ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1975

т. 224, № 1

Доклады Академии наук СССР
1975. Том 224, № 1

УДК 519.214 МАТЕМАТИКА

В. А. МАЛЫШЕВ

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ГИББСОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 V 1975)

Пусть $\mathbf{Z}^\nu=\{t=(t^1,\ldots,t^\nu)\}$ — целочисленная решетка в ν-мерном эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^\nu$, $X^{\mathbf{Z}^\nu}$ — множество функций (конфигураций) на $\mathbf{Z}^\nu$ со значениями в $X=\{-1, 1\}$. Мы будем рассматривать трансляционно-инвариантные случайные поля $\xi(t)\equiv\sigma_t$, $t\in\mathbf{Z}^\nu$, со значениями в X, т. е. инвариантные относительно сдвигов вероятностные меры на $X^{\mathbf{Z}^\nu}$ с обычной Σ-алгеброй.

Для любого конечного $T=\{t_1,\ldots,t_n\}\subset\mathbf{Z}^\nu$ положим

$$\sigma_T=\sigma_{t_1}\cdot\ldots\cdot\sigma_{t_n},\quad S_V=\sum_{t\in V}\sigma_t,\quad \tilde S_V=\frac{S_V-\langle S_V\rangle}{\sqrt{D(\Sigma\sigma_t)}}$$

и пусть $\langle\sigma_T\rangle$ — среднее значение σ_T.

Условиям асимптотической нормальности для $\tilde S_V$ в одномерном случае посвящено довольно много работ (см., например, ([11])). При $\nu\geqslant2$ ряд результатов получен применительно к задачам статистической физики для достаточно низких и достаточно высоких температур методами теории возмущений ([1, 2, 5]). Здесь мы доказываем один общий результат такого рода и применяем его к задачам статистической физики. Подобная же техника позволяет нам также найти предельные точки в некритической области для разных вариантов ренормализационных групп.

Мы будем говорить, что для случайного поля σ_t имеет место слабое экспоненциальное убывание корреляций (с.э.у.к.), если для любых конечных T_1, $T_2\subset\mathbf{Z}^\nu$ существуют константы c_1 и c_2, которые при данном поле могут зависеть лишь от $|T_1\cup T_2|$, такие, что

$$|\langle\sigma_{T_1\cup T_2}\rangle-\langle\sigma_{T_1}\rangle\langle\sigma_{T_2}\rangle|<c_1e^{-c_2d(T_1,T_2)},\quad c_2>0,$$

где $d(T_1,T_2)$ — расстояние между T_1 и T_2, т. е. $\min\limits_{t_i\in T_i}|t_1-t_2|$.

Теорема 1. *Если выполняется условие с.э.у.к. и* $D\equiv\sum\limits_{t\in\mathbf{Z}^\nu}\langle\sigma_0\sigma_t\rangle\neq0$, *то* $\tilde S_V$ *асимптотически нормальна при* $|V|\to\infty$.

Пусть теперь для любого целого N

$$S_t^N=\sum_{Nt^i\leqslant\tilde t^i<(N+1)t^i}\sigma_{\tilde t},\quad t=(t^1,\ldots,t^\nu),\quad \tilde t=(\tilde t^1,\ldots,\tilde t^\nu).$$

Тогда случайные величины $\xi_N(t)=(S_t^N-\langle S_t^N\rangle)/\sqrt{DS_t^N}$ *образуют трансляционно-инвариантное случайное поле с вещественными значениями.*

Теорема 2. *Последовательность случайных полей* $\xi_N(t)$ *слабо сходится к случайному полю* $\xi(t)$; *при этом случайные величины* $\xi(t)$ *являются взаимно независимыми гауссовскими с нулевым средним и единичной дисперсией.*

Мы докажем теорему 1, теорема 2 доказывается аналогично. Достаточно доказать, что n-й семиинвариант $M_n(\tilde S_V)$ случайной величины $\tilde S_V$ сходится при $|V|\to\infty$ к семиинварианту нормированной гауссовой случайной величины, т. е. к нулю при $n\geqslant 3$.

