

© 2008 г.

В. А. Малышев\*

## ПОЧЕМУ ТЕЧЕТ ТОК: МНОГОЧАСТИЧНАЯ ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ

Во всех известных микромоделях электрического тока, включая базисную модель Друде, частицы движутся под влиянием внешней ускоряющей силы и тормозятся внешней средой. Введена классическая детерминированная одномерная многочастичная модель на отрезке с законом взаимодействия ближайших соседей, объясняющая как ток может течь, если внешняя сила действует только на границах пассивного (т.е. вне генератора, аккумулятора и т.д.) участка проводника. Получено семейство явных решений.

**Ключевые слова:** электрический ток, системы многих частиц, физика твердого тела, классическая динамика.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

**1.1. Модель Друде.** Первой микроскопической моделью электрического тока была модель Друде 1900 года, излагаемая во всех курсах физики твердого тела (см., например, [1]). Она основана на представлении об электрическом токе как о движении заряженных частиц, например электронов. Приведем ее точную математическую формулировку. На прямой в момент времени  $t$  в точках  $x_i(t)$  находятся одинаковые частицы, динамика которых основана на следующих предположениях.

1. Частицы не взаимодействуют между собой.

2. Динамика включает случайный элемент. А именно, в случайные моменты времени  $t_{j,1} < t_{j,2} < \dots < t_{j,i} < \dots$  частица  $j$  приобретает случайную скорость  $v_{j,i}$  по причине взаимодействия с частицами внешней среды. При этом все величины  $t_{j,i} - t_{j,i-1}$  независимы и одинаково распределены, а все  $v_{j,i}$  независимы, одинаково распределены и имеют нулевое среднее. В интервалах между ударами для каждой  $j$ -й частицы выполняется уравнение Ньютона

$$m \frac{d^2 x_j}{dt^2} = F,$$

где сила  $F$  постоянна.

---

\*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.  
E-mail: malyshev2@yahoo.com

3. Сила  $F$  является внешней, т.е. не зависит от расположения  $x_i(t)$  других частиц.

Закон больших чисел говорит, что при широких предположениях относительно распределений введенных случайных величин для каждой частицы с вероятностью единица существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_j(t)}{t} = v = \frac{F\tau}{2m}, \quad \tau = \langle t_{j,i} - t_{j,i-1} \rangle.$$

Если заряды  $e$  частиц одинаковы, а плотность  $\rho$  частиц постоянна, то в среднем за единицу времени через данную точку прямой будет проходить  $v\rho = F\tau\rho/(2m)$  частиц, что дает закон Ома  $U = IR$  для проводника единичной длины с

$$I = \rho ve, \quad U = \frac{F}{e}, \quad R^{-1} = \frac{\tau\rho e^2}{2m}.$$

Другим (детерминистическим) вариантом модели Друде является использование уравнения Ньютона с трением для каждой частицы

$$m \frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} = F - \mu \frac{dx_i(t)}{dt}.$$

**1.2. Обобщения модели Друде.** Модель Друде развивалась в разных направлениях. Прежде всего появлялись ее квантовые уточнения и обобщения: теория Блоха, теория Зоммерфельда, полуклассическая теория, теория ферми-жидкости Ландау и т.д. Следует отметить, однако, что эти теории пока существуют лишь на физическом уровне строгости, несмотря на то что есть достаточно развитая математическая теория одночастичного спектра в периодическом, почти периодическом и случайном потенциалах. Дело в том, что вопрос о введении случайности типа Друде в закрытые квантовые системы не имеет естественного общепринятого ответа.

Опубликован целый ряд математических работ по классическим обобщениям модели Друде. В этих работах в основном внимание сосредоточено на ослаблении приведенного выше ограничения 2. При этом различными способами вводилась внешняя случайная среда, при взаимодействии с которой  $v_{j,i}$ ,  $t_{j,i}$  становились даже немарковскими (подробнее см. последние опубликованные по этой тематике статьи [2] [3]).

