ТРУДЫ
МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ТОМ
39

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1979

УДК 51 : 006.22

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Московского университета

Рецензенты:
проф. М. В. ФЕДОРЮК, доц. А. Д. ВЕНТЦЕЛЬ

Труды Московского математического общества. Т. 39. М., Изд-во Моск. ун-та, 1979. 240 с. Списки лит. в конце статей.

Труды Московского математического общества издаются с 1951 г. и являются одним из наиболее авторитетных советских математических изданий. В трудах печатаются статьи монографического характера по актуальным разделам современной математики. В 39-м томе печатается цикл работ по интегральным операторам Фурье и их приложениям к распространению волновых фронтов решений псевдодифференциальных уравнений. Среди других работ отметим большие исследования по интегральной геометрии, теории цепей Маркова, геометрии и теории монотонных операторов.

$Т \frac{20203—017}{077(02)—79} 75—78$ 1702000000

УДК 519.2

ЭРГОДИЧНОСТЬ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ И АНАЛИТИЧНОСТЬ СЧЕТНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

В. А. Малышев, М. В. Меньшиков

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В настоящей работе приводятся общие критерии эргодичности, возвратности и невозвратности для счетных цепей Маркова, а также условия непрерывности и аналитичности стационарных вероятностей по параметру для семейства таких цепей. Эти критерии тесно связаны с известным критерием Фостера [23] эргодичности счетной цепи Маркова, они изложены в наиболее естественном для теории вероятностей виде — на языке полумартингалов, или, что эквивалентно, на языке «пробных функций». Иначе эти функции называются функциями Ляпунова. В [3] при помощи этих функций исследуются вопросы эргодичности и устойчивости диффузионных процессов.

Эти общие критерии оказались необходимыми для классификации случайных блужданий в $\mathbf{Z}_+^n=\{(z_1, \ldots, z_n): z_i \geqslant 0$, целые$\}$ определенного вида (максимально возможно однородных и с ограничением на скачки (см. ниже)). Последняя задача — наша основная цель. Кроме того, на ней проверяется действенность общих критериев для цепей Маркова и мартингальных последовательностей, изложенных в работе.

Важность задачи определяется, в частности, следующими тремя обстоятельствами:

1. Хорошо известны трудности при получении условий существования и единственности решения для уравнений в частных производных или уравнений в свертках в областях с ребрами. На вероятностном языке (для стохастических операторов) эта задача сводится к классификации соответствующей цепи Маркова. Соответствующий оператор здесь не является оператором Нетера (фредгольмовым оператором), но вероятностная специфика позволяет продвинуться значительно глубже, чем для общих функциональных уравнений. Подробный обзор результатов по общим функциональным уравнениям в $\mathbf{Z}_+^n$ см. в [7].

2. Многие марковские нестандартные задачи массового обслуживания могут быть представлены в виде случайных блужданий в некоторой кусочно-линейной области на дискретной решетке $\mathbf{Z}_+^n$ с различными условиями на гранях. Под марковскими понимаются задачи массового обслуживания, где все параметры распределены по показательному закону. Некоторые примеры таких задач см. в [4, 14, 15].

3. Очевидна идейная связь с квантовой задачей n тел, где все трудности преодолены в основном для малых n, что имеет место и в нашей задаче (подробнее об этом см. [7]).

Однако полученные в работе общие критерии выходят за рамки задачи о случайном блуждании. Так, получены необходимые и достаточные условия непрерывности стационарных вероятностей, а также достаточные условия аналитичности для семейства цепей Маркова.

Остановимся теперь на содержании работы. В § 1 гл. I рассматривается последовательность вещественных случайных величин $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$, относительно которой предполагается, что $S_0=\mathrm{const}$, и существует такая константа d, что для всех $n=1, 2, \ldots$.

$$|S_n - S_{n-1}| \leqslant d$$

с вероятностью 1. Из последовательности $\{S_n\}$ выделяется подпоследовательность $\{S_{N_i}\}$, где N_i — случайная последовательность индексов, такая, что $|N_i - N_{i-1}| \leqslant r$ с вероятностью 1 для некоторого $r>0$ и любого i. Утверждается, что в зависимости от того, является ли последовательность $\{S_{N_i}\}$ строго супермартингальной, либо субмартингальной, среднее время достижения фиксированной границы последовательностью $\{S_n\}$ либо конечно, либо бесконечно.

Основной теоремой § 2 является теорема 1.4, которая является обобщением известной теоремы Фостера о необходимом и достаточном условии эргодичности счетных цепей Маркова [23]. Формулируется она в терминах существования так называемой «пробной функции».

В гл. II рассматривается однородная неприводимая непериодическая цепь Маркова L с дискретным временем и множеством состояний $\mathbf{Z}_+^n=\{(z_1, \ldots, z_n): z_i \geqslant 0$, целые$\}$, относительно которой предполагаются выполненными условия однородности и ограниченности скачков (см. определения § 1 гл. II). Предположим, что случайные блуждания в $\mathbf{Z}_+^m$, где $m \leqslant n-1$, мы умеем классифицировать в смысле эргодичности и невозвратности и для эргодических блужданий умеем вычислять стационарные вероятности. Тогда в R_+^n дается алгоритм построения векторного поля V. В терминах существования «пробной функции» $f(\alpha)$ $(\alpha \in R_+^n)$, удовлетворяющей определенным условиям относительно векторного поля V, даются достаточные условия эргодичности и невозвратности случайного блуждания L.

В § 2 гл. II указывается явный метод построения «пробной функции» $f(\alpha)$, который позволяет классифицировать случайные блуждания в $\mathbf{Z}_+^n$ для $n \leqslant 3$. При этом по векторному полю V строится детерминированный процесс $\Psi(t)$ и доказывается эквивалентность эргодичности случайного блуждания L и конечности времени достижения процессом $\Psi(t)$ начала координат.

В гл. III рассматривается семейство однородных неприводимых непериодических цепей Маркова $\{L^\nu\}$ с дискретным временем и счетным множеством состояний $A=\{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ $\nu \in D$, где D — открытое подмножество действительной прямой. В предположении непрерывности переходных вероятностей по параметру дается необходимое и достаточное условие непрерывности стационарных вероятностей. Это условие близко к требованию компактности семейства распределений. В § 2 гл. III приводятся достаточные условия непрерывности стационарных вероятностей для семейства марковских цепей $\{L^\nu\}$ в терминах «пробных функций».

В § 1 гл. IV рассматривается семейство цепей Маркова $\{L^\nu\}$ на множестве $A=\{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ и $\nu \in D$. $\mathfrak{X}$ (A, Σ) — банахово пространство вещественных счетно-аддитивных мер на (A, Σ) с нормой, равной полной вариации (Σ — σ-алгебра множеств всех подмножеств A). Легко видеть, что $\mathfrak{X}$ $(A, \Sigma) \equiv l_1(A)$. $B(\mathfrak{X})$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов в $\mathfrak{X}$ (A, Σ). Цепи Маркова L^ν соответствует оператор $P_\nu \in B(\mathfrak{X})$ с нормой, равной 1.

В теореме 4.1 даются достаточные условия существования и аналитичности $r(\nu)=\lim\limits_{n\to\infty} P^n(\nu)x$, где x принадлежит некоторому множеству $M \subset \mathfrak{X}$ (A, Σ), а оператор $P(\nu)$ аналитически зависит от ν.

В § 2 гл. IV даются достаточные условия аналитичности стационарных вероятностей для семейства счетных цепей $\{L^\nu\}$ в терминах «пробных функций». Доказательство этой теоремы опирается на теорему 4.1.

В § 3 гл. III и § 3 гл. IV результаты первых параграфов соответственно глав III и IV используются для исследования непрерывности и аналитичности стационарных вероятностей для семейства случайных блужданий $\{L^\nu\}$ в $\mathbf{Z}_+^n$.

ГЛАВА I. КРИТЕРИИ ЭРГОДИЧНОСТИ ДЛЯ СЧЕТНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

§ 1. Леммы о полумартингальных последовательностях

Рассмотрим последовательность вещественных случайных величин $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$, относительно которой будет предполагаться, что

$S_0=\text{const}$, и существует такая константа d, что для всех $n=1, 2, \ldots$.

$$|S_n - S_{n-1}| \leqslant d \tag{1.1}$$

с вероятностью 1.

Обозначим через t случайное время достижения границы b, т. е. $t=0$, если $S_0 \leqslant b$ и $t=n$, если $S_n \leqslant b$, $S_i > b$ для $i=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Лемма 1.1. *Если для некоторого $\varepsilon>0$ для всех n*

$$M(S_n/S_{n-1}, \ldots, S_0) \leqslant S_{n-1} - \varepsilon \tag{1.2}$$

с вероятностью 1, то для любого $\delta_1<\varepsilon$ существуют такие константы c, $\delta_2>0$, что для любого n

$$\begin{gathered} P(S_n > -\delta_1 n) < c\cdot\exp\{-\delta_2 n\}, \\ M(t) < \infty. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Иначе говоря, среднее время достижения границы b для равномерно строгого полумартингала конечно.

Доказательство. Положим $y_n = S_n - S_{n-1}$. Из обобщенного неравенства Чебышева следует, что

$$P(S_n > 0) = P\left(\sum_{k=1}^{n} y_k - S_0\right) \leqslant \exp\{-hS_0\}\cdot M\left[\exp\left\{h\sum_{k=1}^{n} y_k\right\}\right]. \tag{1.4}$$

Как следует из условия (1.1), неравенство (1.4) справедливо для любого $h>0$. Оценим $M\left[\exp\left\{h\sum_{k=1}^{n} y_k\right\}\right]$. Пусть h заключено в пределах $0<h<1/d$. Тогда с вероятностью 1

$$\exp\{hy_k\} < 1 + hy_k + \frac{3}{2}(hy_k)^2,$$

$$M\{\exp\{hy_k\}/S_0, S_1, \ldots, S_n\} < M\left\{1 + hy_k + \frac{3}{2}(hy_k)^2/S_0, S_1, \ldots, S_n\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 1 - h\varepsilon + \frac{3}{2}h^2d^2.$$

Поэтому, взяв h достаточно малым для некоторого $\delta>0$ и любого k, имеем

$$M\{\exp\{h\cdot y_k\}/S_0, S_1, \ldots, S_{k-1}\} < \exp\{-\delta\} \tag{1.5}$$

с вероятностью 1. Из неравенства (1.5) следует

$$M\left[\exp\left\{h\sum_{k=1}^{n} y_k\right\}\right] = M\left[\prod_{k=1}^{n}\exp\{hy_k\}\right] =$$

$$= M\left[\prod_{k=1}^{n-1}\exp\{hy_k\}\cdot M\{\exp\{hy_k\}/S_0, \ldots, S_{n-1}\}\right] <$$

$$< M\left[\prod_{k=1}^{n-1}\exp\{hy_k\}\cdot\exp\{-\delta\}\right].$$

Проводя аналогичные выкладки, имеем

$$M\left[\exp\left\{h\sum_{k=1}^{n} y_k\right\}\right] < \exp\{-n\delta\}.$$

Положив $c=\exp\{-hS_0\}$, получаем

$$P(S_n>0)<c\cdot\exp\{-n\delta\}. \qquad (1.6)$$

Возьмем произвольное $\delta_1<\varepsilon$. Введем случайную последовательность $\{\tilde{S}_n\}$, положив $\tilde{S}_n=S_n+n\delta_1$. Тогда

$$M(\tilde{S}_n/\tilde{S}_{n-1},\ \ldots,\ \tilde{S}_0)-\tilde{S}_{n-1}=M(S_n/S_{n-1},\ \ldots,\ S_0)+ \\ +n\delta_1-S_{n-1}-(n-1)\delta_1\leqslant-\varepsilon+\delta_1=-\varepsilon_1<0. \qquad (1.7)$$

Из неравенства (1.7) следует, что

$$P(\tilde{S}_n>0)<c_1\cdot\exp\{-n\delta_2\} \qquad (1.8)$$

для некоторых c_1, $\delta_2>0$ и для всех n. Поэтому

$$P(S_n>-\delta_1 n)=P(\tilde{S}_n>0)<c_1\cdot\exp\{-n\delta_2\}. \qquad (1.9)$$

Таким образом, первое утверждение леммы доказано.

$$M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nP(S_0>b,\ S_1>b,\ \ldots,S_{n-1}>b,\ S_n\leqslant b)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}nP(S_{n-1}>b). \qquad (1.10)$$

Из экспоненциальной оценки (1.3) следует сходимость ряда (1.10). Лемма доказана.

По ходу доказательства мы получили экспоненциальные оценки, необходимые для исследования аналитичности семейства цепей Маркова в гл. IV. Похожие оценки для полумартингальных последовательностей получены в работах [25 и 26].

Следующая лемма в некотором смысле усиливает утверждение леммы 1.1.

Пусть $\{N_i\}$ — случайная положительная целочисленная последовательность ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$), такая, что для некоторого $r>0$ и любого i

$$1\leqslant N_i-N_{i-1}<r \qquad (1.11)$$

с вероятностью 1.

Лемма 1.2. *Пусть для некоторого* $\varepsilon>0$ *и для всех* i

$$M(S_{N_i}/S_{N_{i-1}},\ S_{N_{i-2}},\ \ldots,\ S_0)\leqslant S_{N_{i-1}}-\varepsilon \qquad (1.12)$$

с вероятностью 1. Тогда для любого $\delta_1<\varepsilon$ *существуют такие константы* c, $\delta>0$, *что для любого* n

$$P(S_n>-\delta_1 n)<c\cdot\exp\{-\delta n\}, \\ M(t)<\infty. \qquad (1.13)$$

Иначе говоря, среднее время достижения границы b *для случайной последовательности, у которой выделяется строго полумартингальная подпоследовательность, конечно.*

Доказательство. Образуем случайную последовательность $\{\omega_i\}$, положив $\omega_i=S_{N_i}$, $\omega_0=S_0$. Последовательность $\{\omega_i\}$ удовлетворяет условиям леммы 1.1. Поэтому для любого $\delta_1<\varepsilon$ существуют константы c_1, $\delta_2>0$, что для любого i

$$P(\omega_i>-\delta_1 i)<c_1\cdot\exp\{-\delta_2 i\}. \qquad (1.14)$$

Из (1.14) легко следует существование таких констант c_2, $\delta_3>0$, что для любого i

$$P(\omega_i>-\delta_1 i-dr)<c_2\cdot\exp\{-\delta_3 i\}. \qquad (1.15)$$

Рассмотрим событие $A_n = (S_n > -\delta_1 n)$. Из условий (1.1) и (1.11) следует, что

$$A_n \subset \bigcup_{m=\left[\frac{n}{r}\right]}^{n} (\omega_m > -\delta_1 m - dr).$$

Следовательно, учитывая (1.15), получаем

$$P(A_n) = P(S_n > -\delta_1 n) \leqslant \sum_{m=\left[\frac{n}{r}\right]}^{n} P(\omega_m > -\delta_1 m - dr) \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \sum_{m=\left[\frac{n}{r}\right]}^{n} \exp\{-\delta_3 n\}.$$

Из последнего неравенства непосредственно следует существование констант c, $\delta > 0$, что для любого i

$$P(S_n > -\delta_1 n) < c \cdot \exp\{-\delta n\}. \tag{1.16}$$

Так же как и в лемме 1.1, из неравенства (1.16) следует конечность среднего времени достижения границы b последовательностью S_n. Лемма доказана.

Пусть $\{N_i\}$ — введенная выше случайная последовательность индексов.

Лемма 1.3. *Пусть для всех i и некоторого $\varepsilon > 0$*

$$M(S_{N_i}/S_{N_{i-1}}, \ldots, S_0) > S_{N_{i-1}} + \varepsilon \tag{1.17}$$

с вероятностью 1. *Тогда, если $S_0 > b + dr$, то $P(t = \infty) > 0$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для некоторого m существует $\sigma > 0$, такое, что при $S_0 > b + dr$

$$P(S_m > b,\ S_{m+1} > b,\ \ldots,\ S_n > b) > \sigma. \tag{1.18}$$

Очевидно следующее неравенство:

$$P(S_m > b,\ S_{m+1} > b,\ \ldots) > 1 - P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} (S_n \leqslant b)\right) > 1 - \sum_{n=m}^{\infty} P(S_n \leqslant b). \tag{1.19}$$

Аналогично, как и в лемме 1.2, но меняя неравенства на обратные, доказывается существование констант c, $\delta > 0$, таких, что для любого n

$$P(S_n \leqslant b) < c \exp\{-\delta n\}. \tag{1.20}$$

Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-\delta n\}$ следует, что можно указать такое $\sigma > 0$ и такое m, что

$$\sum_{n=m}^{\infty} P(S_n \leqslant b) < 1 - \sigma. \tag{1.21}$$

Из неравенств (1.19) и (1.21) вытекает справедливость неравенства (1.18). Лемма доказана.

