Вывод уравнения Эйлера для газа Чаплыгина из микродинамики

Лыков А.А., Малышев В.А.

МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва

Рассмотрим систему N частиц на прямой с взаимодействием

$$U = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} V(|x_j - x_i|), \tag{1}$$

где потенциал взаимодействие между частицами имеет вид

$$V(x) = \frac{\omega^2}{2} \begin{cases} \phi(x), & 0 < x \leqslant a - a_1, \\ (x-a)^2, & a - a_1 < x \leqslant a + a_1, \\ const, & x > a + a_1, \end{cases}$$

для произвольной гладкой функции $\phi(x)$, и $a = \frac{1}{N} > a_1 = \frac{r}{N} > 0$, $r < 1$ и $\omega = \omega' N > 0$. Начальные условия таковы

$$x_{k+1}(0) - x_k(0) = \frac{1}{N} X\left(\frac{k}{N}\right) > 0, \quad \dot{x}_{k+1}(0) - \dot{x}_k(0) = \frac{1}{N} V\left(\frac{k}{N}\right), x_1(0) = 0, \ \dot{x}_1(0) = v,$$

$$x_1(0) = 0, \ \dot{x}_1(0) = v, \ \ X(0) = X(1) = 1, \quad V(0) = V(1) = 0$$

для некоторых $v \in \mathbb{R}$ и $X, V \in C^4([0,1])$.

Также рассмотрим уравнение Эйлера для газа Чаплыгина:

$$u_t + u u_y = -\frac{1}{\rho} p_y, \quad p = -\frac{1}{\rho}, \tag{2}$$

где $p = p(t,y)$—давелние, $u(t,y)$ — эйлерова скорость газа в точке y в момент t.

В работе [2] доказывется, что при соотсветствующем скейлинге динамика частиц с потенциалом (1) описывается уравненим Эйлера для газа Чаплыгина (2). Одним из ключевых моментов доказательства выступает понятие регулярности системы частиц. Мы называем систему регулярной, если в ней отсутствуют столкновения, т.е. $x_k(t) \neq x_j(t)$ для всех $t \geqslant 0$ и всех $k \neq j$. Заметим, что даже для простейшей системы с потенциалом (1) проверка этого свойства является нетривиальной задачей. В частности, мы доказываем следующую теорему:

Теорема. Для всех $t \geq 0, k = 1, ..., N-1$ имеет место

$$\frac{1-\gamma}{N} \leqslant x_{k+1}(t) - x_k(t) \leqslant \frac{1+\gamma}{N}$$

где константа γ зависит только функций X и V, что означает отсутствие столкновений между частицами.

При $N \to \infty$ мы получаем регулярную континуальную систему частиц [1] с траекториями $y(t,x)$, скоростями $u(t,y)$ и начальными условиями $y(0,x) = x, u(0,y) = v(x)$.

Стоит отметить, что газ Чаплыгина получил большую популярность в связи с исследованиями в космологии, в частности, в проблеме описания тёмной энергии и тёмной материи ([3,4,5,6,7]).

Список литературы

[1] А. А. Лыков, В. А. Малышев, В. Н. Чубариков. Регулярные континуальные системы точечных частиц, I: Системы без взаимодействия. Чебышевский сборник, 2016, т. 17, № 3, с. 148–165.

[2] A. A. Lykov, V. A. Malyshev. From the N Body Problem to Euler Equations. Russian Journal of Mathematical Physics, 2017, v. 24, № 1, p. 179-195.

[3] J. C. Fabris, S. V. B. Goncalves, and P. E. de Souza. Density Perturbations in a Universe Dominated by the Chaplygin Gas. General Relativity and Gravitation, Vol. 34, No. 1, 2002.

[4] Luis P. Chimento. Extended tachyon field, Chaplygin gas, and solvable k-essence cosmologies. Phys. Rev. D, Vol. 69, Iss. 12 — 15, 2004.

[5] Ka Luen Cheung. Finite Propagation Speed and Finite Time Blowup of the Euler Equations for Generalized Chaplygin Gas. Advances in Theoretical and Applied Mathematics, v. 12, 1,51-63, 2017.

[6] M. Salti, H. Yanar, O. Aydogdu. Logarithmic-corrected Ricci and modified Chaplygin gas dark energy models in fractal framework. The European Physical Journal Plus, 132, 5, 2017.

[7] Subhra Bhattacharyaa, Shibaji Halderb,Subenoy Chakraborty. Evolving cosmic scenario in modified Chaplygin gas with adiabatic matter creation. Annals of Physics, Volume 388, 443–455, 2018.