В настоящей статье мы рассмотрим ограничение 3 модели Друде, самое существенное с нашей точки зрения. Дело в том, что ускоряющая *внешняя сила отсутствует* на всем протяжении проводника, кроме, возможно, некоторой части, например внутри генератора. Эту (малую) часть проводника будем называть активной частью, остальную часть назовем пассивной. Вопросу о том, почему электроны движутся в отсутствие внешней силы, даже в физической литературе уделялось мало внимания. Во многих книгах и работах об этом не упоминается вообще, а в других говорится очень кратко. Надо сказать, что вопрос, откуда берется сила  $F$ , активно обсуждался в течение многих лет в журнале "American Journal of Physics" в основном как методический вопрос преподавания (см., например, [4], [5]). Предлагаемое объяснение – сила,двигающая электроны, создается тангенциальной составляющей зарядов, которые каким-то образом образуются на поверхности проводника. Иначе

говоря, ускоряющая сила  $F$  есть некая эффективная сила, возникающая от самих зарядов. Однако если это так, то надо понять как это происходит. Ясно, что модель независимых электронов теряет смысл по самому определению. Более того, если есть тангенциальная составляющая, т.е. заряд с одной стороны от произвольного сечения больше, чем с другой, то плотность частиц не может быть постоянной вдоль проводника. И, более того, поверхностные заряды не могут стоять на месте и даже не могут двигаться с равномерной средней скоростью. Каких-либо математических моделей на этот счет мне неизвестно. Однако, чтобы разобраться в этих проблемах, более точная модель совершенно необходима.

Цель этой статьи – привести математически строгую модель в простейшем одномерном случае, т.е. фактически для бесконечно тонкого провода. Уже на этом примере будут видны многие упомянутые проблемы, которые получают удовлетворительное разрешение.

Будет получено решение многочастичной задачи на бесконечном временном интервале, в котором одновременно выполнен целый ряд казалось бы противоречивых требований:

- а) частицы движутся вправо под действием градиента собственной плотности;
- б) скорость частиц постоянна по всей длине проводника, т.е. выполняется закон Ома;
- в) плотность частиц постоянна на всей длине проводника.

В точном смысле слова такого решения, конечно, не существует. Однако асимптотически при большой плотности частиц это оказывается справедливым.

Интуитивно идея построения естественна и, по-видимому, единственно возможна. Мы рассматриваем частицы на примерно одинаковом, очень малом (порядка обратной плотности) расстоянии  $r$  друг от друга. Однако каждый последующий промежуток будет все-таки немного больше (на величину  $\epsilon \ll r$ ) предыдущего. Поэтому в силу отталкивания на каждую частицу действует сила, направленная вправо. Величина  $\epsilon$  подбирается так, чтобы эта сила имела порядок  $O(1)$ . Поэтому частицы будут иметь скорости порядка  $O(1)$ . Трудность построения состоит в том, что если расстояния между соседями растут с течением времени, то частицы должны ускоряться. Решение состоит в построении нестационарной модели, но с очень медленно меняющейся скоростью. Мы называем эту модель квазистационарной.

Интересно, что механизм такого фундаментального физического явления, как электрический ток, оказывается довольно тонким.

## 2. МОДЕЛЬ И РЕЗУЛЬТАТ

Замкнутый провод мы представляем в виде отрезка  $[0, L + M]$  с отождествленными концами  $0$  и  $L + M$ . Два отрезка  $[0, L]$  и  $[L, L + M]$  будем называть пассивным и активным участками соответственно. Активный участок соответствует генератору, аккумулятору и т.п. Мы будем рассматривать только пассивный участок провода, а влияние на него активного участка учитывается только в граничных условиях на пассивном участке.

Первоначально на отрезке  $[0, L]$  находится  $N(L)$  частиц в точках

$$0 = x_0(0) < x_{-1}(0) < \dots < x_{-N(L)+1}(0) < L.$$

Определим энергию взаимодействия (ближайших соседей) этой системы частиц как

$$U(\{x_i\}) = \sum_{\langle i, i-1 \rangle} V(x_i - x_{i-1}),$$

где сумма берется по всем парам соседей внутри интервала  $[0, L]$ . Мы предполагаем, что  $V(x) = V(-x) > 0$ ,  $f(r) = -dV(r)/dr \sim c_1 r^{-a}$ ,  $a > 2$ , при  $r = |x| \rightarrow 0$  и  $V(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Для закона Кулона в трехмерном, но очень тонком проводе должно быть  $a = 2$ , для потенциала Леннарда-Джонса  $a = 6$ , поэтому естественно рассмотреть общий случай произвольного  $a$ .