Для полноты картины сформулируем лемму, доказательство которой мы опускаем.

Лемма 1.4. *Если для всех n $M(S_n/S_{n-1}, \ldots, S_0) = S_{n-1}$, то $M(t) = \infty$.*

В дальнейшем будут доказаны критерии эргодичности для счетных цепей Маркова и случайных блужданий. Однако результаты этого параграфа позволяют устранить требование марковости случайных блужданий.

§ 2. Критерии для счетных цепей Маркова

Рассмотрим однородную цепь Маркова L с дискретным временем, счетным множеством состояний $B = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ и переходными вероятностями $p_{ij}(i, j \in B)$. Будем предполагать, что цепь L имеет один существенный класс состояний и непериодична. Через p_{ij}^n будем обозначать вероятности перехода из i в j за n шагов $(p_{ij}^1 = p_{ij})$.

Пусть на множестве целых неотрицательных чисел задана целочисленная положительная функция $k(i) = k_i$. Определим на множестве состояний B цепь Маркова $\tilde{L}$, задав вероятности перехода $\tilde{p}_{ij} = p_{ij}^{k_i}$ (т. е. вероятность перехода из состояния i в состояние j в цепи $\tilde{L}$ равна вероятности перехода из состояния i в j за k_i шагов в цепи L).

Теорема 1.1. ***Если в цепи Маркова $\tilde{L}$ есть хотя бы одно возвратное состояние, то цепь L возвратна.***

Доказательство. Пусть состояние j цепи $\tilde{L}$ возвратное. Тогда

$$\sum_{r=1}^{\infty} \tilde{p}_{jj}^r = \infty.$$

Распишем эту сумму

$$\tilde{p}_{jj}^r = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}} \tilde{p}_{ji_1} \tilde{p}_{i_1 i_2} \ldots \tilde{p}_{i_{r-1} j},$$

$$\tilde{p}_{i_l i_{l+1}} = \sum_{t_1, \ldots, t_{k(i_l)-1}} p_{i_l t_1} p_{t_1 t_2} \ldots p_{t_{k(i_l)-1}, i_{l+1}}.$$

Поэтому сумма $\sum_{r=1}^{\infty} \tilde{p}_{jj}^r$ будет состоять из различных произведений типа $p_{ji_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_m j}$, отличающихся друг от друга либо порядком сомножителей, либо самими сомножителями. Сумма $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^n$ может быть представлена аналогичным образом, и она содержит все члены суммы $\sum_{r=1}^{\infty} \tilde{p}_{jj}^r$. Следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^n = \infty$$

и цепь Маркова L возвратна. Теорема доказана.

Известна следующая

Теорема 1.2. (см. [8]). *Для того чтобы неприводимая марковская цепь L была возвратной, достаточно, чтобы существовала последовательность $\{y_i\}$, такая, что*

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} y_j \leqslant y_i, \quad i \bar{\in} A, \quad y_i \to \infty \text{ при } i \to \infty, \tag{1.22}$$

а множество A конечно.

Обобщением теоремы 1.2 является следующая

Теорема 1.3. *Для того чтобы неприводимая марковская цепь была возвратной, достаточно, чтобы существовали положительная целочисленная последовательность* $\{k_i\}$ *и последовательность* $\{y_i\}$, *такие, что*

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^{k_i} y_j \leqslant y_i, \quad i \bar{\in} A, \quad y_i \to \infty \text{ при } i \to \infty. \tag{1.23}$$

Множество A конечно, а цепь $\tilde{L}$, *образованная описанным выше способом, неприводима.*

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{p}_{ij} y_j \leqslant y_i, \quad i \bar{\in} A, \quad y_i \to \infty \text{ при } i \to \infty.$$

В силу теоремы 1.2. это приводит к возвратности цепи $\tilde{L}$ и, далее, в силу теоремы 1.1 — к возвратности цепи L.

Теорема 1.4. *Неприводимая непериодическая цепь Маркова L эргодична тогда и только тогда, когда существуют такая положительная последовательность* $\{y_i\}$ *и целочисленная положительная последовательность* $\{k_i\}$, *что для некоторого* $\varepsilon > 0$ *и конечного множества A выполняется система неравенств*

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^{k_i} y_j \leqslant y_i - \varepsilon k_i, \quad i \bar{\in} A, \tag{1.24}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^{k_i} y_j < \infty, \quad i \in A.$$

Доказательство. Докажем достаточность. Как и в теореме 1.1, будем рассматривать цепь Маркова $\tilde{L}$ с переходными вероятностями $\tilde{p}_{ij} = p_{ij}^{k_i}$. Неравенства (1.24) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij} y_j \leqslant y_i - \varepsilon k_i, \quad i \bar{\in} A,$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij} y_j < \infty, \quad i \in A. \tag{1.25}$$

Положим

$$\max_{i \in A} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij} y_j = \lambda.$$

Определим по индукции

$$y_i^{n+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij} y_j^n; \quad y_i^1 = y_i. \tag{1.26}$$

Из определения следует, что $y_i^n \geqslant 0$ для любых i, n. Имеем

$$y_i^2 \leqslant y_i - k_i\varepsilon, \quad i \bar{\in} A;$$
$$y_i^2 \leqslant \lambda, \quad i \in A;$$

$$y_i^3 = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij} y_j^2 = \sum_{j \in A} \tilde{p}_{ij} y_j^2 + \sum_{j \bar{\in} A} \tilde{p}_{ij} y_j^2 \leqslant \lambda \sum_{j \in A} \tilde{p}_{ij} + \sum_{j \bar{\in} A} \tilde{p}_{ij} (y_j - k_j\varepsilon) =$$

$$= \lambda \sum_{j \in A} \tilde{p}_{ij} + y_i^2 - \sum_{j \in A} \tilde{p}_{ij} y_j - \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij} k_j + \varepsilon \sum_{j \in A} \tilde{p}_{ij} k_j \leqslant$$

$$\leqslant y_i^2 + \tilde{p}_{iA} (\lambda + \varepsilon \lambda_1) - \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij} k_j,$$

где

$$\max_{j \in A} k_j = \lambda_1; \quad \sum_{j \in A} \tilde{p}_{ij} = p_{iA}; \quad \sum_{j \in A} \tilde{p}_{ij}^n = \tilde{p}_{iA}^n.$$

Докажем по индукции следующее неравенство:

$$y_i^n \leqslant y_i^{n-1} + \tilde{p}_{iA}^{n-2} (\lambda + \varepsilon \lambda_1) - \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij}^{n-2} k_j. \tag{1.27}$$

Предположим, что это неравенство справедливо при $n=m$, докажем, что оно верно для $n=m+1$.

$$y_i^m \leqslant y_i^{m-1} + \tilde{p}_{iA}^{m-2} (\lambda + \varepsilon \lambda_1) - \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij}^{m-2} k_j,$$

$$y_i^{m+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij} y_i^m \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij} \left[y_j^{m-1} + \tilde{p}_{jA}^{m-2} (\lambda + \varepsilon \lambda_1) - \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{p}_{jl}^{m-2} k_l \right] =$$

$$= y_i^m + \tilde{p}_{iA}^{m-1} (\lambda + \varepsilon \lambda_1) - \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij}^{m-1} k_j,$$

что и требовалось доказать. Из рекуррентного соотношения (1.27) имеем

$$y_i^{n+2} \leqslant y_i^2 + (\lambda + \varepsilon \lambda_1) \sum_{r=1}^{n} \tilde{p}_{iA}^r - \varepsilon \sum_{r=1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij}^r k_j. \tag{1.28}$$

Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ и $\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_n, \ldots$ — последовательности случайных величин, соответствующие цепям L и $\tilde{L}$ соответственно. Пусть $\xi_0 = \tilde{\xi}_0 = i$. Тогда

$$M(k(\tilde{\xi}_r)) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij}^r k_j.$$

Из неравенства (1.28) имеем

$$\sum_{r=1}^{n} \tilde{p}_{iA}^r \geqslant - \frac{y_i^2}{\lambda + \varepsilon \lambda_1} + \frac{\varepsilon}{\lambda + \varepsilon \lambda_1} \sum_{r=1}^{n} M(k(\tilde{\xi}_r)).$$

Возьмем произвольное $c>0$

$$\tilde{p}_{iA}^r = P(\tilde{\xi}_r \in A) = P\left\{(\tilde{\xi}_r \in A) \cap \left(\sum_{l=1}^{r} k(\tilde{\xi}_l) < cr \right)\right\} + P\left\{(\tilde{\xi}_r \in A) \cap \left(\sum_{l=1}^{r} k(\tilde{\xi}_l) \geqslant cr \right)\right\}.$$

Обозначим

$$B_n^c = \sum_{r=1}^{n} P\left\{(\tilde{\xi}_r \in A) \cap \left(\sum_{l=1}^{r} k(\tilde{\xi}_l) < cr \right)\right\};$$

$$B_n^c \geqslant - \frac{y_i^2}{\lambda + \varepsilon \lambda_1} + \frac{\varepsilon}{\lambda + \varepsilon \lambda_1} \sum_{r=1}^{n} M(k(\tilde{\xi}_r)) - \sum_{r=1}^{n} P\left\{(\tilde{\xi}_r \in A) \cap \left(\sum_{l=1}^{r} k(\tilde{\xi}_l) > cr \right)\right\}.$$

Окончательно имеем

$$B_n^c \geqslant - \frac{y_i^2}{\lambda + \varepsilon \lambda_1} + \frac{\varepsilon}{\lambda + \varepsilon \lambda_1} \sum_{r=1}^{n} M(k(\tilde{\xi}_r)) - \sum_{r=1}^{n} P\left(\sum_{l=1}^{r} k(\tilde{\xi}_l) > cr \right). \tag{1.29}$$

Возможны два случая:

1. $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum\limits_{r=1}^{\infty} M(k(\tilde{\xi}_r))}{n} > \frac{\lambda+\varepsilon\lambda_1}{\varepsilon} + \varepsilon_1$$

для некоторого $\varepsilon_1 > 0$;

2. $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum\limits_{r=1}^{n} M(k(\tilde{\xi}_r))}{n} \leqslant \frac{\lambda+\varepsilon\lambda_1}{\varepsilon}.$$

Рассмотрим 1-й случай

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{B_n^c}{n} \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{-\frac{y_i^2}{\lambda+\varepsilon\lambda_1} + \frac{\varepsilon}{\lambda+\varepsilon\lambda_1} \sum\limits_{r=1}^{n} M(k(\tilde{\xi}_r)) - n}{n} \geqslant \frac{\varepsilon_1\varepsilon}{\lambda+\varepsilon\lambda_1} > 0.$$

Рассмотрим 2-й случай. Тогда существует такое r_0, что при любом $r > r_0$

$$\frac{\sum\limits_{l=1}^{r} M(k(\tilde{\xi}_l))}{r} < \frac{2(\lambda+\varepsilon\lambda_1)}{\varepsilon} = \varepsilon_2. \tag{1.30}$$

По неравенству Чебышева имеем

$$P\left(\sum_{l=1}^{r} k(\tilde{\xi}_l) > cr\right) \leqslant \frac{M\left(\sum\limits_{l=1}^{r} k(\tilde{\xi}_l)\right)}{cr} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{r} M(k(\tilde{\xi}_l))}{cr}. \tag{1.31}$$

Используя неравенства (1.30) и (1.31), получаем

$$\frac{B_n^c}{n} \geqslant \frac{y_i^2}{\lambda+\varepsilon\lambda_1}\frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{(\lambda+\varepsilon\lambda_1)\,n} \sum_{r=1}^{n} M(k(\tilde{\xi}_r)) - \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \frac{\sum\limits_{l=1}^{r} M(k(\tilde{\xi}_l))}{cr} \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{y_i^2}{\lambda+\varepsilon\lambda_1}\frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{\lambda+\varepsilon\lambda_1} - \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{r_0} \frac{\sum\limits_{l=1}^{r} M(k(\tilde{\xi}_l))}{cr} -$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{r=r_0+1}^{n} \frac{\sum\limits_{l=1}^{r} M(k(\tilde{\xi}_l))}{cr} \geqslant \frac{y_i^2}{\lambda+\varepsilon\lambda_1}\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{r_0} \frac{\sum\limits_{l=1}^{r} M(k(\tilde{\xi}_l))}{cr_0} +$$

$$+\frac{\varepsilon}{\lambda+\varepsilon\lambda_1} - \frac{1}{n}\frac{(n-r_0)\,\varepsilon_2}{c}.$$

Таким образом,

$$\lim_{\overline{n\to\infty}} \frac{B_n^c}{n} \geqslant \frac{\varepsilon}{\lambda+\varepsilon\lambda_1} - \frac{\varepsilon_2}{c}.$$

Так как в качестве c мы могли взять любое положительное число, то, взяв его достаточно большим, имеем

$$\lim_{\overline{n\to\infty}} \frac{B_n^c}{n} > \delta_1 > 0$$

для некоторого $\delta_1>0$.
Объединяя оба исследованных случая, получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{B_n^c}{n}>\delta>0$$

для некоторого $\delta>0$. Величину $B_n^c=\sum_{r=1}^{n}P\left\{(\tilde{\xi}_r\in A)\cap\left(\sum_{l=1}^{r}k(\tilde{\xi}_l)<cr\right)\right\}$ можно представить в виде суммы произведений типа $p_{ii_1}p_{i_1i_2}\ldots p_{i_tj}$ $(j\in A)$, как это уже делалось при разложении $\sum_{r=1}^{\infty}\tilde{p}_{ij}^r$ при доказательстве теоремы 1.1, причем количество сомножителей в любом члене этой суммы не будет превосходить число $[cn]+1$ и отличаться эти члены друг от друга будут либо порядком сомножителей, либо самими сомножителями. $\sum_{r=1}^{[cn]+1}p_{iA}^r$ может быть представлена аналогичным образом и будет содержать все члены из разложения B_n^c. Поэтому для любого n

$$\sum_{r=1}^{[cn]+1}p_{iA}^r>B_n^c. \tag{1.32}$$

Из (1.32) следует

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sum\limits_{r=1}^{[nc]-1}p_{iA}^r}{[nc]+1}>\frac{1}{c+1}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{B_n^c}{n}>\frac{\delta}{c+1}>0. \tag{1.33}$$

Для неприводимой марковской цепи из (1.33) следует ее эргодичность. Тем самым достаточность условий теоремы доказана.

Предположим теперь, что цепь L эргодична. Положим $k_i\equiv1$, $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Тогда из основной теоремы работы [23] следует существование такой последовательности $\{y_i\}$, что все условия теоремы будут выполняться. Теорема доказана.

Теорема 1.5. *Для того чтобы неприводимая непериодическая цепь Маркова L была эргодична, достаточно, чтобы существовали такая целочисленная последовательность* $\{k_i\}$:

$$\sup_{i=0,1,2,\ldots}k_i=k<\infty;\qquad\inf_{i=0,1,2,\ldots}k_i\geqslant1$$

и такая положительная последовательность $\{y_i\}$, *что для некоторого* $\varepsilon>0$ *и конечного множества A выполнялась система неравенств:*

$$\begin{gathered}\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}^{k_i}y_j\leqslant y_i-\varepsilon,\quad i\,\overline{\in}\,A;\\ \sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}^{k_i}y_j<\infty,\quad i\in A.\end{gathered}\tag{1.34}$$

Доказательство этой теоремы очевидным образом следует из теоремы 1.4.

Предположим, что на множестве целых неотрицательных чисел задана вещественная функция $y=\{y_i\}$ $(i\in B)$, такая, что $y_i>0$ для любого i, и для некоторого $d>0$ из выполнения условия $|y_i-y_j|>d$ следует, что $p_{ij}=0$, где p_{ij} — вероятности перехода в цепи L. Пусть на этом же множестве B задана целочисленная ограниченная положительная функция $\{k_i\}$ $(i \in B)$, причем

$$\sup_{i \in B} k_i = k < \infty.$$

При этих условиях справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6. *Пусть положительная последовательность* $\{y_i\}$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^{k_i} y_j \geqslant y_i + \varepsilon \qquad (1.35)$$

для некоторых ε, $c>0$ *и для всех* i, *принадлежащих непустому множеству* $A_c = \{i : y_i > c\}$. *Тогда цепь Маркова* L *невозвратна.*

Доказательство. Из неравенств (1.35) следует, что для любого $N>0$ существует такое n, что $y_n > N$. Рассмотрим последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$, образующих цепь L. Пусть $\xi_0 = \alpha_0 > c + dk$. Из последовательности $\{\xi_i\}$ образуем последовательность $\{S_i\}$, положив $S_n = y(\xi_n) = y_{\xi_n}$. Обозначим через t случайное время достижения последовательностью S_n границы c. Из последовательности $\{\xi_i\}$ также образуем случайную целочисленную последовательность $\{N_i\}$, положив

$$N_0 = k(\xi_0) = k_{\alpha_0}; \quad N_i = N_{i-1} + k(\xi_i).$$

Из системы неравенств (1.35) следует, что

$$M\left(S_{N_i} / S_{N_{i-1}} > c\right) \geqslant S_{N_{i-1}} + \varepsilon \qquad (1.36)$$

с вероятностью 1. Из неравенства (1.36), применяя лемму 1.3, получаем, что $t = \infty$ с положительной вероятностью. Это означает, что время достижения процессом $\{\xi_n\}$ множества $B \setminus A_c$ бесконечно с положительной вероятностью. Следовательно, цепь Маркова L невозвратна. Теорема доказана.