Лемма 1. *Для всех* $n\geqslant 1$

$$M_n(S_V)=\sum_{t_1,\ldots,t_n\in V}\langle\sigma_{t_1}\ldots\sigma_{t_n}\rangle^{\mathrm{tr}},$$

где $\langle\sigma_T\rangle^{\mathrm{tr}}$ — *усеченные корреляционные функции* (truncated correlation functions), *однозначно определяемые соотношением*

$$\langle\sigma_T\rangle=\sum_{\beta}\langle\sigma_{T_1}\rangle^{\mathrm{tr}}\ldots\langle\sigma_{T_{e(\beta)}}\rangle^{\mathrm{tr}},\qquad(1)$$

суммирование по всем разбиениям β *набора* $T=(t_1,\ldots,t_n)$ *на* $e(\beta)$ *частей* $T_1,\ldots,T_{e(\beta)}$.

Доказательство леммы 1 следует по индукции из (1) и известного соотношения

$$\langle(S_V)^n\rangle=\sum_{\alpha}M_{i_1(\alpha)}(S_V)\ldots M_{i_{l(\alpha)}(\alpha)}(S_V),\qquad(2)$$

суммирование по всем разбиениям α множества $\{1,\ldots,n\}$ на $l(\alpha)$ частей $i_1(\alpha),\ldots,i_{l(\alpha)}(\alpha)$ — мощности элементов разбиения.

Обозначим $d_T=\max d(T_1,T_2)$, где максимум берется по всем парам (T_1,T_2), $T_1\cup T_2=T$.

Лемма 2. *Для любого конечного* T *существуют такие константы* c_3 *и* c_4, *зависящие разве что от* $|T|$, *что*

$$\langle\sigma_T\rangle^{\mathrm{tr}}\leqslant c_3\exp(-c_4d_T),\quad c_4>0.$$

Этот факт отмечен ранее (см. ([7]), стр. 193), он очевидным образом вытекает из того, что для любого разбиения $A\cup B=T$, $A\cap B=\phi$, $\langle\sigma_T\rangle^{\mathrm{tr}}$ — представляется в виде суммы конечного числа членов вида

$$c(\langle\sigma_{A'\cup B'}\rangle-\langle\sigma_{A'}\rangle\langle\sigma_{B'}\rangle)\prod\langle\sigma_{T_i}\rangle,$$

где $A'\subset A$, $B'\subset B$, $A'\cup B'\bigcup\limits_i T_i=T$ (см. ([6]), стр. 315).

Множество всех наборов $R^n=\{(t_1,\ldots,t_n),\ t_i\in V\}$ разобьем на множества $R_d^n=\{(t_1,\ldots,t_n):d_{\{t_1,\ldots,t_n\}}=d\}$.

Лемма 3.

$$|R_d^n|\leqslant|V|(2d+1)^{\nu n}n!$$

Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству аналогичных утверждений, применяемых в аргументе Пайерлса (см., например, доказательство леммы 2 в ([9])).

Теорема 1 доказывается теперь совсем просто. Можно считать $\langle\sigma_t\rangle=0$. Тогда из с.э.у.к. следует, что при $|V|\to\infty$

$$\lim\frac{D(S_V)}{|V|}=\lim\frac{1}{|V|}\sum_{t_1,t_2\in V}\langle\sigma_{t_1}\sigma_{t_2}\rangle=D\equiv\sum_{t\in Z^\nu}\langle\sigma_0\sigma_t\rangle,$$

$$0=(0,0,\ldots,0).$$

Таким образом, $D(S_V)\sim D|V|$. При $n\geqslant 3$, используя леммы 1, 2, 3, имеем

$$|M_n(\tilde S_V)|\sim\frac{1}{D^{n/2}|V|^{n/2}}\Big|\sum_{t_1,\ldots,t_n\in V}\langle\sigma_{t_1}\ldots\sigma_{t_n}\rangle^{\mathrm{tr}}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{D^{n/2}|V|^{n/2}}\sum_{d=0}^{\infty}|V|(2d+1)^{\nu n}n!\,u(d),$$

где $u(d)=c_3\exp(-c_4d)$. Отсюда и следует теорема 1.

Теоремы 1 и 2 позволяют доказать асимптотическую нормальность среднего спина и сходимость ренормализационной полугруппы в смысле Каданова (см. ([1], [10])) для различных решетчатых моделей статистической физики. Мы приведем здесь следующий результат.