Динамика этой системы частиц описывается уравнениями Ньютона с трением

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} - A \frac{dx_i}{dt} + F(x_i, t), \quad (1)$$

где мы взяли массу частиц равной единице,  $m = 1$ . Отсюда следует, что частицы не меняют своего порядка на отрезке и в любой фиксированный момент времени их можно пронумеровать справа налево:  $\dots < x_i(t) < x_{i-1}(t) < \dots$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Если сила  $F$  постоянна на всем отрезке (случай Друде), то система (1) на окружности длины  $L$  имеет тривиальное решение, где все частицы находятся на равном расстоянии  $L/N(L)$  от ближайших соседей и имеют одинаковую постоянную скорость  $v = FA^{-1}$ . Нам предстоит построить гораздо более сложное решение, которое, однако, близко к равномерному движению при большой плотности частиц.

Граничные условия задаются следующими условиями на силу  $F$  и условиями входа и выхода частиц на концах пассивной части проводника.

1. Если в точке  $L$  оказывается частица с положительной скоростью, то она исчезает (входит в активный участок) в этот же момент времени.

2. Внешняя сила  $F(x, t)$  ограничена и отлична от нуля только в некоторых малых окрестностях концов и, более того, действует только на крайние частицы: левую  $i_-(t)$  и правую  $i_+(t)$ . При этом предполагается, что для всех  $t$

$$F(x_{i_-(t)}(t)) > |f(x_{i_-(t)-1}(t) - x_{i_-(t)}(t))|, \quad F(x_{i_+(t)}(t)) < |f(x_{i_+(t)}(t) - x_{i_+(t)+1}(t))|. \quad (2)$$

Таким образом, мы заменяем гипотезу Друде о внешней силе на всей длине проводника гипотезой о внешней силе только на концах.

3. В моменты  $t_k = ks$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , из активного участка в отрезок  $[0, L]$  входят частицы в точке 0 с некоторой положительной скоростью  $v_0 > 0$ . Это условие непротиворечиво, так как ввиду условия 2 крайняя левая частица движется всегда направо.

**ЛЕММА.** Условия 1–3 однозначно определяют динамику системы на каждом интервале времени  $[ks, (k+1)s]$ , а значит, и для всего интервала  $[0, \infty)$ . При этом в каждый момент времени на интервале  $[0, L]$  находится конечное число частиц.

Интуитивно очевидно, что число частиц на отрезке будет даже равномерно ограничено, так как они будут выталкиваться через правый конец.

Сначала мы дадим более грубую формулировку результата в виде теоремы существования, где условия “а”, “б”, “в”, сформулированные в п. 1.2, получают точную формулировку. Ниже мы построим эти решения в явном виде.

Перепишем уравнения (1) в виде

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f(x_i - x_{i+1}) - f(x_{i-1} - x_i) - A \frac{dx_i}{dt} + F(x_i, t). \quad (3)$$

Обозначим через

$$G_i(t) = f(x_i(t) - x_{i+1}(t)) - f(x_{i-1}(t) - x_i(t)) + F(x_i, t)$$

силу, действующую на частицу  $i$  в момент  $t \in [0, L]$ . Напомним, что сила  $F_i$  отлична от нуля лишь для крайних частиц.

