 < \ldots < t_m < \ldots \quad (1)$$

Мера Лиувилля, очевидно, инвариантна относительно такой динамики на энергетической поверхности. Мы доказываем эргодичность такой системы относительно меры Лиувилля.

Очень показательно, что это работает для систем, имеющих самое неперспективное, в смысле эргодичности, поведение – для линейных систем. Но эргодичность будет не для всех линейных систем, а для почти всех. Это чисто алгебраический феномен, которого невозможно избежать. Кажется вероятным, что подобный результат должен иметь место и для типичных нелинейных систем, поскольку считается, что нелинейные системы имеют более сильное перемешивание, чем линейные.

Мы доказываем три результата. Первый из них содержит информацию о совокупности траекторий процесса с фиксированным начальным состоянием. Довольно громоздкий нелинейный анализ динамики на множестве инвариантных торов показывает, что эта совокупность покрывает всю энергетическую поверхность. Другие два доказывают эргодичность, используя тонкие результаты теории марковских процессов с непрерывным пространством состояний, см., например, [9—11]. Перейдем к точным определениям.

Гамильтонова динамика. Рассмотрим линейное пространство

$$L = \mathbb{R}^{2N} = \left\{\psi = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}:\right.$$

$$\left. q = (q_1, \ldots, q_N)^{\mathrm{T}},\ p = (p_1, \ldots, p_N)^{\mathrm{T}},\ q_i, p_i \in \mathbb{R} \right\},$$

где T означает транспозицию (так что ψ — вектор-столбец). L может быть представлено в виде прямой суммы $L = l_N^{(q)} \oplus l_N^{(p)}$ ортогональных (координаты и импульсы) пространств размерности N со стандартным скалярным произведением в $\mathbb{R}^{2N}$:

$$(\psi, \psi')_2 = (q, q')_2 + (p, p')_2 = \sum_{i=1}^{N}(q_i q_i' + p_i p_i').$$

Мы рассматриваем квадратичные гамильтонианы

$$H(\psi) = \sum_{k=1}^{N}\frac{p_k^2}{2} + U(q), \quad U(q) = \frac{1}{2}(q, Vq)_2, \quad (2)$$

где матрица $V > 0$, действующая в $\mathbb{R}^N$, предполагается вещественной и положительно определенной (поэтому частицы не могут уйти в бесконечность). Это определяет линейную гамильтонову систему

$$\dot{q}_k = p_k, \quad \dot{p}_k = -\sum_{l=1}^{N} V_{kl} q_l, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \quad (3)$$

Вводя $(2N \times 2N)$-матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -V & 0 \end{pmatrix},$$

получаем, что система (3) может быть записана как

$$\dot{\psi} = A\psi, \quad (4)$$

а ее решение $\psi(t)$ с начальным вектором $\psi(0)$ будет

$$\psi(t) = e^{tA}\psi(0).$$

Для любого $h > 0$ определим энергетическую поверхность

$$\mathcal{M}_h = \{\psi \in L: H(\psi) = h\},$$

которая является гладким компактным многообразием $\mathcal{M}_h$ коразмерности 1 (эллипсоидом) в L.

Допустимые гамильтонианы. Определим перемешивающее подпространство

$$L_- = L_-(V) = \left\{\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \in L: q, p \in l_V\right\},$$

где $l_V = l_{V,1}$ — подпространство в $\mathbb{R}^N$, порожденное векторами $V^k e_1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, где $e_1, \ldots, e_N$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^N$.

Пусть $\mathbf{V}$ — множество всех положительно-определенных $(N \times N)$-матриц, а $\mathbf{V}^+ \subset \mathbf{V}$ — подмножество матриц, для которых

$$L_-(V) = L. \quad (5)$$

Множество $V \in \mathbf{V}$ таких, что их собственные значения, обозначаемые $\omega_1^2, \ldots, \omega_N^2$, линейно независимы над полем рациональных чисел, обозначим $\mathbf{V}_{\mathrm{ind}}$.

Лемма 1. *Множество* $\mathbf{V}^+$ *открыто и всюду плотно* (*в топологии* $R^{\frac{N(N+1)}{2}}$) *в* $\mathbf{V}$, *а множество* $\mathbf{V}^+ \cap \mathbf{V}_{\mathrm{ind}}$ *является плотным, как в* $\mathbf{V}^+$, *так и в* $\mathbf{V}$.

Кусочно-детерминированный процесс. Предположим, что в моменты времени (1) происходит следующее детерминированное преобразование I: $L \to L$, все q_k, p_k остаются неизменными, кроме p_1, у которого меняется знак

$$p_1(t_m - 0) \to p_1(t_m) = -p_1(t_m - 0),$$
$$m \geq 1.$$

Между этими моментами система движется согласно гамильтоновым уравнениям (3). При этом, например, можно рассматривать L как фазовое пространство N одинаковых точечных частиц на $\mathbb{R}$, с массой $m = 1$, и где вещественные числа q_i, p_i — их координаты и импульсы. Тогда преобразование I можно интерпретировать как упругое столкновение частицы 1 со стенкой. Альтернативно, взяв dN вместо N, можно представлять N частиц в R^d, где только одна координата скорости частицы 1 меняет знак. Отражения относительно любой гиперплоскости в R^d можно рассмотреть аналогично.