Следствие 1. *Для двумерной спиновой модели Изинга с внешним полем h и обратной температурой β асимптотическая нормальность среднего спина имеет место для всех значений h и β, кроме критической точки $h=0$, $\beta=\beta_{cr}$. Точнее, это имеет место для крайних точек трансляционно-инвариантных гиббсовских состояний, число которых, как известно (см. ([3])), равно 1 для $h\neq 0$ и $h=0$, $\beta<\beta_{cr}$ и равно 2 для $h=0$, $\beta>\beta_{cr}$.*

Это следствие вытекает из свойства с.э.у.к., доказанного в этом случае (см. ([3], [4], [6], [8])). В критической точке, по-видимому, центральная предельная теорема не имеет места, но строгое доказательство этого автору неизвестно.

Следствие 1 имеет место также для ряда других спиновых моделей, где доказано свойство с.э.у.к. (см. ([6–8])).

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 с небольшим изменением формулировок обобщаются, например, на случай, когда $\xi(t)$ — ограниченные вещественные случайные величины. При этом условие с.э.у.к. может быть сформулировано в виде условий регулярности и перемешивания, предложенных в работе ([12]).

Мы определим теперь различные ренормализационные полугруппы. Пусть задано вероятностное пространство (Ω, Σ, μ) и пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех трансляционно инвариантных вещественных случайных полей $\xi(t)$ таких, что $\xi(t)\in L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ для всех $t\in\mathbf{Z}^\nu$. Пусть $\tilde{\mathfrak{M}}$ — множество всех стохастических ортогональных мер на S^ν, где $S=[-\pi, \pi]$, симметричных относительно нуля. Известно ([13]), что между $\mathfrak{M}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}$ имеется взаимно однозначное соответствие, записываемое в следующем виде:

$$\xi(t)=\int\limits_{S^\nu} e^{i(t,\omega)}\tilde{\mu}(d\omega), \qquad \tilde{\mu}\in\tilde{\mathfrak{M}}.$$

1. Ренормализационная полугруппа в смысле Каданова ([10]) A_α^k, $k=1, 2, \dots$; $-\infty<\alpha<\infty$:

$$(A_\alpha^k\xi)(t)=\frac{1}{k^{\nu\alpha/2}}\sum_{t^i k\leqslant\tilde{t}^i<(t^i+1)k}\xi(\tilde{t}).$$

При этом $A_\alpha^k A_\alpha^{k'}=A_\alpha^{kk'}$. Теорема 2 утверждает по существу, что в условиях теоремы 1 $A_\alpha^k\xi$ слабо сходится только при $\alpha=1$ и при этом его пределом является гауссовское поле с независимыми значениями.

2. Ренормализационная полугруппа в смысле Вильсона R_y^s: $\tilde{\mathfrak{M}}\to\tilde{\mathfrak{M}}$, $s\geqslant 1$, $-\infty<y<\infty$:

$$(R_y^s\tilde{\mu})(A)=s^y\tilde{\mu}\left(\frac{1}{s}A\right), \qquad A\subset S^\nu.$$

При этом $R_y^s\cdot R_y^{s'}=R_y^{ss'}$. Отметим, что в физических работах такая полугруппа вводится обычно в конечном объеме ([14]).

R_y^s не совпадает с A_α^k, но имеет место

Теорема 3. *В условиях теоремы 1 $R_y^s\tilde{\mu}$ имеет слабый предел только для $y=\nu/2$ и при этом этот предел является гауссовским полем с независимыми значениями.*

3. Мы будем теперь рассматривать обобщенные случайные поля над некоторым пространством основных функций на $\mathbf{R}^n$, например, над пространством $D(\mathbf{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых финитных функций.

Наше поле σ_t можно рассматривать как обобщенное случайное поле, если для любой $\varphi(x) \in D(\mathbf{R}^n)$ положить

$$\sigma(\varphi) = \sum_{t \in \mathbf{Z}^n} \varphi(t) \sigma_t.$$

Положим $\varphi_\lambda(x) = \varphi(\lambda x)$, $\lambda > 0$.

Ренормализационная группа. Для произвольного обобщенного случайного поля ξ с нулевым средним определим

$$(R_z^\lambda \xi)(\varphi) = \lambda^z \xi(\varphi_\lambda), \qquad \varphi \in D(\mathbf{R}^n), \qquad \lambda > 0.$$

Для заданного z это определяет (ренормализационную) группу преобразований.

Теорема 4. *Пусть* $\langle \sigma_t \rangle = 0$ *и выполнены условия теоремы* 1.