**ТЕОРЕМА 1.** Существует достаточно широкий класс потенциалов  $V$ , удовлетворяющих приведенным выше условиям, и такой, что для любого потенциала из этого класса верно следующее. Существует  $L_0 > 0$  такое, что для произвольного  $L < L_0$ , достаточно больших  $N = [N(L)/L]$ ,  $s = 1/N$  и произвольного  $v_0 > 0$  существует такая сила  $F^{(N)}$ , удовлетворяющая условию 2, что соответствующие решения  $x_i^{(N)}(t)$  системы (1) удовлетворяют следующим условиям для всех  $0 \leq t < \infty$  при  $N \rightarrow \infty$ :

1) силы  $G_i^{(N)}(t) \rightarrow \text{const} > 0$  для любого  $t$  и любой частицы  $i$ , находящейся в момент  $t$  на отрезке;

2) для любой частицы  $i$ , находящейся в момент  $t$  на отрезке  $[0, L]$ , скорости  $v_i^{(N)}(t) \rightarrow v_0$ ;

3) для всех  $t$  и любого отрезка длины  $l$ , принадлежащего  $[0, L]$ ,  $N(l, t)/N \rightarrow l$ , где  $N(l, t)$  – число частиц на этом отрезке в момент времени  $t$ .

Эта теорема следует из более точной теоремы, приводимой ниже.

### 3. ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ

**3.1. Квазистационарные решения.** Назовем решение системы (1) квазистационарным, если существует гладкая возрастающая функция  $x(t)$  на отрезке  $[0, T_L]$  такая, что  $x(0) = 0$ ,  $x(T_L) = L$  и для всех целых  $k > -N(L)$

$$x_k(t) = x(t - ks). \quad (4)$$

Так что  $x_k(t)$  определена для  $t \in [ks, ks + T_L]$ . Будем называть функцию  $x(t)$  порождающей функцией. Фактически в дальнейшем мы фиксируем плотность  $N$  частиц, берем  $s = N^{-1}$ ,  $T_L = N(L) = NT_L$  для некоторого  $T_L = O(1)$  и выбираем  $L = x(T_L)$ .

Тогда, как нетрудно видеть, в моменты  $ks$  одна частица входит и одна выходит. Значит, число  $N(L)$  частиц на отрезке  $[0, L]$  сохраняется, и вектор  $(\dots, x_i(t), \dots)$  будет периодическим на отрезке  $[0, L]$  с периодом  $s$ , если принимать в рассмотрение только расположение частиц, но не их нумерацию.

Заметим, что уравнение (3) для каждой из частиц может быть переписано как

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = G_i(t) - A \frac{dx_i}{dt}.$$

В квазистационарном случае силы  $G_i(t) = G(t)$  не будут зависеть от  $i$ . При этом сила  $G(t)$ , действующая на частицу, которая в момент  $t$  находится в точке  $x(t) \in [0, L]$ , при условии, что это не крайняя частица, определяется из следующего уравнения (получаемого подстановкой квазистационарного решения в (1)):

$$f(x(t) - x(t - s)) - f(x(t + s) - x(t)) = G(t), \quad t \in [0, T_L]. \quad (5)$$

Порождающая функция  $x(t)$  должна, таким образом, удовлетворять двум уравнениям сразу: уравнению (5) и уравнению

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = G(t) - A \frac{dx}{dt}. \quad (6)$$

Остается вопрос о граничных условиях. Заметим, что уравнение (6) вместе с условиями

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0$$

однозначно определяет функцию  $x(t)$  на всей вещественной оси. Это позволяет фиксировать внешнюю силу  $F$ . Однако уравнение (5) мы будем решать на интервале  $[0, T_L]$ .

Удобно ввести собственное время  $\tau_k = t - ks$ ,  $0 \leq \tau \leq T_L$ , для каждой частицы  $k$ , отсчитываемое от начала ее входа в отрезок. Тогда для крайних частиц  $i_-, i_+$

$$F(x_{i_-}(\tau_{i_-})) = f(x(\tau_{i_-} - s) - x_{i_-}(\tau_{i_-})), \quad F(x_{i_+}(\tau_{i_+})) = f(x(\tau_{i_+} + s) - x_{i_+}(\tau_{i_+})).$$

Из этого определения следует, что уравнение (5) имеет место и для обеих крайних частиц. Заметим, что конкретный выбор граничных условий диктуется только конкретным явным решением. По-видимому, для более общих граничных условий существуют решения, которые уже не будут квазистационарными.