Для данной последовательности (1) динамика нашего процесса для $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяется как

$$\psi(t) = e^{A(t - t_m)} I e^{A\tau_m} I e^{A\tau_{m-1}} I \ldots I e^{A\tau_2} I e^{A\tau_1}\psi(0),$$

где $\tau_1 = t_1$, $\tau_2 = t_2 - t_1$, ..., $\tau_m = t_m - t_{m-1}$, ... Для любого $t \geq 0$ определим линейные отображения $L \to L$

$$J(t)\psi = Ie^{tA}\psi, \quad \psi \in L.$$

Ясно, что $\mathcal{M}_h$ инвариантно относительно $J(t)$ для любого $h > 0$ и $t > 0$. Для любого $\psi \in L$ и любого целого $m \geq 1$ определим множество состояний

$$\mathcal{J}_m(\psi) = \{J(\tau_m)\ldots J(\tau_1)\psi: 0 \leq \tau_1, \ldots, \tau_m\} \subset \mathcal{M}_h,$$

в которые система может попасть в момент m-й замены знака.

Теорема 1. *Предположим, что* $\mathbf{V} \in \mathbf{V}^+ \cap \mathbf{V}_{\mathrm{ind}}$, *тогда существует* $m \geq 1$ *такое, что для любого* $\psi \in L$

$$\mathcal{J}_m(\psi) = \mathcal{M}_h.$$

Случайность вводится следующим предположением.

Предположение. Случайные величины

$$\tau_1 = t_1, \quad \tau_2 = t_2 - t_1, \ldots, \tau_n = t_n - t_{n-1}, \ldots$$

предполагаются независимыми, положительными, одинаково распределенными с конечным первым моментом $E\tau_1 < \infty$ и мерой $d\nu = \rho(s)ds$, где плотность ρ (относительно меры Лебега ds) положительна везде на R_+.

Обозначим π (нормированную) меру Лиувилля на энергетической поверхности. Хорошо известно, что π инвариантна относительно гамильтоновой динамики и относительно преобразования I.

Теорема 2. *Пусть* $V \in \mathbf{V}^+ \cap \mathbf{V}_{\mathrm{ind}}$. *Тогда при условии* A0 *для любого начального* $\psi(0)$ *и любой измеримой ограниченной вещественной функции* f *на* $\mathcal{M}_h$ *имеет место сходимость почти наверное*

$$M_f(T) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T f(\psi(t))dt \to \pi(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathcal{M}_h} f d\pi.$$

Оказывается, что для вложенной цепи Маркова $\psi_k = \psi(t_k)$ можно доказать более сильную сходимость. Обозначим через Σ борелевскую σ-алгебру на $\mathcal{M}_h$, и пусть $P^n(\psi, B)$ – переходная вероятность (в этой марковской цепи с дискретным временем) попасть из точки ψ в множество $A \in \Sigma$ за n шагов.

Теорема 3. *Марковская цепь* ψ_n *эргодична, т.е. при* $n \to \infty$

$$\sup_{A \in \Sigma} \left|P^n(\psi, A) - \pi(A)\right| \to 0$$

равномерно по $\psi = \psi_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аносов Д.В., Жужома Е.В.* Леммы о замыкании // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2012. № 1. С. 1–84.
2. *Fritz J., Funaki T., Lebowitz J.* Stationary States of Random Hamiltonian Systems // Probability Theory and Relates Fields. 1995. № 99. P. 211–236.
3. *Bernardin C., Kannan V., Lebowitz J., Lukkarinen J.* Harmonic Systems with Bulk Noises // J. Stat. Phys. 2012. № 146. P. 800–831.
4. *Bernardi C., Kannan V., Lebowitz J., Lukkarinen J.* Nonequilibrium Stationary States of Harmonic Chains with Bulk Noises // Europ. J. Phys. B. 2011. № 84. P. 685–689.
5. *Bernardin C., Olla S.* Transport Properties of a Chain of Anharmonic Oscillators with Random Flip of Velocities // J. Stat. Phys. 2011. № 145. P. 1224–1255.
6. *Lukkarinen J.* Thermalization in Harmonic Particle Chains with Velocity Flips // J. Stat. Phys. 2014. № 155. P. 1143–1177.
7. *Lykov A., Malyshev V.* Convergence to Gibbs Equilibrium – Unveiling the Mystery // Markov Processes and Related Fields. 2013. № 19. P. 634–666.
8. *Lykov A., Malyshev V.* Harmonic Chain with Weak Dissipation // Markov Processes and Related Fields. 2012. № 18. P. 721–729.
9. Markov Chains and Stochastic Stability / S. Meyn, R. Tweedie. Eds. Cambridge, 2009. 594 p.
10. *Портенко Н., Скороход А., Шуренков В.* Маркоские процессы. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 5–245.
11. Lecture Notes on Limit Theorems for Markov Chain Transition Probabilities / S. Orey. Ed. L.: Van Nostrand, 1971. 108 c.
12. *Арнольд В., Козлов В., Нейштадт А.* Математические аспекты классической и небесной механики // Динамические системы-3. Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 5–120.
13. *Козлов В., Трещев Д.* Слабая сходимость решений уравнения Лиувилля для нелинейных гамильтоновых систем // ТМФ. 2003. № 134. С. 388–400.
14. *Villani C.* Particle Systems and Nonlinear Landau Damping // Lect. Notes. 2011. http://cedricvillani.org/for-mathematicians/complete-list-of-publications/. C. Villahi home page.
15. *Simanyi N.* Conditional Proof of the Boltzmann-Sinai Ergodic Hypothesis // Invent. Math. 2009. № 177. P. 381–413.