Тогда последовательность $R_z^\lambda \sigma$ *для* $z = n/2$ *при* $\lambda \to 0$ *слабо сходится к стационарному гауссовому обобщенному случайному полю с независимыми значениями* (*белому шуму*).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Gallavotti, H. J. F. Knops,* Commun. Math. Phys., v. 36, № 3, 171 (1974). [2] *Р. А. Минлос, А. М. Халфина,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 34, № 5, 1173 (1970). [3] *A. Messager, S. Miracle-Solé,* Commun. Math. Phys., v. 40, № 2, 187 (1975). [4] *J. Lebowitz, A. Martin-Löf,* ibid., v. 25, № 4, 276 (1972). [5] *A. Martin-Löf,* ibid., v. 32, № 1, 75 (1973). [6] *J. Lebowitz,* ibid., v. 28, № 4, 301 (1972). [7] *M. Duneau, D. Jagolnitzer, B. Souillard,* ibid., v. 31, № 3, 191 (1973). [8] *M. Duneau, D. Jagolnitzer, B. Souillard,* ibid., v. 35, № 4, 307 (1974). [9] *V. A. Malyshev,* ibid., v. 40, № 1, 75 (1975). [10] *Я. Г. Синай,* Теория вероятностей и ее применения, т. 20, № 3 (1975). [11] *В. Статулявичус,* Литовск. матем. сб., т. 10, № 3, 583 (1970). [12] *Р. Л. Добрушин,* Теория вероятностей и ее применения, т. 13, № 2, 201 (1968). [13] *И. И. Гихман, А. В. Скороход,* Теория случайных процессов, т. 1, М., «Наука», 1971. [14] *Ma Shang-keng,* Rev. Modern Phys., v. 45, № 4, 589 (1973).

Dokl. Akad. Nauk SSSR
Tom 224 (1975), No. 1

Soviet Math. Dokl.
Vol. 16 (1975), No. 5

THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR GIBBSIAN RANDOM FIELDS

UDC 519.214

V. A. MALYŠEV

Suppose $\mathbf{Z}^\nu = \{t = (t^1, \ldots, t^\nu)\}$ is the set of lattice points in ν-dimensional Euclidean space $\mathbf{R}^\nu$, $X^{\mathbf{Z}^\nu}$ the set of functions (configurations) on $\mathbf{Z}^\nu$ with values in $X = \{-1, 1\}$. We consider translation-invariant random fields $\xi(t) \equiv \sigma_t$, $t \in \mathbf{Z}^\nu$, with values in X, i.e. probability measures on $X^{\mathbf{Z}^\nu}$ invariant with respect to shift, with the usual σ-algebra.

For every finite $T = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset \mathbf{Z}^\nu$ we set

$$\sigma_T = \sigma_{t_1} \cdot \ldots \cdot \sigma_{t_n}, \quad S_V = \sum_{t \in V} \sigma_t, \quad \tilde{S}_V = \frac{S_V - \langle S_V \rangle}{\sqrt{D(\Sigma \sigma_t)}}$$

and let $\langle \sigma_T \rangle$ be the mean value of σ_T.

Conditions of asymptotic normality for $\tilde{S}_V$ in the one-dimensional case have been dealt with in many papers (see, for example, [11]). For $\nu \geq 2$ a series of results have been obtained in connection with problems in low and high temperature statistical physics by the methods of perturbation theory [1], [2], [5]. Here we shall prove one general result of this type and apply it to problems in statistical physics. A similar technique also lets us find limiting points in a noncritical region for different variants of renormalized groups.

We say that there is weak exponential decrease of correlations (w.e.d.c.) for the random field σ_t if for all finite $T_1, T_2 \subset \mathbf{Z}^\nu$ there exist constants c_1 and c_2, which for the given field may depend only on $|T_1 \cup T_2|$, such that

$$|\langle \sigma_{T_1 \cup T_2} \rangle - \langle \sigma_{T_1} \rangle \langle \sigma_{T_2} \rangle| < c_1 e^{-c_2 d(T_1, T_2)}, \quad c_2 > 0,$$

where $d(T_1, T_2)$ is the distance between T_1 and T_2, i.e. $\min_{t_i \in T_i} |t_1 - t_2|$.