Теорема 1.7. *Пусть положительная последовательность* $\{y_i\}$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} y_j \geqslant y_i \qquad (1.37)$$

для некоторого $c>0$ *и для всех* i, *принадлежащих непустому множеству* $A_c = \{i : y_i > c\}$. *Тогда цепь Маркова* L *не эргодична.*

Доказательство теоремы легко проводится, если использовать лемму 1.4 предыдущего параграфа.

ГЛАВА II. ЭРГОДИЧНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

§ 1. Достаточные условия эргодичности и невозвратности для случайных блужданий в $\mathbf{Z}_+^n$

Рассмотрим однородную неприводимую непериодическую цепь Маркова L с дискретным временем, множеством состояний которой является множество $\mathbf{Z}_+^n = \{(z_1, \ldots, z_n) : z_i \geqslant 0, \text{ целые}\}$. Пусть $P_{\alpha\beta}^k(\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+^n)$ — вероятности перехода в L за k шагов, а $\mathbf{M}^k(\alpha) = (M_1^k(\alpha), \ldots, M_n^k(\alpha))$ — вектор среднего скачка из точки α за k шагов; $p_{\alpha\beta}^1 = p_{\alpha\beta}$; $\mathbf{M}^1(\alpha) = \mathbf{M}(\alpha)$.

Через $\Lambda = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ будем обозначать набор натуральных чисел от 1 до n $(1 \leqslant k \leqslant n,\ i_1 < \ldots < i_k)$. Пусть $R_+^n = \{(r_1, r_2, \ldots, r_n)$: $r_i \geqslant 0$, вещественные$\}$. Через B^Λ будем обозначать произвольную грань в R_+^n, т. е. для некоторого

$$\Lambda \subseteq \{1, 2, \ldots, n\},\ B^\Lambda = \{(r_1, \ldots, r_n) : r_i > 0,\ i \in \Lambda;\ r_i = 0,\ i \notin \Lambda\}.$$

Под $|\Lambda|$ будем понимать размерность набора Λ. Положим

$$B_{ct}^\Lambda = \{(r_1, \ldots, r_n) : r_i > c,\ i \in \Lambda;\ \ r_i \leqslant t,\ i \notin \Lambda\}.$$

Мы будем рассматривать далее только ограниченные максимально однородные случайные блуждания в $\mathbf{Z}_+^n$, т. е. удовлетворяющие следующим условиям:

Условие однородности. *Существует такое $c>0$, что для любого Λ и любого вектора $a=(a_1, \ldots, a_n)$, такого, что*

$$a_i \geqslant 0;\quad a_j = 0 \text{ для } j \notin \Lambda$$

и для всех $\alpha \in B_{cc}^\Lambda \cap \mathbf{Z}_+^n$ имеет место

$$p_{\alpha\beta} = p_{\alpha+a,\beta+a} \quad (\beta \in \mathbf{Z}_+^n).$$

Условие ограниченности скачков. *Для любого α число β такое, что $p_{\alpha\beta} \neq 0$, конечно.*

В силу условия однородности это эквивалентно следующему: *существует такое $d>0$, что $p_{\alpha\beta}=0$ при $\|\alpha-\beta\|>d$.*

Для любой грани B^Λ $(\Lambda \neq \{1, \ldots, n\})$ выберем произвольную точку $a \in \mathbf{Z}_+^n \cap B^\Lambda \cap B_{cc}^\Lambda$. Проведем через нее плоскость $C^\Lambda \subset \mathbf{Z}_+^n$ размерности $n-|\Lambda|$ перпендикулярно B^Λ. Определим цепи Маркова L^Λ с множеством состояний C^Λ (которые будем называть индуцированными цепью L) с вероятностями перехода за один шаг. ${}_\Lambda p_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} + \sum_{\beta' \neq \beta} p_{\alpha\beta'}$, $\alpha, \beta \in C^\Lambda$, а суммирование ведется по всем таким $\beta' \in \mathbf{Z}_+^n$, что прямая, соединяющая β' и β, перпендикулярна C^Λ. Из условия однородности случайного блуждания следует, что определение цепи L^Λ не зависит от выбора точки $a \in \mathbf{Z}_+^n \cap B^\Lambda \cap B_{cc}^\Lambda$.

Мы будем рассматривать далее только цепи, удовлетворяющие следующему условию A:

Условие А1. *Для любого Λ L^Λ неприводима и непериодична.*

В случае, если цепь L^Λ эргодична, пусть $\Pi^\Lambda(\gamma)$ $(\gamma \in C^\Lambda)$ — ее стационарные вероятности. Введем вектор $v^\Lambda = (v_1^\Lambda, \ldots, v_n^\Lambda)$, положив

$$v_i^\Lambda = 0 \text{ для } i \notin \Lambda;$$

$$v_i^\Lambda = \sum_{\gamma \in C^n} \pi^\Lambda(\gamma) M_i(\gamma) \text{ для } i \in \Lambda.$$

Для $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$ положим

$$v^\Lambda = \mathbf{M}(\alpha), \text{ где } \alpha \in B_{cc}^{\{1,2,\ldots,n\}} \cap \mathbf{Z}_+^n.$$

Таким образом, мы имеем конечный набор векторов v^Λ. (Из условия ограниченности скачков следует, что $\max\|v^\Lambda\|<\infty$.) Для неэргодических цепей L^Λ вектора v^Λ не определены.

Условие А2. $\|v^\Lambda\| \neq 0$ *для всех Λ, для которых введены векторы v^Λ.*

Сформулируем теперь и докажем утверждение, относящееся к счетным цепям Маркова. Рассмотрим произвольную однородную неприводимую непериодическую цепь Маркова Q с дискретным временем и счетным множеством состояний $B=\{b\}$. Пусть, кроме того, для каждой точки $b \in B$ задано распределение вероятностей F_b на множестве вещественных векторов размерности k, причем случайные величины, соответствующие F_b, равномерно ограничены в совокупности по всем $b \in B$. $\mathbf{M}_b$ — среднее значение F_b. Пусть задана последовательность случайных векторов $(\varphi_n, \xi_n) \equiv \varphi_n(\xi_n)$, таких, что $\xi_1, \xi_2, \dots$ есть исходная цепь Q и для любых заданных $\xi_i = b_i$, $i=1, 2, \dots$, случайные величины φ_i, $i=1, 2, \dots$ независимы и имеют функции распределения F_{b_i}.

Лемма 2.1. *Пусть цепь Q эргодична, и в момент времени $t=1$ $\xi_1=a$. Тогда для любого $\varepsilon>0$*

$$P\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\xi_i) - n\mathbf{v}\right\| > n\varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{v} = \sum_{b \in B} \mathbf{M}_b \pi_b$ (π_b — стационарные вероятности цепи Q).

Доказательство. Докажем, что

$$M(\varphi_n(\xi_n)) \to \mathbf{v} \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2.2}$$

Действительно,

$$\begin{gathered} M(\varphi_n(\xi_n)) = \sum_{b \in B} M\{\varphi_n(\xi_n)/\xi_n = b\} \cdot P(\xi_n = b). \\ M\{\varphi_n(\xi_n)/\xi_n = b\} = \mathbf{M}_b. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Из эргодичности цепи Маркова Q следует, что $P(\xi_n = b) \to \Pi_b$ при $n \to \infty$. Учитывая, что $\sup_{b \in B} \|\mathbf{M}_b\| < \infty$, заключаем, что $M(\varphi_n(\xi_n)) \to \mathbf{v}$ при $n \to \infty$. Поэтому вместо (2.1) достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\xi_i) - \sum_{i=1}^{n} M(\varphi_i(\xi_i))\right\| > n\varepsilon\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2.4}$$

Применим неравенство Чебышева для суммы l-х компонент векторов $\varphi_n(\xi_m)$

$$P\left(\left|\sum_{m=1}^{n} \varphi_m^l(\xi_m) - \sum_{i=1}^{n} M\left((\varphi_m^l(\xi_i)\right)\right| > n\varepsilon\right) \leqslant \frac{D\left[\sum_{m=1}^{n} (\varphi_m^l(\xi_m) - M(\varphi_m^l(\xi_m))\right]}{n^2\varepsilon^2}. \tag{2.5}$$

Из равномерной ограниченности случайных величин $\varphi_m^l(\xi_m)$ следует, что для доказательства (2.4) достаточно показать, что

$$M\left[(\varphi_m^l(\xi_m) - M(\varphi_m^l(\xi_m)))(\varphi_n^l(\xi_n) - M(\varphi_n^l(\xi_n)))\right] \to 0 \tag{2.6}$$

при $|i-j| \to \infty$ при любом $1 \leqslant l \leqslant k$. Это будет справедливо в том случае, если

$$M(\varphi_m^l(\xi_m)\varphi_n^l(\xi_n)) \to M(\varphi_m^l(\xi_m))\, M(\varphi_n^l(\xi_n))$$

при $|n-m| \to \infty$. Последнее утверждение следует из независимости случайных величин $\varphi_m(\xi_m)$ и $\varphi_n(\xi_n)$ при фиксированных ξ_m и ξ_n и эргодичности цепи Q. Лемма доказана.

С помощью леммы 2.1 доказывается следующее утверждение для случайных блужданий. Пусть ξ^m — положение точки на m-м шаге при случайном блуждании L и $\xi^0=\alpha$.

Лемма 2.2. *Пусть либо L^Λ эргодична при $|\Lambda|<n$, либо $\Lambda=\{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда для любых R_2, ε, $\sigma>0$ можно указать такое натуральное m и $R_1>0$, что для любой точки $\alpha \in B^\Lambda_{R_1R_2}\cap \mathbf{Z}^n_+$*

$$P\{\|\xi^m-(\alpha+m\nu^\Lambda)\|>m\varepsilon\}<\sigma; \quad \xi_0=\alpha. \tag{2.7}$$

Доказательство. Чтобы применить лемму 2.1, рассмотрим цепь Q^Λ, состояниями которой будут всевозможные переходы за один шаг в цепи L^Λ, т. е. пары (a_i, a_j) $(a_i, a_j\in C^\Lambda)$. Вероятности перехода в цепи Q^Λ определим

$$P_{(a_1a_2)(a_3a_4)}=\begin{cases} 0, & a_2\neq a_3,\\ P_{a_2a_4}, & a_2=a_3.\end{cases}$$

Пусть Π_a $(a\in C^\Lambda)$ — стационарные вероятности цепи L^Λ, а $\Pi_{(a,b)}$ $((a, b)\in C^\Lambda\times C^\Lambda)$ — стационарные вероятности цепи Q^Λ. Тогда очевидно, что

$$\pi_{(a,b)}=\pi_{a\Lambda}p_{ab}. \tag{2.8}$$

Пусть $\xi^0=\alpha$, $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность случайных величин, соответствующих случайному блужданию L, $\Lambda=(i_1, \ldots, i_k)$. Введем последовательность случайных величин φ_m, положив

$$\varphi_m=(\xi^{m+1}_{i_1}-\xi^m_{i_1}, \xi^{m+1}_{i_2}-\xi^m_{i_2}, \ldots, \xi^{m+1}_{i_k}-\xi^m_{i_k}).$$

Эта случайная последовательность удовлетворяет условиям леммы 2.1. Применяя ее, получаем утверждение леммы 2.

Пусть на множестве $\mathbf{Z}^n_+$ задана вещественная функция $f(\alpha)$ $(\alpha\in \mathbf{Z}^n_+)$, такая, что из условия $|f_\alpha-f_\beta|>d$ следует, что $p_{\alpha\beta}=0$ для некоторого $d>0$. Введем $B^\Lambda_R=\{(x_1, \ldots, x_n): x_i>R, i\in\Lambda\}$.

Лемма 2.3. *Пусть цепь L^Λ не эргодична, и пусть существует такое множество $B^\Lambda_{R_1R_2}$ и натуральнозначная функция $m(\alpha)$, определенная на множестве $(B^\Lambda_{R_1}\setminus B^\Lambda_{R_1R_2})\cap \mathbf{Z}^n_+$, что для всех $\alpha\in(B^\Lambda_{R_1}\setminus B^\Lambda_{R_1R_2})\cap\mathbf{Z}^n_+$*

$$\sum_{\beta\in Z^n_+} p^{m(\alpha)}_{\alpha\beta}f_\beta-f_\alpha<-\varepsilon \tag{2.9}$$

для некоторого $\varepsilon>0$, причем

$$\sup_{\alpha\in(B^\Lambda_{R_1}\setminus B^\Lambda_{R_1R_2})\cap Z^n_+} m(\alpha)=m<\infty. \tag{2.10}$$

Тогда существует такое множество B^Λ_R и натуральнозначная функция $n(\alpha)$ $(\alpha\in B^\Lambda_R)$, что для всех $\alpha\in B^\Lambda_R\cap\mathbf{Z}^n_+$

$$\sum_{\beta\in Z^n_+} p^{n(\alpha)}_{\alpha\beta}f_\beta-f_\alpha<-\varepsilon_1 \tag{2.11}$$

для некоторого $\varepsilon_1>0$, причем

$$\sup_{\alpha\in B^\Lambda_R\cap Z^n_+} n(\alpha)=n<\infty; \quad n(\alpha)\equiv m(\alpha), \quad \alpha\in B^\Lambda_R\cap B^\Lambda_{R_1R_2}.$$

Доказательство. Пусть $\xi_0=\alpha$, $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность случайных величин, соответствующих цепи L. Из нее образуем случайную последовательность индексов N_i, положив $N_0=$

$=m(\alpha_0)$; $N_i = N_{i-1} + m(\xi_{i-1})$ (для $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n \setminus B_{R_1R_2}^\Lambda$ доопределим $m(\alpha)$, положив $m(\alpha)=1$). Последовательность ξ_{N_i} образует марковскую цепь $\tilde{L}$. (Более подробно о таких цепях сказано в § 2 гл. I.) $\tilde{L}^\Lambda$ — цепь Маркова, индуцированная цепью $\tilde{L}$ на множество состояний C^Λ. Очевидно, что если $\{\xi_i^\Lambda\}$ — последовательность случайных величин, соответствующих цепи L^Λ, то последовательность $\{\xi_{N_i}^\Lambda\}$ соответствует цепи $\tilde{L}^\Lambda$. Из неэргодичности цепи L^Λ следует неэргодичность цепи $\tilde{L}^\Lambda$. Поэтому для любого $\sigma>0$ можно указать такое $R(R \gg R_1)$ и такое $t>0$, что для всех r, таких, что $(R-R_1)/m>r>t$,

$$P(\tilde{\xi}_r \in B_{R_1R_2}^\Lambda) > 1-\sigma, \tag{2.12}$$

если только $\xi_0 = \alpha \in B_{RR_2}$. Из неравенства (2.12), учитывая (2.9), имеем

$$M\{f(\tilde{\xi}_r)-f(\tilde{\xi}_{r-1})\} = M\{f(\tilde{\xi}_r)-f(\tilde{\xi}_{r-1})/\xi_{r-1}\bar{\in} B_{R_1R_2}^\Lambda\}\cdot P(\xi_{r-1}\bar{\in} B_{R_1R_2}^\Lambda) +$$
$$+ M\{f(\tilde{\xi}_r)-f(\tilde{\xi}_{r-1})/\xi_{r-1}\in B_{R_1R_2}^\Lambda\}\cdot P(\xi_{r-1}\in B_{R_1R_2}^\Lambda) \leqslant dm\sigma - \varepsilon(1-\sigma).$$

Следовательно, если σ взять достаточно малым (при этом R надо взять достаточно большим), получим

$$M\{f(\tilde{\xi}_r)-f(\tilde{\xi}_{r-1})\} < -\sigma_1$$

для некоторого $\sigma_1>0$, $(R-R_1)/m>r>t$; $\xi_0=\alpha\in B_{RR_2}^\Lambda$. Далее,

$$M\{f(\tilde{\xi}_r)\}-f_\alpha = \sum_{i=1}^{r} M\{f(\tilde{\xi}_i)-f(\tilde{\xi}_{i-1})\} < tdm - \sigma_1(r-t).$$

Поэтому для достаточно больших r

$$M\{f(\tilde{\xi}_r)\}-f(\alpha) < -md-\varepsilon_1 \tag{2.13}$$

для некоторого $\varepsilon_1>0$. Очевидно следующее неравенство:

$$M\{f(\xi_k)\} < \sup_{k/m<r\leqslant k} M\{f(\tilde{\xi}_r)\}+md \tag{2.14}$$

Поэтому для достаточно большого k

$$M\{f(\xi_k)\}-f_\alpha \leqslant -\varepsilon_1. \tag{2.15}$$

Неравенство (2.15) экивалентно неравенству (2.11), если положить $n(\alpha)=k$ для $\alpha\in B_{RR_2}^\Lambda \cap \mathbf{Z}_+^n$. Для $\alpha \in (B_R^\Lambda \setminus B_{RR_2}^\Lambda)\cap \mathbf{Z}_+^n$ положим $n(\alpha)\equiv \equiv m(\alpha)$. Лемма доказана.