План решения функционального уравнения (5) таков. Мы находим  $x(t)$  из уравнения (6), в котором берем функцию  $G(t)$  в виде

$$G(t) = w + g_0(t) + g(t),$$

где затравочные константу  $w$  и функцию  $g_0(t)$  мы подбираем (это будет нашим первым приближением), а  $g(t)$  ищем как решение уравнения (5), которое, таким образом, мы будем рассматривать как уравнение на  $g$  при данной  $f$ . Заметим, что это уравнение нелинейное, так как  $x(t)$  зависит от  $g$  (и определяется по ней однозначно). Если существует решение функционального уравнения (5), то существует квазистационарное решение уравнения (1).

**3.2. Порождающая функция.** Рассмотрим уравнение на интервале  $t \in [0, T_L]$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = G(t) - A \frac{dx}{dt} \quad (7)$$

с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0 = A^{-1}w, \quad (8)$$

где

$$G(t) = w + \nu t + g(t)$$

для некоторой константы  $w > 0$ , имеющей смысл основной постоянной силы, действие которой на каждую частицу направлено вправо. Затравочная функция  $\nu t$  с малым параметром  $\nu = \nu(N)$  определяет слабый рост этой силы при движении направо в течение короткого, но все-таки порядка  $O(1)$ , промежутка времени.

Решение уравнения (7) имеет вид

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A^{-1}w + \nu e^{-At} \int_0^t u e^{Au} du + e^{-At} \int_0^t g(u) e^{Au} du. \quad (9)$$

Тогда

$$e^{-At} \int_0^t u e^{Au} du = A^{-1}t - A^{-2} + A^{-2}e^{-At}, \quad (10)$$

что дает для малых  $t$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A^{-1}w + \nu \left( \frac{t^2}{2} + O(t^3) \right) + e^{-At} \int_0^t g(u) e^{Au} du.$$

Тогда из (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned} x(t) = \int_0^t v(t) dt &= A^{-1}wt + \nu A^{-1} \frac{t^2}{2} - \nu A^{-2}t - \nu A^{-3}(e^{-At} - 1) + \\ &+ \int_0^t \left( \int_0^p g(u) e^{-A(p-u)} du \right) dp. \end{aligned} \quad (11)$$

**3.3. Шкалы и асимптотики.** Ведущими являются три шкалы. Основная шкала имеет порядок  $O(1)$ . Таковы  $L$ ,  $T(L)$ , скорость частиц и сила  $G$ , действующая на каждую частицу. Вторая шкала имеет порядок обратной плотности  $N^{-1}$ , в этой шкале находятся время  $s = N^{-1}$  между входом соседних частиц в точке 0 и расстояния

$$r(t) = x(t+s) - x(t) = r + \epsilon_0 + \epsilon_g$$

между соседними частицами, где

$$\begin{aligned} r &= A^{-1}ws, \\ \epsilon_0 &= \nu A^{-1} \left( ts + \frac{1}{2}s^2 \right) - \nu A^{-2}s - \nu A^{-3}e^{-At}(e^{-As} - 1), \\ \epsilon_g &= \int_t^{t+s} \left( \int_0^p g_1(u) e^{-A(p-u)} du \right) dp. \end{aligned} \quad (12)$$

Третья шкала измеряет разность соседних расстояний

$$z(t) = x(t+s) - 2x(t) + x(t-s) = \nu s^3 + \delta_0 + \delta_g,$$

где

$$\begin{aligned} \delta_0 &= -\nu A^{-3}(e^{-As} - 1)(e^{-A(t+s)} - 2e^{-At} + e^{-A(t-s)}) - \nu s^3 = \nu s^3(e^{-At} - 1) + O(\nu s^4), \\ \delta_g &= \int_t^{t+s} \left( \int_0^p g(u)e^{-A(p-u)} du \right) dp - \int_{t-s}^t \left( \int_0^p g(u)e^{-A(p-u)} du \right) dp. \end{aligned} \quad (13)$$

### 3.4. Решение функционального уравнения.

**ТЕОРЕМА 2.** *Существует  $T_0 > 0$  такое, что для любого  $0 < T_L < T_0$  и любого достаточно большого  $N$  квазистационарное решение, определенное формулами (4), (11), существует и определено на  $(-\infty, \infty)$ . Оно периодически с периодом  $s$ , если не принимать во внимание нумерацию частиц. Более того, выполнены утверждения теоремы 1.*