Theorem 1. *If the w.e.d.c. condition is satisfied and* $D = \Sigma_{t \in \mathbf{Z}^\nu} \langle \sigma_0 \sigma_t \rangle \neq 0$, *then* $\tilde{S}_V$ *is asymptotically normal as* $|V| \to \infty$.

Now suppose that for every integer N

$$S_t^N = \sum_{Nt^i \leqslant \tilde{t}^i < (N+1)t^i} \sigma_{\tilde{t}}, \quad t = (t^1, \ldots, t^\nu), \quad \tilde{t} = (\tilde{t}^1, \ldots, \tilde{t}^\nu).$$

Then the random variables $\xi_N(t) = (S_t^N - \langle S_t^N \rangle)/\sqrt{DS_t^N}$ *form a translation-invariant random field with real values.*

Theorem 2. *The sequence of random fields* $\xi_N(t)$ *converges weakly to the random field* $\xi(t)$; *here the random variables* $\xi(t)$ *are mutually independent Gaussian with zero mean and unit variance.*

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 60G20, 60F05; Secondary 82A30.

We shall prove Theorem 1; Theorem 2 can be proved analogously. It is sufficient to show that the nth semi-invariant $M_n(\tilde{S}_V)$ of the random variable $\tilde{S}_V$ converges as $|V| \to \infty$ to the semi-invariants of a normalized Gaussian random variable, i.e., to zero for $n \geq 3$.

Lemma 1. *For all* $n \geq 1$

$$M_n(S_V) = \sum_{t_1,\ldots,t_n \in V} \langle \sigma_{t_1} \ldots \sigma_{t_n} \rangle^{\mathrm{tr}},$$

where $\langle \sigma_T \rangle^{\mathrm{tr}}$ *are the truncated correlation functions uniquely determined by the relation*

$$\langle \sigma_T \rangle = \sum_{\beta} \langle \sigma_{T_1} \rangle^{\mathrm{tr}} \ldots \langle \sigma_{T_{e(\beta)}} \rangle^{\mathrm{tr}}, \tag{1}$$

with summation over all partitions β *of the collection* $T = (t_1, \ldots, t_n)$ *into* $e(\beta)$ *parts* $T_1, \ldots, T_{e(\beta)}$.

The proof of Lemma 1 follows by induction from (1) and the well-known relation

$$\langle (S_V)^n \rangle = \sum_{\alpha} M_{i_1(\alpha)}(S_V) \ldots M_{i_{l(\alpha)}(\alpha)}(S_V), \tag{2}$$

with summation over all partitions α of the set $\{1, \ldots, n\}$ into $l(\alpha)$ parts; $i_1(\alpha), \ldots, i_{l(\alpha)}(\alpha)$ are the cardinalities of the elements of the partition.

We let $d_T = \max d(T_1, T_2)$, where the maximum is taken over all pairs (T_1, T_2) with $T_1 \cup T_2 = T$.

Lemma 2. *For every finite* T *there exist constants* c_3 *and* c_4, *possibly depending on* $|T|$, *such that*

$$\langle \sigma_T \rangle^{\mathrm{tr}} \leqslant c_3 \exp(-c_4 d_T), \quad c_4 > 0.$$

This fact was noted earlier (see [7], p. 193); it follows in an obvious way from the fact that for every partition $A \cup B = T$, $A \cap B = \varnothing$, $\langle \sigma_T \rangle^{\mathrm{tr}}$ can be represented in the form of a sum of a finite number of terms of the form

$$c(\langle \sigma_{A' \cup B'} \rangle - \langle \sigma_{A'} \rangle \langle \sigma_{B'} \rangle) \prod \langle \sigma_{T_i} \rangle,$$

where $A' \subset A$, $B' \subset B$, $A' \cup B' \bigcup_i T_i = T$ (see [6], p. 315).

We divide the set of all collections $R^n = \{(t_1, \ldots, t_n),\ t_i \in V\}$ into sets $R_d^n = \{(t_1, \ldots, t_n)\colon d_{\{t_1,\ldots,t_n\}} = d\}$.

Lemma 3.

$$|R_d^n| \leqslant |V| (2d+1)^{\nu n} n!$$

The proof of this lemma is exactly analogous to the proof of the analogous assertions presented in an argument by Peierls (see, for example, the proof of Lemma 2 in [9]).