Ранее был введен конечный набор векторов $\{v^\Lambda\}$. Каждой точке α, принадлежащей грани B^Λ, такой, что L^Λ эргодична (такую грань B^Λ будем называть эргодической), сопоставим вектор $v(\alpha)= =v^\Lambda$. Для точек $\alpha\in B^{\{1,2,\ldots,n\}}$ положим $v(\alpha)=v^{\{1,2,\ldots,n\}}$. Таким образом мы получим векторное поле V, которое может быть не определено на некоторых гранях.

Условие В. *Для некоторых δ, b, $p>0$ существует функция $f(\alpha)$ $(\alpha\in R_+^n)$, имеющая следующие свойства:*

1. $f(\alpha)\geqslant 0$, $\alpha\in R_+^n$.

2. $f(\alpha)-f(\beta)\leqslant b\|\alpha-\beta\|$, $\alpha,\beta\in R_+^n$.

3. *Для любого Λ, такого, что L^Λ эргодична и для $\Lambda=\{1, \ldots, n\}$ и всех $\alpha\in B^\Lambda \cap B_{pp}^\Lambda$*

$$f(\alpha+\vec{v}(\alpha))-f(\alpha) < -\delta.$$

Условие B′. *Для некоторых* δ, b, t, $p>0$ *существуют функция* $f(\alpha)$ $(\alpha\in R^n_+)$ *и непустое множество* $T\subset R^n_+$, *что:*

1. $f(\alpha)\geqslant 0,\quad \alpha\in R^n_+$.

2. $f(\alpha)-f(\beta)\leqslant b\|\alpha-\beta\|,\quad \alpha,\beta\in R^n_+$.

3. $f(\alpha)\geqslant t,\quad \alpha\in T$;

$f(\alpha)<t,\quad \alpha\in R^n_+\setminus T$.

4. *Для любого* Λ, *такого, что* L^Λ *эргодична, и для* $\Lambda=\{1,\ldots,n\}$ *и всех* $\alpha\in B^\Lambda\cap B^\Lambda_{pp}\cap T$

$$f(\alpha+\mathbf{v}(\alpha))-f(\alpha)>\delta.$$

Теорема 2.1. *Если для векторного поля* V *выполнено условие* B, *то случайное блуждание* L *эргодично, если же выполнено условие* B′, *то* L *невозвратно.*

Доказательство. Пусть существует функция $f(\alpha)$ $(\alpha\in R^n_+)$, удовлетворяющая условию B. Как следует из теоремы 1.5, для эргодичности случайного блуждания L достаточно показать существование натуральнозначной функции $m(\alpha)$ $(\alpha\in \mathbf{Z}^n_+)$, что

$$\sup_{\alpha\in\mathbf{Z}^n_+} m(\alpha)=m<\infty$$

и для всех $\alpha\in\mathbf{Z}^n_+$, кроме некоторого конечного множества, выполняется неравенство

$$\sum_{\beta\in\mathbf{Z}^n_+} p^{m(\alpha)}_{\alpha\beta} f_\beta-f_\alpha<-\varepsilon_1 \tag{2.16}$$

для некоторого $\varepsilon_1>0$. Пусть $\Lambda=\{1,2,\ldots,n\}$. Тогда из леммы 2.2 следует, что для любых ε, $\sigma>0$ существует такое m^Λ и R^Λ, что для всех $\alpha\in B^\Lambda_{R^\Lambda}$ выполняется неравенство (2.7). Поэтому, если мы возьмем ε и σ достаточно малым и, учитывая условия ограниченности скачков случайного блуждания и свойства функций f (условие B), получим, что для любого $\alpha\in B^\Lambda_{R^\Lambda}\cap\mathbf{Z}^n_+$ выполняется неравенство (2.16) для некоторого $\varepsilon_1>0$, если положить

$$m(\alpha)\equiv m^\Lambda \text{ для } \alpha\in B^\Lambda_{R^\Lambda}\cap\mathbf{Z}^n_+.$$

Далее построение натуральнозначной функции $m(\alpha)$ $(\alpha\in\mathbf{Z}^n_+)$ проведем по индукции. Предположим, что для всех Λ, таких, что $|\Lambda|=k\leqslant n$, существуют множества $B^\Lambda_{R^\Lambda}$ и натуральнозначная функция $m(\alpha)$, такая, что

$$\sup_{\alpha\in\left(\bigcup_{|\Lambda|=k} B^\Lambda_{R^\Lambda}\right)\cap\mathbf{Z}^n_+} m(\alpha)<\infty$$

и для всех $\alpha\in\left(\bigcup_{|\Lambda|=k} B^\Lambda_{R^\Lambda}\right)\cap\mathbf{Z}^n_+$ выполняется неравенство (2.16) для некоторого $\varepsilon_1>0$. Возьмем Λ_1, такое, что $|\Lambda_1|=k-1$. Из определения множеств $B^\Lambda_{R_1R_2}$ и B^Λ_R следует, что существуют такие $R^{\Lambda_1}_1$ и $R^{\Lambda_1}_2>0$ и вместе с ними множество $B^{\Lambda_1}_{R^{\Lambda_1}_1 R^{\Lambda_1}_2}$, что

$$B^{\Lambda_1}_{R^{\Lambda_1}_1 R^{\Lambda_1}_2}\subset\bigcup_{|\Lambda|=k} B^\Lambda_{R^\Lambda}. \tag{2.17}$$

Пусть L_1^Λ не эргодична. Тогда, применяя лемму 2.3 и используя формулу (2.17), заключаем, что существуют такое R^{Λ_1} и натуральнозначная функция $n(\alpha)$, такая, что

$$\sup_{\alpha\in Z_+^n} n(\alpha) < \infty,$$

$$n(\alpha)\equiv m(\alpha) \text{ для } \alpha\in B_{R_1R_2}^{\Lambda_1} \cap B_{R\Lambda_1}^{\Lambda_1} \cap \mathbf{Z}_+^n$$

и выполняется неравенство

$$\sum_{\beta\in Z_+^n} p_{\alpha\beta}^{n(\alpha)} f_\beta - f_\alpha < -\varepsilon^{\Lambda_1} \tag{2.18}$$

для всех $\alpha\in B_{R\Lambda_1}^{\Lambda_1}$ и некоторого $\varepsilon_1^{\Lambda_1}>0$.

Пусть L^Λ эргодична. В этом случае воспользуемся леммой 2.2 и получим тот же результат, что и в случае неэргодичности цепи L^Λ. Перебрав все Λ с $|\Lambda|=k-1$, получим, что условия, которые мы предполагали выполненными для всех Λ с $|\Lambda|=k$, будут выполняться и для всех Λ с $|\Lambda|=k-1$.

Таким образом, по индукции мы показали, что для всех Λ с $|\Lambda|=1$ существуют множества $B_{R\Lambda}^\Lambda$ для некоторых $R^\Lambda>0$ и натуральнозначная функция $m(\alpha)$, такая, что

$$\sup_{\alpha\in \bigcup_{|\Lambda|=1} B_{R\Lambda}^\Lambda \cap Z_+^n} m(\alpha) < \infty$$

и для всех $\alpha\subset \bigcup_{|\Lambda|=1} B_{R\Lambda}^\Lambda$ выполняется неравенство (2.16) для некоторого $\varepsilon_1>0$. На этом доказательство эргодичности случайного блуждания кончается, если добавить, что $\mathbf{Z}_+^n \setminus \bigcup_{|\Lambda|=1} B_{R\Lambda}^\Lambda$ есть конечное множество.

Пусть теперь существует функция $f(\alpha)$ $(\alpha\in R_+^n)$, удовлетворяющая условию B′. Из теоремы 1.6 следует, что для доказательства невозвратности случайного блуждания L достаточно показать существование натуральнозначной функции $m(\alpha)\,(\alpha\in \mathbf{Z}_+^n)$, что

$$\sup_{\alpha\in Z_+^n} m(\alpha) = m < \infty$$

и для всех $\alpha\in T$, кроме некоторого конечного множества, выполняется неравенство

$$\sum_{\beta\in Z_+^n} p_{\alpha\beta}^{m(\alpha)} f_\beta - f_\alpha > \varepsilon_1 \tag{2.19}$$

для некоторого $\varepsilon_1>0$. Доказательство существования функции $m(\alpha)$ проводится по индукции совершенно аналогично и в той же последовательности, что и в случае эргодичности. Теорема доказана.

§ 2. Классификация случайных блужданий в $\mathbf{Z}_+^2$ и $\mathbf{Z}_+^3$

В этом параграфе дана классификация случайных блужданий в $\mathbf{Z}_+^n\,(n\leqslant 3)$ с точки зрения эргодичности и невозвратности. Как показывают результаты предыдущего параграфа, для доказательства эргодичности или невозвратности случайного блуждания L в Z_+^n необходимо классифицировать все индуцированные цепи L^Λ, размерность которых меньше n, и для эргодических цепей Λ^Λ вычислять векторы v^Λ, введенные ранее. Затем для векторного поля V, отвечающего $\{v^\Lambda\}$, следует построить функцию $f(\alpha)$ $(\alpha \in \mathbf{Z}_+^n)$, удовлетворяющую либо условию B, либо условию B′ § 1. Указан метод построения этой функции, который и позволит классифицировать случайные блуждания в $\mathbf{Z}_+^n$ для $n \leqslant 3$.

Векторное поле V, построенное выше, было определено только для точек, принадлежащих эргодическим граням. Доопределим векторное поле для точек, принадлежащих неэргодическим граням. Точке $x \in R_+^n$ приписывается вектор $\mathbf{v}(x) = \mathbf{v}^\Lambda$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

1. x принадлежит замыканию B^Λ. $\qquad$ (2.20 *а*)

2. Для всех достаточно малых $\delta > 0$ $x + \delta \mathbf{v}^\Lambda \in R_+^n$. $\qquad$ (2.20 *б*)

Заметим, что теперь возможна многозначность поля. Применяемым далее методом трудно исследовать случаи нулевой возвратности случайных блужданий. Поэтому мы будем предполагать выполненным

Условие А3. *$v_i^\Lambda \neq 0$ для $i \in \Lambda$.*

Как покажут дальнейшие теоремы, в этом случае все цепи будут либо эргодичны, либо невозвратны для случайных блужданий в $\mathbf{Z}_+^n$, где $n \leqslant 3$.

Пусть $n = 1$.

Теорема 2.2. *Если $v^{\{1\}} = M(\alpha) < 0$ $(\alpha \in B_c^{\{1\}})$, то случайное блуждание L эргодично, если же $v^{\{1\}} > 0$, то L невозвратно.*

Этот результат хорошо известен, поэтому доказательство его мы опускаем, хотя оно легко проводится методом «пробных функций».

Пусть $n = 2$.

Лемма 2.4. *Векторное поле V, построенное по вышеприведенному правилу, непусто и однозначно для каждой точки $x \in R_+^2 \setminus 0$. Кроме того, любым двум точкам, принадлежащим одной грани B^Λ, приписан один и тот же вектор.*

Доказательство. Каждой точке $x \in B^{\{1,2\}}$ приписывается единственный вектор $\mathbf{v}^{\{1,2\}}$. Пусть $x \in B^{\{i_1\}}$, т. е. одномерной грани. Возможны два случая: либо цепь $L^{\{i_1\}}$ эргодична, либо транзиентна (случай нулевой возвратности, как следует из условия А3 и теоремы 2.1, исключается). В первом случае точке $x \in B^{\{i_1\}}$ приписывается вектор $\mathbf{v}^{\{i_1\}}$. Точка x принадежит замыканию грани $B^{\{1,2\}}$. Однако из эргодичности цепи $L^{\{i_1\}}$ в силу теоремы 2.1 $v_{i_2}^{\{1,2\}} < 0$, и поэтому условие (20*б*) для вектора $\mathbf{v}^{\{1,2\}}$ не выполняется, и он точке x не приписывается. Если же $L^{\{i_1\}}$ транзиентна, то по теореме 2.1 $v_{i_2}^{\{1,2\}} > 0$ и, следовательно, условия (20*а*) и (20*б*) выполняются, и точке x приписывается единственный вектор $\mathbf{v}^{\{1,2\}}$. Лемма доказана.

По векторному полю V в R_+^2 строим естественным образом детерминированный процесс $\psi(t)$, для которого V есть поле скоростей.

Теорема 2.3. *Если для любой точки $x \in R_+^2 \setminus 0$ $\tau(x)$ — время достижения начала координат процессом $\psi(t)$ при $\psi(0) = x$ — конечно,* *то случайное блуждание L эргодично. В противном случае случайное блуждание транзиентно.*

Доказательство. Пусть $\tau(x)$ конечно для любой точки $x \in R_+^2 \setminus 0$. Введем на R_+^2 функцию $f(x)$, положив $f(x)=\tau(x)$. Из свойств поля скоростей V, доказанных в лемме 2.1, и из чисто геометрических соображений следует, что $f(x)$ удовлетворяет условию B предыдущего параграфа. Следовательно, L — эргодично.

Если же хотя бы для одной точки x $\tau(x)$ — бесконечно, то удается построить функцию $f(x)$ на R_+^2, удовлетворяющую условию B′, что приводит к невозвратности случайного блуждания L. Мы не будем останавливаться на построении этой функции, так как оно носит чисто геометрический характер.

Простым перебором возможных случаев условие конечности времени достижения начала координат процессом $\psi(t)$ можно переписать в терминах поля скоростей V в виде следующей теоремы.

Теорема 2.3′. *Процесс $\psi(t)$ достигает начала координат за конечное время для любого начального состояния $\psi(0)=x \in R_+^2$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1. *Существует такое i_1, что $v_{i_1}^{\{1,2\}} < 0$.*
2. *Для каждого i_1, при котором $v_{i_1}^{\{1,2\}} < 0$, $v_{i_2}^{\{i_1\}} < 0$.*

Отметим, что для случайных блужданий в $\mathbf{Z}_+^2$ с более жесткими условиями однородности в [4 и 12] была проведена классификация, где аналогичная теорема формулировалась в более явном виде. Однако если на случайное блуждание L наложить эти условия однородности, то векторное поле V вычисляется в терминах средних скачков, и вид теоремы 2.3′ упрощается.

Перейдем к исследованию случайного блуждания в $\mathbf{Z}_+^3$.

Лемма 2.5. *Поле векторов V непусто для каждой точки $x \in R_+^3 \setminus 0$. При этом однозначность может нарушаться лишь для одной из трех одномерных граней типа $B^{\{i_1\}}$. В этом случае точкам грани $B^{\{i_1\}}$ приписаны два вектора. Кроме того, любым двум точкам, принадлежащим одной грани B^Λ, приписаны одинаковые вектора.*

Доказательство этой леммы опирается на теорему 2.3′ и проводится совершенно аналогично доказательству леммы 2.4, опирающейся на теорему 2.2.

Если поле V однозначно, то по векторному полю V в $R_+^3 \setminus 0$ строится естественным образом детерминированный процесс $\psi(t)$, для которого V есть поле скоростей. Если же однозначность V нарушается на одномерной грани $B^{\{i_1\}}$, то выберем один из векторов, приписанный грани $B^{\{i_1\}}$. Таким образом, мы получим два однозначных поля V_1 и V_2. По каждому полю V_i построим детерминированный процесс $\psi_i(t)$.