Действительно, перепишем функциональное уравнение (5), используя асимптотику потенциала взаимодействия в нуле. Взяв  $c_1 = 1$ , для  $z = o(r)$  имеем формальный ряд, сходимость которого мы докажем ниже:

$$f(r(t)) - f(r(t) + z(t)) = r(t)^{-a} - (r(t) + z(t))^{-a} = r(t)^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} d_k(a) \left( \frac{z(t)}{r(t)} \right)^k, \quad (14)$$

где  $d_k(a) = C_{a+k-1}^{a-1}$ . Перепишем разложение в виде

$$\begin{aligned} (r + \epsilon_0 + \epsilon_g)^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} d_k(a) \left( \frac{\nu s^3 + \delta_0 + \delta_g}{r + \epsilon_0 + \epsilon_g} \right)^k &= \\ = r^{-a} \left( 1 + \frac{\epsilon_0}{r} + \frac{\epsilon_g}{r} \right)^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} d_k(a) \left( \frac{\frac{\nu s^3}{r} + \frac{\delta_0}{r} + \frac{\delta_g}{r}}{1 + \frac{\epsilon_0}{r} + \frac{\epsilon_g}{r}} \right)^k &= \\ = r^{-a} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{i,j,k,l,m} \left( \frac{\nu s^3}{r} \right)^i \left( \frac{\epsilon_0}{r} \right)^j \left( \frac{\epsilon_g}{r} \right)^k \left( \frac{\delta_0}{r} \right)^l \left( \frac{\delta_g}{r} \right)^m, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$f_{i,j,k,l,m} = (-1)^{i+l+m-1} d_{i+l+m}(a).$$

Заметим, что суммирование по  $i$  начинается с  $i = 1$ . Разобьем этот ряд на две части. Первую, в которую включаем все члены с  $k = m = 0$ , обозначим через  $\eta$ . Вторая часть, которую мы обозначим через  $Bg$ , включает все остальные члены. Таким образом,  $\eta$  – константа, а  $B$  можно рассматривать как нелинейный оператор.

Нас интересует основной член в  $\eta$  с  $i = 1, j = k = l = m = 0$ . Мы приравниваем его к  $w$ ,

$$w = \frac{a\nu s^3}{r^{a+1}} = \frac{a\nu s^3}{(A^{-1}ws)^{a+1}},$$



что дает значение параметра

$$\nu = s^{a-2} a^{-1} A^{-a-1} w^{a+2}.$$

Основной ряд, за вычетом основного члена, переписывается так:

$$Bg + (\eta - w) = w \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{i,j,k,l,m} \left( \frac{\nu s^3}{r} \right)^{i-1} \left( \frac{\epsilon_0}{r} \right)^j \left( \frac{\epsilon_g}{r} \right)^k \left( \frac{\delta_0}{r} \right)^l \left( \frac{\delta_g}{r} \right)^m - w. \quad (16)$$

Используем оценки

$$\left| \frac{\epsilon_0}{r} \right| = O(\nu), \quad \left| \frac{\delta_0}{r} \right| = o(\nu), \quad \left| \frac{\epsilon_g}{r} \right| \leq CT_L \|g\|, \quad \left| \frac{\delta_g}{r} \right| \leq CT_L \|g\|$$

для некоторой константы  $C > 0$ , где под нормой функций на отрезке  $\|g\| = \sup |g|$  понимается ее супремум на этом отрезке. Эти оценки легко следуют из соотношений (12), (13).

Перепишем уравнение в следующем виде:

$$g = Bg - \nu t + \eta, \quad (17)$$

где  $\eta = -\nu t$ . Заметим, что следующий по порядку член, не зависящий от  $g$ , есть член с  $i = j = 1, k = l = m = 0$ . Он равен

$$wr^{-1} \left( \nu A^{-1} \left( ts + \frac{1}{2} s^2 \right) - \nu A^{-2} s - \nu A^{-3} e^{-At} (e^{-As} - 1) \right).$$

Это дает поправку к нашему затравочному члену  $\nu t$ . Все остальные члены имеют меньший порядок либо по  $N^{-1}$ , либо по  $T_L$ .