Theorem 1 can now be proved quite simply. We can assume $\langle \sigma_T \rangle = 0$. Then from the w.e.d.c. it follows that, as $|V| \to \infty$,

$$\lim \frac{D(S_V)}{|V|} = \lim \frac{1}{|V|} \sum_{t_1, t_2 \in V} \langle \sigma_{t_1} \sigma_{t_2} \rangle = D \equiv \sum_{t \in Z^\nu} \langle \sigma_0 \sigma_t \rangle,$$

$$0 = (0, 0, \ldots, 0).$$

Thus $D(S_V) \sim D|V|$. For $n \geq 3$, using Lemmas 1, 2, 3, we have

$$|M_n(\tilde{S}_V)| \sim \frac{1}{D^{n/2}|V|^{n/2}} \Big| \sum_{t_1, \ldots, t_n \in V} \langle \sigma_{t_1} \ldots \sigma_{t_n} \rangle^{\mathrm{tr}} \Big|$$

$$\leqslant \frac{1}{D^{n/2}|V|^{n/2}} \sum_{d=0}^{\infty} |V| (2d+1)^{\nu n} n!\, u(d),$$

where $u(d) = c_3 \exp(-c_4 d)$. Theorem 1 now follows.

Theorems 1 and 2 allow us to prove the asymptotic normality of the mean spin and the convergence of the renormalized semigroup in the sense of Kadanov (see [1], [10]) for various lattice models of statistical physics. Here we present the following result.

Corollary 1. *For a two-dimensional Ising spin model with external field h and inverse temperature β, asymptotic normality of the mean spin holds for all values h and β except the critical point $h = 0$, $\beta = \beta_{cr}$. More precisely, this holds for extreme points of translation-invariant Gibbsian states of which there are, as is known (see* [3]), *exactly* 1 *for $h \neq 0$ and $h = 0$, $\beta < \beta_{cr}$, and exactly* 2 *for $h = 0$, $\beta > \beta_{cr}$.*

This corollary follows from the w.e.d.c. property proved in this case (see [3], [4], [6], [8]). At the critical point the central limit theorem apparently does not hold, but a rigorous proof of this is not known to the author.

Corollary 1 also holds for a number of other spin models where the w.e.d.c. property has been proved (see [6]–[8]).

Remark 1. With minor modifications, Theorems 1 and 2 can be generalized to the case where $\xi(t)$ are bounded real random variables. Here the w.e.d.c. condition can be stated in the form of the regularity and intermixing conditions proposed in [12].

We now define various renormalized semigroups. Suppose we are given a probability space (Ω, Σ, μ) and suppose $\mathfrak{M}$ is the set of all translation-invariant real random fields $\xi(t)$ such that $\xi(t) \in L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ for all $t \in Z^\nu$. Let $\tilde{\mathfrak{M}}$ be the set of all stochastic orthogonal measures on S^ν symmetric with respect to zero, where $S = [-\pi, \pi]$. It is known [13] that there is a one-to-one correspondence between $\mathfrak{M}$ and $\tilde{\mathfrak{M}}$ which can be described in the following form:

$$\xi(t) = \int_{S^\nu} e^{i(t,\omega)} \tilde{\mu}(d\omega), \quad \tilde{\mu} \in \tilde{\mathfrak{M}}.$$

1. The renormalized semigroup in the sense of Kadanov [10] A_α^k, $k = 1, 2, \ldots$; $-\infty < \alpha < \infty$:

$$(A_\alpha^k \xi)(t) = \frac{1}{k^{\nu\alpha/2}} \sum_{t^i k \leqslant \tilde{t}^i < (t^i + 1)k} \xi(\tilde{t}).$$

Here $A_\alpha^k A_\alpha^{k'} = A_\alpha^{kk'}$. Theorem 2 asserts essentially that under the conditions of Theorem 1, $A_\alpha^k \xi$ converges weakly only when $\alpha = 1$ and then its limit is a Gaussian field with independent values.

2. The renormalized semigroup in the sense of Wilson $R_y^s\colon \widetilde{\mathfrak{M}} \to \widetilde{\mathfrak{M}}$, $s \geq 1$, $-\infty < y < \infty$:

$$(R_y^s \tilde{\mu})(A) = s^y \tilde{\mu}\left(\frac{1}{s} A\right), \quad A \subset S^\nu.$$

Here $R_y^s \cdot R_y^{s'} = R_y^{ss'}$. We note that in the physics literature such a semigroup is usually introduced in a finite volume [14].