Теорема 2.4. *Если для любой точки $x \in R_+^3 \setminus 0$ $\tau(x)$ — время достижения начала координат процессом $\psi_i(t)$ при $\psi_i(0)=x$ — конечно хотя бы для одного i, $i=1, 2$, то случайное блуждание L эргодично. Если же хотя бы один процесс $\psi_i(t)$ для некоторого начального состояния $\psi(0)=x$ является неограниченным, то L невозвратно.*

Доказательство. Пусть $\tau_i(x)$ конечно для любой точки $x \in R_+^3$. Как и в теореме 2.3, введем на R_+^3 функцию $f(x)$, положив $f(x)=\tau_i(x)$. Легко доказывается, что если поле V однозначно, то эта функция удовлетворяет условию B предыдущего параграфа и, следовательно,

L эргодична. Если же однозначность поля V нарушается на одномерной грани $B^{\{i_1\}}$, то непрерывность функции $f(x)$ нарушается вдоль плоскости, проведенной через грань $B^{\{i_1\}}$ и вектор $\mathbf{v}^{\{1,2,3\}}$. Однако этот разрыв легко устранить. Для этого значения функции $f(x)$ в одной из частей, на которые указанная плоскость разбила R^3_+, надо домножить на соответствующий множитель. Такая подправленная функция уже будет удовлетворять условию В, что и приводит к эргодичности случайного блуждания L и в этом случае.

На доказательстве невозвратности случайного блуждания L в случае неограниченности процесса $\psi_i(t)$ мы останавливаться не будем, так как оно проводится вполне аналогично.

Перебором всех возможных случаев условие конечности времени достижения начала координат процессом $\psi_i(t)$ можно переписать в виде следующей теоремы.

Теорема 2.4′. *Процесс $\psi_i(t)$ достигает начала координат за конечное время для любого начального состояния $\psi_i(0)=x\in R^3_+$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия:*

1. *Существует такое i_1, что $v^{\{1,2,3\}}_{i_1}<0$.*

2. *Для каждого i_1, при котором $v^{\{1,2,3\}}_{i_1}<0$, существует i_2, что $v^{\{i_2 i_3\}}_{i_2}<0$.*

3. *Выполняется:*

либо а) существует такое i_1, что $L^{\{i_1\}}$ эргодична, и для любого i_1, такого, что $L^{\{i_1\}}$ эргодична, $v^{\{i_1\}}_{i_1}<0$; либо б) *$L^{\{1\}}$, $L^{\{2\}}$, $L^{\{3\}}$ — невозвратны. Тогда, если $v^{\{2,3\}}_2>0$, то*

$$\left|\frac{v^{\{2,3\}}_2}{v^{\{2,3\}}_3}\,\frac{v^{\{1,3\}}_3}{v^{\{1,3\}}_1}\,\frac{v^{\{1,2\}}_1}{v_2^{\{1,2\}}}\right|<1,$$

если же $v^{\{2,3\}}_2<0$, то

$$\left|\frac{v^{\{2,3\}}_2}{v^{\{2,3\}}_3}\,\frac{v^{\{1,3\}}_3}{v^{\{1,3\}}_1}\,\frac{v^{\{1,2\}}_1}{v^{\{1,2\}}_2}\right|>1$$

(случай, когда выражение, стоящее под модулем, равно 1, не рассматривается).

Доказательство этой леммы носит геометрический характер и использует свойства векторного поля V. Мы на нем не будем останавливаться. Отметим лишь случай, когда выполнены условия 1, 2 и 3, б. В этом случае процесс $\psi_i(t)$ $(\psi_i(0)=x)$ за конечное время достигнет одной из двумерных граней и далее начнет последовательно пересекать все двумерные и одномерные грани, не выходя в $B^{\{1,2,3\}}$. Выполнение условия 3, б показывает, что процесс $\psi_i(t)$ будет закручиваться в ту или иную сторону и достигнет начала координат за конечное время.

Сделаем некоторые замечания об эргодичности случайных блужданий в $\mathbf{Z}^n_+$ для $n\geqslant 4$. Теорема 2.1 дает лишь достаточные условия эргодичности случайных блужданий. Вследствие этого оказывается, что для эргодических блужданий в $\mathbf{Z}^n_+ (n\geqslant 4)$ не всегда существует функция $f(\alpha)$ $(\alpha\in\mathbf{Z}^n_+)$, удовлетворяющая условию В § 1. По-видимому, исследование случайных блужданий и для больших размерностей можно проводить подобными методами. При этом вместо детерминированного процесса $\psi(t)$, построенного в § 2 гл. II и эквивалентного случайному блужданию в смысле эргодичности, строится случайный процесс $\tilde{\psi}(t)$, также эквивалентный в смысле эргодичности случайному блужданию (для точек, принадлежащих эргодическим граням, он ведет себя как детерминированный процесс). С увеличением размерности случайного блуждания конструкция процесса $\tilde{\psi}(t)$ усложняется. В настоящей работе построение такого процесса для $n \geqslant 4$ не проводилось. Решение этой задачи представляет большие трудности и должно использовать граничную теорию марковских процессов в дискретном случае, изложенную, например, в [13].

Отметим, что нашим методом легко исследуется случайное блуждание на дискретной решетке в полуполосе и вообще в $Z_+^n \times B$, где B — конечное множество, если только выполнены условия однородности, аналогичные введенным в § 1. Тем самым в предположениях однородности критерии эргодичности, изложенные в [21] для цепей Маркова в специальном фазовом пространстве E_S, могут быть существенно упрощены.

ГЛАВА III. НЕПРЕРЫВНОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ЦЕПЕЙ МАРКОВА

§ 1. Постановка задачи. Необходимое и достаточное условие непрерывности стационарных вероятностей

В последнее время вопросы непрерывности семейства марковских процессов в основном исследуются в связи с системами массового обслуживания, например, в работах [16, 17], причем трактовка понятия непрерывности различная. Так, в [17] методом «пробных функций» даются достаточные условия равномерной близости компонент марковского процесса. В данной главе исследуется непрерывность стационарных распределений для семейства однородных неприводимых и непериодических цепей Маркова. В § 1 дается необходимое и достаточное условие непрерывности стационарных вероятностей, а в § 2 конструктивные достаточные условия непрерывности стационарных вероятностей в терминах «пробных функций».

Рассмотрим семейство однородных неприводимых непериодических цепей Маркова $\{L^\nu\}$ с дискретным временем и счетным множеством состояний $A = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $\nu \in D$, где D — некоторое открытое подмножество действительной прямой. Через $p_{ij}(t, \nu)$ будем обозначать вероятность перехода из точки i в точку j за t шагов в цепи L^ν. Везде в этой главе будет предполагаться, что $p_{ij}(1, \nu)$ непрерывны по ν при всех $\nu \in D$ и $i, j \in A$.

Лемма 3.1. *$P_{ij}(t, \nu)$ — непрерывные функции по ν $(\nu \in D)$ при любом натуральном t и любых $i, j \in A$.*

Доказательство. Будем доказывать лемму по индукции. Для $n=1$ $p_{ij}(1, \nu)$ — непрерывная функция по ν при любых $i, j \in A$. Предположим, что $p_{ij}(n, \nu)$ непрерывна по ν при любых $i, j \in A$

$$p_{ij}(n+1, \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(1, \nu)\, p_{kj}(n, \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\nu). \tag{3.1}$$

Из предположений индукции следует, что $\varphi_k(\nu)$ — непрерывные функции по ν для любого k

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(\nu) \equiv 1 \quad (\nu \in D). \tag{3.2}$$

Следовательно, ряд (3.2), составленный из непрерывных функций, сходится равномерно по $\nu \in D$, $p_{kj}(n, \nu) \leqslant 1$ для любых k, j, n и $\nu \in D$. Эти два условия приводят к равномерной сходимости ряда (3.1). Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть непрерывная функция. Следовательно, $p_{ij}(n+1, \nu)$ непрерывны по ν. Лемма доказана.

Пусть на множестве A задано семейство распределений $\{\pi_j(\nu)\}$ $j \in A$, $\nu \in D$, где D — некоторое открытое подмножество действительной прямой.

$$\sum_{j \in A} \pi_j(\nu) = 1 \quad (\nu \in D).$$

Определение. *Семейство распределений* $\{\pi_j(\nu)\}$ *(*$j \in A$, $\nu \in D$*) удовлетворяет условию* (λ) *в точке* $\nu_0 \in D$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют* $\delta > 0$ *и конечное множество* $B^\varepsilon \subset A$, что

$$\sum_{j \in A \setminus B^\varepsilon} \pi_j(\nu) < \varepsilon \tag{3.3}$$

для всех ν, *таких, что* $|\nu - \nu_0| < \delta$.

Пусть цепи L^ν эргодичны для каждого ν, принадлежащего некоторой окрестности нуля $U_0 \subset D$.

Теорема 3.1. *Стационарные вероятности* $\pi_j(\nu)$ *при всех* $j \in A$ *непрерывно зависят от* ν *при* $\nu = 0$ *тогда и только тогда, когда семейство распределений* $\{\pi_j(\nu)\}$ *удовлетворяет условию* (λ) *в точке* $\nu = 0$.

Прежде чем доказывать теорему 3.1, сделаем следующее замечание. Следуя работе Ю. В. Прохорова [22], образуем метрическое пространство $D(A)$. Для этого определим расстояние $L(\mu_1, \mu_2)$ для любых двух мер μ_1 и μ_2 на $A = \{0, 1, 2, \ldots, n,\}$ так, что сходимость в смысле этого расстояния эквивалентна слабой сходимости мер. Совокупность мер в A вместе с функцией $L(\mu_1, \mu_2)$ и образует метрическое пространство $D(A)$. В соответствии с [22] введем

Определение. *Множество* T *мер в* A *удовлетворяет условию* (χ), *если* (χ_1) *значения* $\mu(A)$ $\mu \in T$ *ограничены в совокупности,* (χ_2) *для любого заданного* $\varepsilon > 0$ *существует конечное множество точек* k_ε, *такое, что при всех* $\mu \in T$

$$\mu(A \setminus k_\varepsilon) < \varepsilon.$$

В работе [22] доказано, что для компактности множества мер $T \subseteq D(A)$ необходимо и достаточно выполнение условия (χ). Для семейства распределений $\{\pi_j(\nu)\}$ выполнение условия (χ) влечет за собой, очевидным образом, выполнение условия (λ). Поэтому в качестве следствия теоремы 3.1 справедлива следующая

Теорема 3.2. *Для того чтобы стационарные вероятности* $\pi_j(\nu)$ *при всех* $j \in A$ *непрерывно зависели от* ν *при* $\nu \in D$, *достаточно, чтобы семейство распределений* $\{\pi_j(\nu)\}$ *было компактно в* $D(A)$.

Перейдем к доказательству теоремы 3.1. Пусть семейство распределений $\{\pi_j(\nu)\}$ удовлетворяет условию (λ) в точке $\nu = 0$. Докажем, что тогда $\pi_j(\nu)$ непрерывна справа при $\nu = 0$ для любого $j \in A$ (непрерывность слева доказывается аналогично). Возьмем произвольное

$\varepsilon>0$. Из условия (λ) следует, что существуют такое $\nu_0>0$ и конечное множество $B^\varepsilon\subset A$, что для любого ν, такого, что

$$0\leqslant\nu\leqslant\nu_0, \qquad \text{(условие } a_1)$$

выполняется неравенство

$$\sum_{k\in A\setminus B^\varepsilon}\pi_k(\nu)<\varepsilon. \tag{3.4}$$

Докажем, что для любого $j\in A$ существует такое $\nu_1(j)$, что при $0<\nu<\nu_1(j)$

$$|\pi_j(\nu)-\pi_j(0)|<10\varepsilon. \tag{3.5}$$

Тем самым мы докажем непрерывность стационарных вероятностей $\pi_j(\nu)$ при $\nu=0$. Следующее неравенство выполняется для любого t и любых i, j:

$$|\pi_j(\nu)-\pi_j(0)|=|p_{ij}(t,\nu)-p_{ij}(t,0)+\pi_j(\nu)-p_{ij}(t,\nu)+p_{ij}(t,0)-\pi_j(0)|\leqslant$$
$$\leqslant|P_{ij}(t,\nu)-P_{ij}(t,0)|+|\pi_j(\nu)-p_{ij}(t,\nu)|+|p_{ij}(t,0)-\pi_j(0)|. \tag{3.6}$$

Из эргодичности цепей L^ν и L^0 при фиксированных i, j можно указать такое $t_0(\nu)$, что при

$$t>t_0(\nu) \qquad \text{(условие } a_2)$$

выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned}|\pi_j(\nu)-p_{ij}(t,\nu)|&<\varepsilon,\\ |p_{ij}(t,0)-\pi_j(0)|&<\varepsilon.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Рассмотрим первый член правой части неравенства (3.6). Для любого $T<t$ имеем

$$|p_{ij}(t,\nu)-p_{ij}(t,0)|=\Big|\sum_{k\in B^\varepsilon}p_{ik}(t-T,\nu)P_{kj}(T,\nu)+$$
$$+\sum_{k\in A\setminus B^\varepsilon}p_{ij}(t-T,\nu)p_{kj}(T,\nu)-\sum_{k\in B^\varepsilon}p_{ik}(t-T,0)p_{kj}(T,0)-$$
$$-\sum_{k\in A\setminus B^\varepsilon}p_{ik}(t-T,0)p_{kj}(T,0)\Big|\leqslant\Big|\sum_{k\in B^\varepsilon}[p_{ik}(t-T,\nu)p_{kj}(T,\nu)-$$
$$-p_{ik}(t-T,0)p_{kj}(T,0)]\Big|+\sum_{k\in A\setminus B^\varepsilon}p_{ik}(t-T,\nu)+\sum_{k\in A\setminus B^\varepsilon}p_{ik}(t-T,0). \tag{3.8}$$

Из неравенства (3.4) и эргодичности цепей L^ν и L^0 следует существование такого $t_1(\nu)$, что при

$$t-T>t_1(\nu) \qquad \text{(условие } a_3)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k\in A\setminus B^\varepsilon}p_{ik}(t-T,\nu)&<2\varepsilon,\\ \sum_{k\in A\setminus B^\varepsilon}p_{ik}(t-T,0)&<2\varepsilon.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Перейдем к исследованию первого члена правой части неравенства (3.8).

$$\Big|\sum_{k\in B^\varepsilon}[p_{ik}(t-T,\nu)p_{kj}(T,\nu)-p_{ik}(t-T,0)p_{kj}(T,0)]\Big|=$$
$$=\Big|\sum_{k\in B^\varepsilon}[p_{ik}(t-T,\nu)p_{ij}(T,\nu)-p_{ik}(t-T,\nu)(p_{ij}(T,\nu)-p_{kj}(T,\nu))-$$
$$-p_{ik}(t-T,0)p_{ij}(T,0)+p_{ik}(t-T,0)(p_{ij}(T,0)-p_{kj}(T,0))]\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\Big|\sum_{k\in B^\varepsilon}p_{ik}(t-T,\nu)|p_{ij}(T,\nu)-p_{kj}(T,\nu)|+$$

$$+\sum_{k\in B^\varepsilon} p_{ik}(t-T,0)\,|\,p_{ij}(T,0)-p_{kj}(T,0)\,\Big|+$$
$$+\Big|p_{ij}(T,\nu)\sum_{k\in B^\varepsilon} p_{ik}(t-T,\nu)-p_{ij}(T,0)\sum_{k\in B^\varepsilon} p_{ik}(t-T,0)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\Big|p_{ij}(T,\nu)\sum_{k\in B^\varepsilon} p_{ik}(t-T,\nu)-p_{ij}(T,0)\sum_{k\in B^\varepsilon} p_{ik}(t-T,0)\Big|+$$
$$+\sum_{k\in B^\varepsilon}|p_{ij}(T,\nu)-p_{kj}(T,\nu)|+\sum_{k\in B^\varepsilon}|p_{ij}(T,0)-p_{kj}(T,0)|. \tag{3.10}$$

Из неравенства (3.9) следует, что при $t-T>t_1(\nu)$

$$1-\sum_{k\in B^\varepsilon} p_{ik}(t-T,\nu)<2\varepsilon,$$
$$1-\sum_{k\in B^\varepsilon} p_{ik}(t-T,0)<2\varepsilon. \tag{3.11}$$

Так как $p_{ij}(T,\nu)$ при фиксированном T является непрерывной в нуле функцией по ν, то существует такое $\nu_2=\nu_2(T)$, что при

$$0<\nu<\nu_2(T), \qquad \text{(условие } a_4)$$
$$|p_{ij}(T,\nu)-p_{ij}(T,0)|<\varepsilon. \tag{3.12}$$

Из неравенств (3.11) и (3.12) следует, что

$$\Big|p_{ij}(T,\nu)\sum_{k\in B^\varepsilon} p_{ik}(t-T,\nu)-p_{ij}(T,0)\sum_{k\in B^\varepsilon} p_{ik}(t-T,0)\Big|\leqslant 3\varepsilon. \tag{3.13}$$

L^0 — эргодическая цепь, следовательно, можно указать такое

$$T=T(B^\varepsilon), \qquad \text{(условие } a_5)$$

при котором

$$\max_{k\in B^\varepsilon}|p_{ij}(T,0)-p_{kj}(T,0)|<\varepsilon/M, \tag{3.14}$$
$$\sum_{k\in B^\varepsilon}|p_{ij}(T,0)-p_{kj}(T,0)|<\varepsilon, \tag{3.15}$$

где M равно числу слагаемых в сумме (3.15). Из непрерывности $p_{kj}(T,\nu)$ при фиксированном T в точке $\nu=0$ следует существование такого $\nu_3(T)$, что при

$$\nu<\nu_3(T), \qquad \text{(условие } a_6)$$
$$\sup_{k\in B^\varepsilon,\,\nu<\nu_3(T)}|p_{kj}(T,\nu)-p_{kj}(T,0)|<\varepsilon/M. \tag{3.16}$$

Выполнение неравенств (3.14) и (3.16) влечет за собой неравенство

$$\sup_{k\in B^\varepsilon,\,\nu<\nu_3(T)}|p_{ij}(T,\nu)-p_{kj}(T,\nu)|<2\varepsilon/M. \tag{3.17}$$

Таким образом,

$$\sum_{k\in B^\varepsilon}|p_{ij}(T,\nu)-p_{kj}(T,\nu)|<2\varepsilon. \tag{3.18}$$

Объединив неравенства (3.9), (3.13), (3.15) и (3.18), получим, что если t, T, ν удовлетворяют условиям a_1—a_6, то

$$|\pi_j(\nu)-\pi_j(0)|<10\varepsilon. \tag{3.19}$$

Доказательство непрерывности $\pi_j(\nu)$ справа при $\nu=0$ заканчивается, если показать существование такого T и такого $\nu_1>0$, что при $0<\nu<\nu_1$ существует t, зависящее от ν, при котором выполняются условия a_1—a_6.