Для достаточно малых  $T_L > 0$  оператор  $B$  переводит шар  $\|g\| \leq 1$  в себя. Более того, имеет место неравенство  $\|B\| < \beta$  для малого  $\beta = \beta(T_L)$  на шаре  $\|g\| \leq 1$ . Кроме того,  $\|\eta\| = O(\nu)$ . Поэтому решение уравнения (17) существует, единственно и может быть записано в виде

$$g = (1 - B)^{-1} (\eta - \nu t) = \sum_{k=0}^{\infty} B^k (\eta - \nu t).$$

Заметим, что фактически наши формулы определяют  $g(t)$  на интервале  $[-\epsilon, T_L + \epsilon]$ , что и даст квазистационарное решение.

#### 4. ЗАМЕЧАНИЯ

**Условие малости  $T_L$ .** С одной стороны, это условие техническое, а с другой стороны, какое-то подобное условие необходимо, так как ток не может течь по слишком длинному проводу. Более того, это условие можно перевести скейлингом в условия на другие параметры в основном уравнении: массу, потенциал (в частности, на заряд), коэффициент трения  $A$ , а также, конечно,  $x, t$ .

**Переходные режимы.** В оригинальной модели Друде динамика одной частицы сходится к равномерному движению экспоненциально быстро. Интересно было бы доказать, что экспоненциальная сходимости должна иметь место и для нашей модели при фиксированных выше граничных условиях и некотором близком к равномерному начальном распределении  $N_L$  частиц на отрезке.

Если граничные условия нулевые и в начальный момент  $N$  частиц сконцентрированы на малом участке отрезка, то возникает задача о разряде: о скорости сходимости к равномерному расположению частиц, т.е. в точках  $0, L/N, 2L/N, 3L/N, \dots$ .

**Непрерывный заряд.** Наш результат показывает, что в основе классической модели движения зарядов без внешней силы лежит довольно тонкий механизм. Поэтому естественно возникает вопрос, может ли быть такой механизм в более грубом приближении непрерывной плотности заряда. Мы приведем два возможных кандидата.

Первое существенное огрубление – это использование уравнения Больцмана. В этом приближении вместо точечных частиц рассматривается непрерывная плотность  $\rho = \rho(t, x, v)$ . Формально уравнение Больцмана для системы невзаимодействующих частиц в поле силы  $F = F(x, v)$  имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Если считать, что разность сил от ближайших соседей при некотором скейлинге перейдет в силу, пропорциональную градиенту плотности

$$F = c \int \frac{\partial f}{\partial x} dv,$$

то получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial v} \left( c \int \frac{\partial f}{\partial x} dv - Av \right).$$

В более грубом гидродинамическом приближении предполагается, что весь заряд  $\rho(x)$  в точке  $x$  имеет одну скорость  $v(x)$ . Уравнения Навье–Стокса для вязкой сжимаемой жидкости имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \left( \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{d}{dx} p \right).$$

Вместе с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$$

и с условием изэнтропии  $p = c\rho$  это дает замкнутую систему уравнений на  $\rho(x, t)$  и  $v(x, t)$ . Условие изэнтропии является заменой взаимодействия ближайших соседей.

**Квантовые модели.** Здесь возможны разные аналоги основной системы (1). Более того, задача осложняется вопросом, в какой степени надо учитывать эффект расплывания волновых пакетов.

**Список литературы**

- [1] Н. Ашкрофт, Н. Мермин, *Физика твердого тела*, Т. 1, 2, Мир, М., 1979.
- [2] S. Caprino, C. Marchioro, M. Pulvirenti, *Comm. Math. Phys.*, **264**:1 (2006), 167–189.
- [3] P. Buttà, E. Caglioti, C. Marchioro, *Comm. Math. Phys.*, **249**:2 (2004), 353–382.
- [4] N. Preyer, *Amer. J. Phys.*, **70**:12 (2002), 1187–1193.
- [5] J. D. Jackson, *Amer. J. Phys.*, **64**:7 (1996), 855–870.

Поступила в редакцию 26.03.2007