R_y^s does not coincide with A_α^k, but we have

Theorem 3. *Under the conditions of Theorem* 1, $R_y^s \tilde{\mu}$ *has a weak limit only for* $y = \nu/2$ *and then this limit is a Gaussian field with independent values.*

3. We now consider generalized random fields over a space of basis functions on $\mathbf{R}^n$, for example, over the space $D(\mathbf{R}^n)$ of infinitely differentiable functions with compact support. Our field σ_t can be considered a generalized random field if for all $\phi(x) \in D(\mathbf{R}^n)$ we set

$$\sigma(\varphi) = \sum_{t \in \mathbf{Z}^n} \varphi(t)\, \sigma_t.$$

We set $\phi_\lambda(x) = \phi(\lambda x)$, $\lambda > 0$.

Renormalized group. For an arbitrary generalized random field ξ with zero mean we define

$$(R_z^\lambda \xi)(\varphi) = \lambda^z \xi(\varphi_\lambda), \quad \varphi \in D(\mathbf{R}^n), \quad \lambda > 0.$$

For given z this determines a (renormalized) group of transformations.

Theorem 4. *Suppose* $\langle \sigma_t \rangle = 0$ *and the conditions of Theorem* 1 *are satisfied. Then the sequence* $R_z^\lambda \sigma$, *for* $z = n/2$ *as* $\lambda \to 0$, *converges weakly to a stationary Gaussian generalized random field with independent values (white noise).*

Moscow State University
Received 15/APR/75

BIBLIOGRAPHY

1. G. Gallavotti and H. J. F. Knops, *Block-spins interactions in the Ising model*, Comm. Math. Phys. 36 (1974), 171–184. MR 49 #4505.

2. R. A. Minlos and A. M. Halfina, *Two-dimensional limit theorem for the particle number and energy in the grand canonical ensemble*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 34 (1970), 1173–1191 = Math. USSR Izv. 4 (1970), 1183–1200. MR 42 #8847.

3. A. Messager and S. Miracle-Sole, *Equilibrium states of the two-dimensional Ising model in the two-phase region*, Comm. Math. Phys. 40 (1975), 187–196.

4. J. L. Lebowitz and A. Martin-Löf, *On the uniqueness of the equilibrium state for Ising spin systems*, Comm. Math. Phys. 25 (1972), 276–282. MR 47 #1409.

5. A. Martin-Löf, *Mixing properties, differentiability of the free energy and the central limit theorem for a pure phase in the Ising model at low temperature*, Comm. Math. Phys. 32 (1973), 75–92. MR 49 #8566.

6. J. L. Lebowitz, *Bounds on the correlations and analyticity properties of ferromagnetic Ising spin systems*, Comm. Math. Phys. 28 (1972), 313–321. MR 48 #1629.

7. M. Duneau, D, Iagolnitzer and B. Souillard, *Decrease properties of truncated correlation functions and analyticity properties for classical lattices and continuous systems*, Comm. Math. Phys. 31 (1973), 191–208. MR 49 #2000.

8. ———, *Strong cluster properties for classical systems with finite range interaction*, Comm. Math. Phys. 35 (1974), 307–320. MR 49 #2001.

9. V. A. Malyshev [Malyšev], *Phase transitions in classical Heisenberg ferromagnets with arbitrary parameter of anisotropy*, Comm. Math. Phys. 40 (1975), 75–82.

10. Ja. G. Sinaĭ, Teor. Verojatnost. i Primenen. 20 (1975), no. 3 = Theor. Probability Appl. 20 (1975), no. 3 (to appear).

11. V. Statuljavičus, *Limit theorems for random functions*. I, Litovsk. Mat. Sb. 10 (1970), 583–592. (Russian) MR 43 #2765.

12. R. L. Dobrušin, *Description of a random field by means of conditional probabilities and conditions for its regularity*, Teor. Verojatnost. i Primenen. 13 (1968), 201–229 = Theor. Probability Appl. 13 (1968), 197–224. MR 37 #6989.

13. I. I. Gihman and A. V. Skorohod, *The theory of stochastic processes*. Vol. I, "Nauka", Moscow, 1971; English transl., Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 210, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1974. MR 49 #6287.

14. Shang-keng Ma, *Introduction to the renormalization group*, Rev. Modern Phys. 45 (1973), 589–614.

Translated by LISA ROSENBLATT