Это легко показывается следующим образом. По множеству B^ε находим $T=T(B^\varepsilon)$ (условие a_5), по T находим числа $\nu_2(T)$ и $\nu_3(T)$. Положим $\nu_1(T)=\min\{\nu_0, \nu_2(T), \nu_3(T)\}$. Тогда для любого $\nu<\nu_1(T)$ берем $t>\max\{t_0(\nu), T+t_1(\nu)\}$, что и приводит к выполнению условий a_1—a_6.

Докажем теперь, что из непрерывности стационарных вероятностей $\pi_j(\nu)$ для любого $j\in A$ в точке $\nu=0$ следует выполнение условия (λ) для семейства распределений $\{\pi_j(\nu)\}$ в точке $\nu=0$. L^0 — эргодична. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое конечное множество B^ε, что выполняются неравенства

$$\sum_{k\in A\setminus B^\varepsilon} \pi_k(0)<\varepsilon/2,$$

$$\sum_{k\in B^\varepsilon} \pi_k(0)>1-\varepsilon/2. \tag{3.20}$$

Из непрерывности $\pi_k(\nu)$ при $\nu=0$ следует, что можно указать такое ν_0, что при $|\nu|<\nu_0$

$$\max_{k\in B^\varepsilon} |\pi_k(\nu)-\pi_k(0)|<\varepsilon/2M, \tag{3.21}$$

где M — число элементов множества B^ε. Поэтому

$$\sum_{k\in B^\varepsilon} |\pi_k(\nu)-\pi_k(0)|<\varepsilon/2, \tag{3.22}$$

$$\sum_{k\in A\setminus B^\varepsilon} \pi_k(\nu)<\varepsilon. \tag{3.23}$$

Следовательно, условие (λ) семейства распределений $\{\pi_j(\nu)\}$ в точке $\nu=0$ выполняется. Теорема доказана.

§ 2. Некоторые достаточные условия непрерывности стационарных вероятностей

Пусть, как и в § 1, рассматривается семейство неприводимых непериодических цепей Маркова $\{L^\nu\}$ с переходными вероятностями $p_{ij}(1, \nu)=p_{ij}(\nu)$, непрерывно зависящими от ν при $\nu\in D\subset R^1$ (D — открытое множество).

Теоремы этого параграфа будут формулироваться в терминах «пробных функций». В дальнейшем с помощью результатов этого параграфа будет исследоваться непрерывность стационарных вероятностей случайных блужданий в $\mathbf{Z}_+^n$.

Предположим, что на множестве $A=\{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ заданы два семейства вещественных функций $f^\nu=\{f_i^n\}$ и $g^\nu=\{g_i^\nu\}$ ($i\in A$, $\nu\in D$), причем

$$\inf_{i\in A,\nu\in D} f_i^\nu\geqslant 0, \qquad \inf_{i\in A,\nu\in D} g_i^\nu=\delta>0.$$

Теорема 3.3. *Пусть для некоторого конечного непустого множества $B\subset A$ функции $\{f_i^\nu\}$ и $\{g_i^\nu\}$ удовлетворяют условиям:*

1. $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\nu)f_j^\nu-f_i^\nu<-g_i^\nu \quad i\bar{\in}B,\ \nu\in D,$

2. $\sup_{i\in B,\nu\in D} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\nu)f_j^\nu=\lambda<\infty,$

3. $g_i^\nu\to\infty$ *при* $i\to\infty$ *равномерно по* $\nu\in D$.

Тогда цепи L^ν эргодичны для каждого $\nu \in D$, а стационарные вероятности $\pi_j(\nu)$ непрерывны по ν при $\nu \in D$ и любом $j \in A$.

Доказательство. Эргодичность цепей L^ν для каждого $\nu \in D$ следует из выполняемости условий теоремы 1.5. Определим по индукции

$$y_j^{n+1}(\nu) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(1, \nu)\, y_j^n(\nu); \quad y_i^1(\nu) = y_i(\nu) = f_i^\nu.$$

Очевидно, что $y_i^n(\nu) \geqslant 0$ для любых натуральных i, n и любом $\nu \in D$. Имеем

$$y_i^2(\nu) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(1, \nu) f_j^\nu < f_i^\nu - g_i^\nu = y_i(\nu) - g_i^\nu, \quad i \notin B,$$

$$y_i^2(\nu) \leqslant \lambda, \quad i \in B,$$

$$y_i^3(\nu) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(1, \nu)\, y_j^2(\nu) \leqslant \lambda \sum_{j \in B} p_{ij}(1, \nu) + \sum_{j \notin B} p_{ij}(1, \nu)\left(y_j(\nu) - g_i^\nu\right).$$

Обозначим

$$\lambda_1 = \sup_{i \in B, \nu \in D} g_i^\nu; \quad p_{iB}(n, \nu) = \sum_{j \in B} p_{ij}(n, \nu).$$

Проведя несложные выкладки, получаем

$$y_i^3(\nu) \leqslant (\lambda + \lambda_1)\, p_{iB}(1, \nu) + y_i^2(\nu) - \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(1, \nu)\, g_j^\nu. \tag{3.24}$$

Далее, по индукции легко доказывается формула

$$y_i^n(\nu) \leqslant (\lambda + \lambda_1)\, p_{iB}(n-2, \nu) + y_i^{n-2}(\nu) - \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(n-2, \nu)\, g_j^\nu. \tag{3.25}$$

Из рекуррентного соотношения (3.25) получаем

$$y_i^{n+2}(\nu) \leqslant y_i^2(\nu) + (\lambda + \lambda_1) \sum_{r=1}^{n} p_{iB}(r, \nu) - \sum_{r=1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(r, \nu)\, g_j^\nu, \tag{3.26}$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(r, \nu)\, g_j^\nu}{n} \leqslant \frac{y_i^2}{n} + (\lambda + \lambda_1) \frac{\sum_{r=1}^{n} p_{iB}^r}{n} - \frac{y_i^{n+2}(\nu)}{n} <$$

$$< \frac{y_i^2(\nu)}{n} + \lambda + \lambda_1 < y_i^2(\nu) + \lambda + \lambda_1.$$

Возьмем $i \in B$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\sum_{r=1}^{n} p_{ij}(r, \nu)}{n}\, g_i^\nu \right) < y_i^2(\nu) + \lambda + \lambda_1 < 2\lambda + \lambda_1. \tag{3.27}$$

Возьмем произвольное $M > 0$. Рассмотрим множество $B^M = \{i : \min_{\nu \in D} g^\nu(i) < M\}$.

Так как $g_i^\nu \to \infty$ при $i \to \infty$ равномерно по $\nu \in D$, то B^M — конечное множество. Кроме того, если $j \in A \setminus B^M$, то для любого $\nu \in D$ $g_j^\nu \geqslant M$. Из неравенства (3.27) следует

$$\sum_{j \in A \setminus B^M} \frac{\sum_{r=1}^{n} p_{ij}(r, \nu)}{n}\, g_j^\nu < 2\lambda + \lambda_1.$$

Откуда

$$\sum_{j\in A\setminus B^M} \frac{\sum_{r=1}^{n} p_{ij}(r, \nu)}{n} < \frac{2\lambda+\lambda_1}{M}. \tag{3.28}$$

Из неравенства (3.28) следует

$$\sum_{j\in B^M} \frac{\sum_{r=1}^{n} p_{ij}(r, \nu)}{n} > 1 - \frac{2\lambda+\lambda_1}{M}. \tag{3.29}$$

$\pi_j(\nu) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{r=1}^{n} p_{ij}^r(\nu)}{n}$. Поэтому из конечности множества B^M и неравенства (3.29) следует

$$\begin{gathered}\sum_{j\in B^M} \pi_j(\nu) > 1 - \frac{2\lambda+\lambda_1}{M},\\ \sum_{j\in A\setminus B^M} \pi_j(\nu) < \frac{2\lambda+\lambda_1}{M}.\end{gathered} \tag{3.30}$$

Так как число M мы могли взять сколь угодно большим и по нему построить множество B^M, то из неравенства (3.30) следует компактность семейства распределений $\{\pi_j(\nu)\}$ при $\nu\in D$, что в силу теоремы 3.2 влечет за собой непрерывность стационарных вероятностей $\pi_j(\nu)$ при любом $j\in A$ и $\nu\in D$. Теорема доказана.

Теорема 3.4. *Пусть для некоторого $\delta>0$, некоторого $\gamma>1$ и некоторого конечного непустого множества $B\subset A$ выполняются условия:*

1. $\sum\limits_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\nu) f_j^\nu - f_i^\nu < -\delta, \quad i\bar{\in} B,\ \nu\in D.$

2. $\sup\limits_{i\in B,\nu\in D} \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\nu) (f_j^\nu)^\gamma = \lambda_\gamma < \infty.$

3. $\sup\limits_{i\in A,\nu\in D} \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\nu) |f_j^\nu - f_i^\nu|^\gamma = c_\gamma < \infty.$

4. $f_i^\nu \to \infty$ *при* $i\to\infty$ *равномерно по* $\nu\in D$.

Тогда цепи L^ν эргодичны для каждого $\nu\in D$, а стационарные вероятности $\pi_j(\nu)$ непрерывны по ν при $\nu\in D$ для любого $j\in A$.

Доказательство. Пусть для некоторого $\gamma>1$ выполнено условие 3 теоремы 3.4. Тогда для любого γ_0, такого, что $1\leqslant\gamma_0<\gamma$

$$\sup_{i\in A,\nu\in D} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\nu) |f_j^\nu - f_i^\nu|^{\gamma_0} < c_\gamma + 1 < \infty.$$

Поэтому без ограничения общности можно считать, что $1<\gamma\leqslant 2$. Для любого $1\leqslant\gamma\leqslant 2$ и любых $y, x>0$ докажем вспомогательное неравенство

$$y^\gamma - x^\gamma \leqslant |y-x|^\gamma + x^{\gamma-1}\gamma(y-x). \tag{3.31}$$

Положим $z=y/x$. Неравенство (3.31) можно переписать

$$z^\gamma - 1 - |z-1|^\gamma - \gamma(z-1) \leqslant 0. \tag{3.32}$$

Для доказательства неравенства (3.32) рассмотрим два случая.

1^0. Пусть $z \geqslant 1$. Тогда при $z=1$ левая часть неравенства (3.32) равна нулю и при $z>1$

$$\frac{d(z^\gamma - 1 - (z-1)^\gamma - \gamma(z-1))}{dz} = \gamma[z^{\gamma-1} - (z-1)^{\gamma-1} - 1] < 0.$$

Следовательно, при $z \geqslant 1$ неравенство (3.32) выполняется.

2^0. Пусть $z \leqslant 1$. Тогда при $z=1$ неравенство (3.32) превращается в равенство, а при $z<1$

$$\frac{d(z^\gamma - 1 - (1-z)^\gamma - \gamma(z-1))}{dz} = \gamma[z^{\gamma-1} + (1-z)^{\gamma-1} - 1] > 0.$$

Следовательно, и при $z<1$ неравенство (3.32) выполняется, а вместе с ним выполняется и неравенство (3.31) для любого $1 \leqslant \gamma \leqslant 2$ и любых $y, x > 0$.

Воспользуемся неравенством (3.31) для оценки

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\nu)[(f_j^\nu)^\gamma - (f_i^\nu)^\gamma] \quad \text{при } i \bar{\in} B.$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\nu)[(f_j^\nu)^\gamma - (f_i^\nu)^\gamma] \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\nu)[|f_j^\nu - f_i^\nu|^\gamma + (f_i^\nu)^{\gamma-1}\gamma(f_j^\nu - f_i^\nu)] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\nu)|f_j^\nu - f_i^\nu|^\gamma + \gamma(f_i^\nu)^{\gamma-1}\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\nu)(f_j^\nu - f_i^\nu).$$

Принимая во внимание условия 1 и 3 теоремы 3.4, окончательно имеем оценку

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\nu)[(f_j^\nu)^\gamma - (f_i^\nu)^\gamma] \leqslant c_\gamma - \gamma(f_i^\nu)^{\gamma-1}\delta. \tag{3.33}$$

Если для некоторого семейства функций $\{f_i^\nu\}$ выполняются условия теоремы 3.4, они будут выполняться и для семейства функций $\{f_i^\nu + r\} = \{\bar{f}_i^\nu\}$, где $r>0$ любое. (Второе условие теоремы будет выполняться с другой константой $\tilde{\lambda}_\gamma < \infty$.) Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\gamma(f_i^\nu)^{\gamma-1}\delta - c_\gamma > \sigma > 0$ для некоторого σ, любых $i \in A$, $\nu \in D$. Положим $\tilde{f}_i^\nu = (f_i^\nu)^\gamma$; $\tilde{g}_i^\nu = \gamma(f_i^\nu)^{\gamma-1}\delta - c_\gamma$. Тогда, используя неравенство (3.33) и условие 2 теоремы, имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\nu)\tilde{f}_j^\nu - \tilde{f}_i^\nu < -\tilde{g}_i^\nu, \quad i \bar{\in} B, \ \nu \in D,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\nu)\tilde{f}_j^\nu < \tilde{\lambda}_\gamma < \infty, \quad i \in B, \ \nu \in D.$$

Так как $\gamma > 1$, то из равномерного стремления к бесконечности f_i^ν при $i \to \infty$ следует равномерное стремление к бесконечности функции $g_i^\nu = \gamma(f_i^\nu)^{\gamma-1}\delta - c_\gamma$. Таким образом, для функций $\{\tilde{f}_i^\nu\}$ и $\{\tilde{g}_i^\nu\}$ выполняются все условия теоремы 3.3. Следовательно, стационарные вероятности $\pi_j(\nu)$ непрерывны по ν при $\nu \in D$ и любом $j \in A$. Теорема доказана.

Замечание. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность случайных величин, соответствующих цепи Маркова L. Пусть C — некоторое множество $C \subset A = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Для $i \in C$ введем

$$f_{iC}^n = p\{\xi_i \bar{\in} C, \ \ldots, \xi_{n-1} \bar{\in} C, \ \xi_n \in C/\xi_0 = i\}.$$

Тогда среднее время достижения множества C процессом $\{\xi_i\}$ при условии $\xi_0 = i$ определяется

$$Mt = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{iC}^n.$$

Для любого $\gamma > 0$ можно определить величину

$$Mt^\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma f_{iC}^n.$$

Следуя работе [18], назовем свойство конечности величины Mt^γ для цепи L γ-возвратностью множества C. Как следует из результатов работы [18], условия теоремы 3.4 гарантируют равномерную по $\nu \in D$ γ-возвратность множества B семействам цепей $\{L^\nu\}$. Далее, можно показать, что из равномерной γ-возвратности семейства цепей $\{L^\nu\}$ с $\gamma > 1$ следует непрерывность стационарных вероятностей. Таким образом, мы наметили еще один способ доказательства теоремы 3.4.

Пусть на множестве $A = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ задано семейство целочисленных положительных равномерно ограниченных функций $k^\nu = \{k_i^\nu\}$,

$$\sup_{i \in A, \nu \in D} k_i^\nu = b < \infty.$$

Относительно уже введенной функции $\{f_i^\nu\}$, будем предполагать выполненным

Условие ограниченности. *Существует $d > 0$, такое, что из условия $\sup_{\nu \in D} |f_i^\nu - f_j^\nu| > d$ следует, что $p_{ij}(\nu) = 0$.*

Теорема 3.5. *Пусть выполняются неравенства*

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(k_i^\nu, \nu) f_j^\nu - f_i^\nu < -\varepsilon \tag{3.34}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$, всех $\nu \in D$ и для всех i, кроме некоторого конечного непустого множества B. Тогда цепи L^ν эргодичны для каждого $\nu \in D$, а стационарные вероятности $\pi_j(\nu)$ непрерывны по ν при $\nu \in D$ и любом $j \in A$.

Доказательству теоремы предпошлем две леммы. Пусть $\{\xi_i^\nu\}$ — последовательность случайных величин, соответствующих цепи L^ν.

$$f_{ij}^n(\nu) = P\{\xi_1^\nu \neq j, \ \ldots, \xi_{n-1}^\nu \neq j, \ \xi_n^\nu = j/\xi_0^\nu = i\}.$$

Лемма 3.2. *$f_{ij}^n(\nu)$ — непрерывные функции по $\nu (\nu \in D)$ при любом натуральном n и любых $i, j \in A$.*

Доказательство. Докажем лемму по индукции. Для $n = 1$ $f_{ij}^1(\nu) = p_{ij}(\nu)$ — непрерывная функция по ν при любых i, j. Предположим, что $f_{ij}^n(\nu)$ непрерывна по ν при любых $i, j \in A$. Воспользуемся формулой

$$f_{ij}^{n+1}(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(\nu) f_{kj}^n(\nu) - p_{ij}(\nu) f_{jj}^n(\nu).$$

Далее, так же как и в лемме 3.1 предыдущего параграфа, доказывается равномерная сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(\nu) f_{kj}^n(\nu)$, составленного из непрерывных функций. Из этого и следует непрерывность $f_{ij}^{n+1}(\nu)$.

Лемма 3.3. *Пусть выполняются условия теоремы 3.5. Тогда для любых заранее выбранных точек* $i_0 \in A$ *и* $\nu_0 \in D$ *существуют такие функции* $\{\tilde{k}_i^\nu\}$ *и* $\{\tilde{f}_i^\nu\}$, *что* $\sup\limits_{i \in A, \nu \in D} \tilde{k}_i^\nu = \tilde{b} < \infty$, *а условие ограниченности выполняется для функций* $\{\tilde{f}_i^\nu\}$ *с некоторой константой* $\tilde{d} > 0$, *и вместо неравенства* (3.34) *выполняется неравенство*

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\tilde{k}_i^\nu, \nu)\, \tilde{f}_j^\nu - \tilde{f}_i^\nu < -\varepsilon_1$$

для некоторого $\varepsilon_1 > 0$, *всех* $\nu \in D$ *и для всех* $i \in A$, *кроме* $i = i_0$.

Доказательство. Без потери общности можно положить $i_0 = 0$. Для произвольной точки $j \in B$ из предположения, что цепь L^{ν_0} имеет один существенный класс состояний, следует, что существует такое целое положительное число $\mathbf{r}_j(\nu_0)$ и $\varepsilon_1 > 0$, что $p_{j0}(r_j(\nu_0), \nu_0) > \varepsilon_1$. Так как $p_{ij}(n, \nu)$ — непрерывная функция по ν ($\nu \in D$; i, j, n — любые), то существует окрестность D_j точки ν_0, такая, что $p_{j0}(\mathbf{r}_j(\nu_0), \nu) > \varepsilon_2 = \varepsilon_1/2$ для любого $\nu \in \tilde{D}_j$. Положим

$$\tilde{D} = \bigcap_{j \in B} \tilde{D}_j,$$

$$\tilde{k}_j^\nu = \begin{cases} k_j^\nu, & j \bar{\in} B,\ \nu \in \tilde{D}, \\ r_j^{\nu_0}, & j \in B,\ \nu \in \tilde{D}, \end{cases}$$

$$\tilde{f}_j^\nu = \begin{cases} f_j^\nu, & j \neq 0,\ \nu \in \tilde{D}, \\ f_0^\nu - 2\dfrac{d\tilde{b}}{\varepsilon_2}, & j = 0,\ \nu \in \tilde{D}, \end{cases}$$

где $\tilde{b}$ определяется следующим образом:

$$\sup_{j \in A, \nu \in D} \tilde{k}_j^\nu = \tilde{b} < \infty, \quad \tilde{d} = d + 2\frac{d\tilde{b}}{\varepsilon_2}.$$

Для любого $i \bar{\in} B \cup 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{j \in A} p_{ij}(\tilde{k}_i^\nu, \nu)\, \tilde{f}_j^\nu - \tilde{f}_i^\nu < -\varepsilon \quad (\nu \in \tilde{D}). \tag{3.35}$$

Для $i \in B \setminus 0$ и $\nu \in \tilde{D}$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\tilde{k}_i^\nu, \nu)\, \tilde{f}_j^\nu - \tilde{f}_i^\nu = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\tilde{k}_i^\nu, \nu)\, f_j^\nu - p_{i0}(\tilde{k}_i^\nu, \nu)\,\frac{2d\tilde{b}}{\varepsilon_2} -$$

$$- f_i^\nu < f_i^\nu + d\tilde{k}_i^\nu - 2d\tilde{b} - f_i^\nu < -d\tilde{b}. \tag{3.36}$$

Таким образом, если положить $\tilde{\varepsilon} = \min(\varepsilon, d\tilde{b})$, окончательно имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(\tilde{k}_i^\nu, \nu)\, \tilde{f}_j^\nu - \tilde{f}_i^\nu < -\tilde{\varepsilon} \quad (\nu \in \tilde{D},\ i \neq 0). \tag{3.37}$$

Доказательство леммы закончено.

Доказательство теоремы 3.5. Эргодичность цепей L^ν ($\nu \in D$) следует из теоремы 1.5. Зафиксируем произвольную точку $i_0 \in A$. Без потери общности, пусть $i_0 = 0$. Докажем, что $\pi_0(\nu)$ — непрерывная функция по ν при $\nu \in D$. Возьмем произвольную точку $\nu_0 \in D$.

Из леммы 3.3 следует, что функции f_i^ν и k_i^ν можно так подправить, что для некоторой окрестности $\tilde{D}$ точки ν_0 выполняются неравенства (3.37). Можно считать, что $\tilde{f}_0^\nu < f_i^\nu$ для любых $i \in A$, $\nu \in \tilde{D}$, так как в противном случае этого легко добиться, уменьшая значения функции $\tilde{f}_0^\nu$, при этом неравенства (3.37) не нарушатся. Введем среднее время достижения нулевого состояния цепи L^ν

$$m_0(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^n(\nu).$$

Из эргодичности цепей L^ν ($\nu \in D$) следует, что $m_0(\nu)$ конечна, и

$$\pi_0(\nu) = 1/m_0(\nu).$$

Покажем, что $m_0(\nu)$ непрерывна по ν при $\nu \in D$. Как и в теореме 1.6, из последовательности случайных величин $\xi_0^\nu = 0, \xi_1^\nu, \ldots, \xi_n^\nu, \ldots$, соответствующих цепи L^ν, образуем случайную последовательность $\{S_n^\nu\}$, положив $S_n^\nu = f^\nu\{\xi_n^\nu\}$. Из последовательности $\{\xi_i^\nu\}$ образуем также случайную целочисленную последовательность $\{N_i^\nu\}$, положив $N_0^\nu = \tilde{k}^\nu(\xi_0^\nu)$; $N_i^\nu = N_{i-1}^\nu + \tilde{k}^\nu(\xi_{i-1}^\nu)$. Из равномерной ограниченности функции $\tilde{k}_i^\nu$ ($i \in A$, $\nu \in D$) следует

$$1 \leqslant N_{i+1}^\nu - N_i^\nu \leqslant \tilde{b} \text{ для любых } i \in A,\ \nu \in D$$

с вероятностью 1. Из неравенств (3.37) следует, что

$$M\left(S_{N_i}^\nu / S_{N_{i-1}}^\nu > \tilde{f}_0^\nu\right) < S_{N_{i-1}}^\nu - \varepsilon \qquad (3.38)$$

с вероятностью 1.

$$f_{00}^n(\nu) = P\{\xi_1^\nu \neq 0, \ldots, \xi_{n-1}^\nu \neq 0,\ \xi_n^\nu = 0/\xi_0^\nu = 0\} =$$
$$= P\{S_1^\nu > \tilde{f}_0^\nu, \ldots, S_{n-1}^\nu > \tilde{f}_0^\nu,\ S_n^\nu = \tilde{f}_0^\nu / S_0^\nu = \tilde{f}_0^\nu\}.$$

Поэтому, учитывая неравенство (3.38) и применяя лемму 1.2, получаем следующую оценку для $f_{00}^n(\nu)$:

$$f_{00}^n(\nu) < c \exp\{-\delta n\}, \quad n \in A,\ \nu \in \tilde{D}, \qquad (3.39)$$

где c, $\delta > 0$ некоторые константы, не зависящие от ν. Учитывая оценку (3.39), заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^n(\nu)$, составленный из непрерывных функций (см. лемму 3.2), сходится равномерно по ν при $\nu \in \tilde{D}$. Поэтому сумма ряда $m_0(\nu)$ есть непрерывная функция по ν при $\nu \in D$, что, в свою очередь, влечет непрерывность $\pi_0(\nu)$ по ν при $\nu \in \tilde{D}$. Остается отметить, что точку $i = 0$ и $\nu_0 \in D$ мы выбрали произвольно. Поэтому стационарные вероятности $\pi_j(\nu)$ являются непрерывными функциями параметра ν при $\nu \in D$ и любом $j \in A$. Доказательство теоремы закончено.

§ 3. Непрерывность случайных блужданий в $\mathbf{Z}_+^n$

Рассмотрим семейство однородных неприводимых непериодических цепей Маркова $\{L^\nu\}$ с дискретным временем, множеством состояний которых является множество $\mathbf{Z}_+^n = \{(z_1, \ldots, z_n) : z_i \geqslant 0,$ целые$\}$ ($\nu \in D$, где D — некоторое открытое подмножество действительной прямой). $p_{\alpha\beta}(t, \nu)$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+^n)$ — вероятность перехода из точки α в точку β за t шагов в цепи L^ν.

Относительно семейства случайных блужданий $\{L^\nu\}$ будем предполагать выполненными условия однородности и ограниченности скачков равномерно по $\nu \in D$. Пусть B^Λ_{ct} — множества, введенные в § 1 гл. II.

Условие однородности. *Существует такое $c > 0$, что для любого Λ и любого вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, такого, что*

$$a_i \geqslant 0; \quad a_j = 0 \text{ для } j \bar{\in} \Lambda$$

и для всех $\alpha \in B^\Lambda_{cc} \cap \mathbf{Z}^n_+$ имеет место

$$p_{\alpha\beta}(\nu) = p_{\alpha+a, \beta+a}(\nu)$$

для любого $\beta \in \mathbf{Z}^n_+$ и $\nu \in D$.

Условие ограниченности скачков. *Для любого α число таких β, что $\sup\limits_{\nu \in D} p_{\alpha\beta}(\nu) > 0$, конечно.*

В силу условия однородности это эквивалентно следующему: *существует такое $d > 0$, что из условия $\|\alpha - \beta\| > d$ следует, что $P_{\alpha\beta}(\nu) = 0$ для любого ν.*

Как и прежде, будем предполагать, что $p_{\alpha\beta}(1, \nu)$ являются непрерывными функциями по ν при любых $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^n_+$ и $\nu \in D$. Для каждой цепи L^ν строим указанным в § 1 гл. II способом векторное поле V^ν. Получим семейство векторных полей $\{V^\nu\}$.

Будем говорить, что *для семейства $\{V^\nu\}$ $(\nu \in \tilde{D} \subset D)$ выполняется условие $\bar{B}$, если для некоторых $\delta, b, p > 0$ существует такая функция $f(\alpha)$ $(\alpha \in R^n_+)$, для которой выполняются следующие условия:*

1. $f(\alpha) > 0, \quad \alpha \in R^n_+$.

2. $f(\alpha) - f(\beta) \leqslant b \|\alpha - \beta\|$ *для любых* $\alpha, \beta \in R^n_+$.

3. *Для любого Λ либо все $L^\Lambda(\nu)$ $(\nu \in \tilde{D})$ эргодичны, либо все не эргодичны.*

4. *Для любого Λ, такого, что $L^\Lambda(\nu)$ эргодична и для $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$ и всех $\alpha \in B^\Lambda \cap B^\Lambda_{pp}$*

$$\sup_{\nu \in \tilde{D}} (f(\alpha + v^\nu(\alpha)) - f(\alpha)) < -\delta.$$

Теорема 3.6. *Если существует такое множество $U \subset D$, что для семейства векторных полей $\{V^\nu\}$ $(\nu \in U)$ выполняется условие $\bar{B}$, то для всех $\nu \in U$ цепи L^ν эргодичны, а стационарные вероятности $\pi_\alpha(\nu)$ непрерывны по ν при любом $\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$ и $\nu \in U$.*

Доказательство. Пусть существуют такое множество $U \subset D$ и функция $f(\alpha)$ $(\alpha \in R^n_+)$, что условие $\bar{B}$ выполняется. Положим $f^\nu \equiv f$, т. е. для каждого $\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$ и $\nu \in U$ $f^\nu(\alpha) = f(\alpha)$. Из доказательства теоремы 2.1 следует, что для любого $\nu \in U$ существует такая функция $m^\nu(\alpha)$, что

$$\sup_{\alpha \in \mathbf{Z}^n_+} m^\nu(\alpha) = m^\nu < \infty$$

и для всех $\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$, кроме некоторого конечного множества C^ν, выполняется неравенство

$$\sum_{\beta \in \mathbf{Z}^n_+} p_{\alpha\beta}(m(\alpha), \nu) f^\nu_\beta - f^\nu_\alpha < -\varepsilon_1(\nu) \tag{3.40}$$

для некоторого $\varepsilon_1(\nu)>0$, причем из самого метода доказательства теоремы 2.1 будет следовать, что

$$\sup_{\nu\in U} m^\nu < \infty, \quad \inf_{\nu\in U} \varepsilon_1(\nu) > 0, \tag{3.41}$$

$\bigcup_{\nu\in U} C^\nu$ — есть конечное множество.

Из выполнения системы неравенств (3.40) и условий (3.41) заключаем, что выполняются все условия теоремы 3.5. Следовательно, все цепи L^ν эргодичны для $\nu\in U$, а стационарные вероятности $\pi_\alpha(\nu)$ непрерывны по ν при $\nu\in U$ и любом $\alpha\in\mathbf{Z}_+^n$. Теорема доказана.

Для случайного блуждания L в $\mathbf{Z}_+^n$, где $n\leqslant 3$, в § 2 гл. II указан способ построения функции $f(\alpha)$, удовлетворяющей условию B, что приводит к формулировке условий эргодичности через характеристики случайных блужданий меньших размерностей. Мы сейчас докажем теорему, показывающую, что выполнение этих условий эргодичности для цепи L^{ν_0} обеспечивает непрерывность стационарных вероятностей в некоторой окрестности точки ν_0 для семейства цепей $\{L^\nu\}$. Сформулируем теорему для случайных блужданий в $\mathbf{Z}_+^3$ (совершенно аналогично это можно сделать и для $\mathbf{Z}_+^1$ и для $\mathbf{Z}_+^2$).

Теорема 3.7. *Пусть для цепи Маркова L^{ν_0}, где $\nu_0\in D$, выполняются условия теоремы 2.4, обеспечивающие эргодичность цепи L^{ν_0}. Тогда существует такая окрестность U точки $\nu_0 (U\subset D)$, что для всех $\nu\in U$ цепи L^ν эргодичны, а стационарные вероятности $\pi_\alpha(\nu)$ непрерывны по ν при любом $\alpha\in\mathbf{Z}_+^3$ и $\nu\in U$.*

Доказательство. Из доказательства теоремы (2.4) следует существование такой функции $f(\alpha)$ $(\alpha\in R_+^3)$, что выполняется условие B, введенное в § 1 гл. II. Функция $f(\alpha)$ $(\alpha\in R_+^3)$ удовлетворяет условиям

1. $f(\alpha)>0, \quad \alpha\in R_+^3$.
2. $|f(\alpha)-f(\beta)|\leqslant b\|\alpha-\beta\| \quad \alpha, \beta\in R_+^3$,

где $b>0$ — некоторая константа. Выполнение условия B обеспечивает существование такой натуральнозначной функции $m(\alpha)$ $(\alpha\in\mathbf{Z}_+^3)$, что

$$\sup_{\alpha\in\mathbf{Z}_+^3} m(\alpha) = m < \infty$$

и для всех $\alpha\in\mathbf{Z}_+^3$, кроме некоторого конечного множества R, выполняется неравенство

$$\sum_{\beta\in\mathbf{Z}_+^3} p_{\alpha\beta}(m(\alpha), \nu_0) f_\beta - f_\alpha < -\varepsilon \tag{3.42}$$

для некоторого $\varepsilon>0$. Из условий однородности и ограниченности скачков для семейства случайных блужданий $\{L^\nu\}$ следует, что $p_{\alpha\beta}(t, \nu)$ является непрерывной функцией по ν при $\nu\in D$ равномерно по $\alpha, \beta\in\mathbf{Z}_+^3$ (t — любое фиксированное натуральное число). Поэтому, учитывая свойства 1 и 2 функции $f(\alpha)$, заключаем, что существует такая окрестность U точки ν_0, что для всех $\nu\in U$ и $\alpha\in\mathbf{Z}_+^3\setminus B$ выполняются неравенства

$$\sum_{\beta\in Z_+^3} p_{\alpha\beta}(m(\alpha), \nu) f_\beta - f_\alpha < -\varepsilon/2. \tag{3.43}$$

Из свойств функции $f(\alpha)$ и равномерной ограниченности скачков семейства случайных блужданий $\{L^\nu\}$ следует существование такого $d>0$, что из условия $\sup\limits_{\nu\in D} |f_j^\nu - f_i^\nu| > d$ следует, что $p_{ij}(\nu) = 0$. Таким образом, выполняются все условия теоремы 3.5. Следовательно, цепи L^ν эргодичны для каждого $\nu \in U$, а стационарные вероятности $\pi_\alpha(\nu)$ непрерывны по ν при $\nu\in U$ и любом $\alpha \in \mathbf{Z}_+^3$. Теорема доказана.

ГЛАВА IV. АНАЛИТИЧНОСТЬ СЕМЕЙСТВА СЧЕТНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА И СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

§ 1. Основная теорема об аналитичности семейства счетных цепей Маркова

Рассмотрим семейство однородных неприводимых непериодических цепей Маркова $\{L^\nu\}$ с дискретным временем и счетным множеством состояний $A = \{0, 1, ..., n, ...\}$, $\nu\in D$, где D — некоторая окрестность нуля действительной оси. Пусть $\mathfrak{X}$ (A, Σ) — банахово пространство вещественных счетно-аддитивных мер на (A, Σ) с нормой, равной полной вариации (Σ — σ-алгебра всех подмножеств A). Легко видеть, что $\mathfrak{X}$ $(A, \Sigma) \equiv l_1(A)$.

Обозначим через $B(\mathfrak{X})$ банахову алгебру линейных ограниченных операторов в $\mathfrak{X}$. Тогда любая цепь Маркова L^ν на A определяет оператор $P_\nu \in B(\mathfrak{X})$ с нормой, равной 1.

Определение. *Множество $M \subset \mathfrak{X}$ (A, Σ) будем называть множеством равномерной сходимости для оператора $P\in B(\mathfrak{X})$, если $PM\subset M$ и если существует такая функция $\varphi(n)$, $n=1, 2, 3 ...$,*

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) < \infty \tag{4.1}$$

и такой элемент $y\in M$, что

$$\| P^n x - y \| < \varphi(n) \tag{4.2}$$

выполняется для всех n и всех $x\in M$.

Теорема 4.1. *Пусть $P_\nu = P(\nu)$ аналитически зависит от ν как функция со значениями в банаховой алгебре операторов $B(\mathfrak{X})$ при $\nu\in D$ и выполняются следующие три условия:*

1. *Для оператора P_0 существуют два множества равномерной сходимости M_1 и M_2, причем $M_1\subset M_2$ и $\inf\limits_{x\in M_2} \|x\| > 0$.*

2. *Существует $\nu_0 > 0$, что при $|\nu| < \nu_0$*

$$P_\nu x \in M_2$$

для любого $x\in M_1$.

3. *Существует $\nu_1 > 0$, такое, что при $|\nu| < \nu_1$*

$$x_1 + \frac{(P_\nu - P_0)\, x_2}{\| P_\nu - P_0 \|} \in M_2$$

для любых $x_1, x_2 \in M_1$.

Тогда существует такое $\nu_2>0$, *что при* $|\nu|<\nu_2$ *для любого* $x\in M_1$ $\lim\limits_{n\to\infty} P^n(\nu)x=r(\nu)$ *существует и аналитически зависит от* ν.

Доказательство. Для любого $B\subseteq \mathfrak{X}(A,\Sigma)$ и $G\in B(\mathfrak{X})$ обозначим

$$\|G\|_B=\sup_{0\neq x\in B}\frac{\|Gx\|}{\|x\|}.$$

Из условий теоремы следует, что существуют такая функция $\varphi(n)$ и элемент $y\in M_2$, что для любого $x\in M_2$ выполняются условия (4.1) и (4.2).

Лемма 4.1. *В условиях теоремы* 4.1 *существует такая константа* $c>0$, *что*

$$\|P_0^n(P_\nu-P_0)\|_{M_1}\leqslant c\varphi(n)\,\|P_\nu-P_0\|. \tag{4.3}$$

Доказательство. Возьмем произвольный $x\in M_1$. Положим $P_\nu x=z_1$, $P_0x=z_2$.

$$\|P_0^n(P_\nu-P_0)x\|=\|P_0^n(z_1-z_2)\|=\|P_0^n(z_2\|P_\nu-P_0\|-z_2\|P_\nu-$$
$$-P_0\|+(z_1-z_2))\|\leqslant\|P_\nu-P_0\|\,\|P_0^n(z_2-y)\|+\|P_\nu-P_0\|\times$$
$$\times\left\|P_0^n\left(z_2+\frac{z_2-z_1}{\|P_\nu-P_0\|}-y\right)\right\|\leqslant\|P_\nu-P_0\|\,\varphi(n)+\|P_\nu-P_0\|\,\varphi(n)=$$
$$=2\cdot\varphi(n)\,\|P_\nu-P_0\|. \tag{4.4}$$

При выводе неравенства (4.4) мы использовали то, что $z_2=P_0x$ и z_2+ $+\frac{z_2-z_1}{\|P_\nu-P_0\|}$ по предположению принадлежат множеству равномерной сходимости M_2. Далее, используя (4.4), имеем

$$\|P_0^n(P_\nu-P_0)\|_{M_1}=\sup_{x\in M_1}\frac{\|P_0^n(P_\nu-P_0)x\|}{\|x\|}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2\varphi(n)\,\|P_\nu-P_0\|}{\|x\|}\leqslant c\varphi(n)\,\|P_\nu-P_0\|.$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Положим

$$Q=Q(\nu)=P_\nu-P_0. \tag{4.5}$$

Обозначим $Q^{(k,i_1,i_2,\ldots,i_k)}=P_0^{i_1}QP_0^{i_2}Q\ldots P_0^{i_k}Q$, где $k\geqslant1$, $i_j\geqslant0$ $(j=1,2,\ldots,k)$, δ — набор $(k,i_1,\ldots,i_k)$, причем $Q^{\varnothing}=1$. Пусть $r_0=P_0^\infty x=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}P_0^n(x)$ $(x\in M_2)$. Существование и единственность r_0 очевидным образом следует из условий (4.1) и (4.2) для множества M_2. Докажем, что $r_\nu=$ $=P_\nu^\infty x=\lim\limits_{n\to\infty}P_\nu^\infty x$ существует для всех $x\in M_1$, единствен и представим в виде

$$r_\nu=\sum_\delta Q^\delta r_0=\sum_{\substack{k\geqslant1\\ i_1,i_2,\ldots,i_k\geqslant0}}Q^{(k,i_1,i_2,\ldots,i_k)}\cdot r_0+r_0. \tag{4.6}$$

Причем последний ряд абсолютно сходится в $\mathfrak{X}(A,\Sigma)$ (r_ν не обязательно принадлежит M_2). Из леммы 4.1 следует, что

$$\| P_0^n Q \|_{M_1} \leqslant c\varphi(n) \| P_\nu - P_0 \|. \tag{4.7}$$

Поэтому ряд (4.6) мажорируется числовым рядом

$$\sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ i_1, i_2, \ldots, i_k}} \varphi(i_1) \ldots \varphi(i_k) c^k \| P_\nu - P_0 \|^k + 1 = \sum_{k=0}^{\infty} (\| P_\nu - P_0 \| \cdot c\varphi)^k. \tag{4.8}$$

Ряд (4.8) сходится, если $\|P_\nu - P_0\| < 1/c\varphi$. Следовательно, и ряд (4.6) сходится, причем абсолютно. Докажем теперь равенство (4.6). Для этого оценим разность $\left\| \sum_\delta Q^\delta P_0^\infty - (P_0 + Q)^n \right\|_{M_1}$. Очевидно следующее равенство:

$$(P_0 + Q)^n = P_0^n + P_0^{n-1} Q + P_0^{n-2} Q P_0 + \ldots + P_0^{n-k} Q P_0^{k+1} + \\ + \ldots + QP^{n-1} + \ldots . \tag{4.9}$$

Поэтому

$$\left\| \sum_\delta Q^\delta P_0^\infty - (P_0 + Q)^n \right\|_{M_1} \leqslant \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_k < n/2}} \| Q^\delta \| \| P_0^\infty - P_0^{n - i_1 - \ldots - i_k} \| + \\
+ \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_k \geqslant n/2}} \| Q^\delta \| \| P_0^\infty \| + \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ n \geqslant i_1 + \ldots + i_k \geqslant n/2}} \| Q^\delta \| \leqslant \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ i_1 + \ldots + i_k < n/2}} \| Q^\delta \| \times \\
\times \varphi(n - i_1 - i_2 - \ldots - i_k) + 2 \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ i_1 + \ldots + i_k \geqslant n/2}} \| Q^\delta \| \leqslant \\
\leqslant \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ i_1 + \ldots + i_k < n/2}} \| Q^\delta \| \varphi(n - i_1 - \ldots - i_k) + \sum_{\substack{k < \sqrt{n/2} \\ i_1 + \ldots + i_k > n/2}} \| Q^\delta \| + \\
+ \sum_{\substack{k \geqslant \sqrt{n/2} \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_k \geqslant n/2}} \| Q^\delta \| \leqslant \max_{n > m > n/2} \varphi(m) \sum_{k=0}^{\infty} (\| P_\nu - P_0 \| 2\varphi)^k + \\
+ 2 \sum_{\substack{k < \sqrt{n/2} \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_k \geqslant n/2}} \varphi(i_1) \ldots \varphi(i_k) c^k \| P_\nu - P_0 \|^k + \\
+ 2 \sum_{\substack{k \geqslant \sqrt{n/2} \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_k \geqslant n/2}} \varphi(i_1) \ldots \varphi(i_k) c^k \| P_\nu - P_0 \|^k \leqslant \max_{n > m > n/2} \varphi(m) \times \\
\times \sum_{k=0}^{\infty} (\| P_\nu - P_0 \| 2\varphi)^k + \sum_{\substack{k < \sqrt{n/2} \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_k > n/2}} \varphi(i_1) \ldots \varphi(i_k) c^k \| P_\nu - P_0 \|^k + \\
+ \sum_{k > \sqrt{n/2}} (\| P_\nu - P_0 \| c\varphi)^k. \tag{4.10}$$

Первая и третья суммы правой части неравенства (4.10) стремятся к нулю при $n \to \infty$ благодаря сходимости ряда (4.8) и стремлению к нулю $\varphi(n)$ при $n \to \infty$. Каждый член второй суммы содержит в качестве сомножителя хотя бы один член $\varphi(m)$ с $m > \sqrt{n/2}$. Поэтому вторая сумма ограничивается суммой $2 \max\limits_{m > \sqrt{n/2}} \varphi(m) \sum\limits_{k < \sqrt{n/2}} \| P_\nu - P_0 \| (c\varphi)^k$, которая стремится к нулю при $n \to \infty$. Тем самым формула (4.6) доказана.

Нам осталось доказать аналитичность вектора $r_\nu = \lim_{n\to\infty} P_\nu^n x$ ($x\in \in M_1$). Из абсолютной сходимости ряда (4.6) следует аналитичность r_ν по Q при $\|Q\|$, меньшей некоторого q_0. Q, в свою очередь, аналитическая функция по ν при $\nu\in D$. Поэтому можно указать такое ν_2, что при $|\nu|<\nu_2$ $\|Q_\nu\|<q_0$, что влечет за собой аналитичность r_ν по ν при $|\nu|<\nu_2$. Теорема доказана.

Как показывает доказанная теорема, для доказательства аналитичности семейства цепей Маркова требуется построение множества равномерной сходимости M для оператора P_0. Важным классом цепей Маркова является класс цепей с экспоненциальной сходимостью (см. [6 с. 386]). Напомним, что цепь Маркова обладает экспоненциальной сходимостью, если существует такая функция множеств $\bar{P}(S)$ и такие положительные константы a, $b>0$, что для достаточно больших n

$$|p^n(x, S) - \bar{P}(S)| \leqslant a \exp\{-bn\}$$

для любых x и S. Цепи Маркова с конечным множеством состояний удовлетворяют условию экспоненциальной сходимости. В [5 и 6] приведены условия экспоненциальной сходимости для счетных цепей Маркова. Для цепей Маркова с экспоненциальной сходимостью в качестве множества равномерной сходимости M можно взять все множество вероятностных мер пространства $\mathfrak{X}(A, \Sigma)$. Поэтому для семейства цепей Маркова $\{L^\nu\}$ с экспоненциальной сходимостью из аналитичности оператора P_ν следует аналитичность стационарных вероятностей.

Однако наиболее интересные в приложениях счетные цепи Маркова не удовлетворяют условию экспоненциальной сходимости и даже более слабым условиям. Например, легко показать, что для процесса гибели — размножения с отражающим экраном в нуле, т. е. для цепи Маркова с множеством состояний $\mathbf{Z}_+^1$ и переходными вероятностями $p_{i,\,i-1} = p$, $p_{i,\,i+1} = 1-p$, M (все множество вероятностных мер) не обладает свойством равномерной сходимости ни для какой функции $\varphi(n)$.

В следующем параграфе мы приведем метод построения множества равномерной сходимости для класса цепей Маркова, на которые наложены некоторые условия в терминах «пробных функций». Эти условия, в частности, будут выполняться для случайных блужданий в $\mathbf{Z}_+^n$.

§ 2. Условия аналитичности семейства цепей Маркова в терминах «пробных функций»

Пусть рассматривается семейство марковских цепей $\{L^\nu\}$, $\nu\in D$, на множестве $A=\{0, 1, ..., n, ...\}$ то же, что и в предыдущем параграфе. Предположим, что на множестве A заданы семейство вещественных функций $f^\nu = \{f_i^\nu\}$ и семейство целочисленных положительных функций $k^\nu = \{k_i^\nu\}$ ($i \in A$, $\nu \in D$), удовлетворяющих условиям:

1. $\inf\limits_{i\in A,\ \nu\in D} f_i^\nu \geqslant 0$; $\sup\limits_{i\in A,\ \nu\in D} k_i^\nu = b < \infty$;

2. Ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \exp\{-b_1 f_i^\nu\}$ при любом фиксированном $b_1 > 0$ сходится равномерно по $\nu\in D$;

2′. Условие 2 выполнено, если существуют такие c, $\gamma>0$, что $f_i^\nu > c i^\gamma$ для любого $\nu\in D$;

3. Существует такое $d>0$, что из выполнения условия $|f_i^\nu - f_j^\nu| > d$ следует, что $p_{ij}(\nu) = 0$ $(\nu \in D)$.

Как и прежде, $p_{ij}(t, \nu)$ — вероятность перехода из точки i в точку j за t шагов в цепи L^ν.

Теорема 4.2. *Пусть оператор P_ν, определяемый цепью L^ν, аналитически зависит от ν при $\nu \in D$. Пусть существуют такие n и $\delta>0$, что для любого $i \in A$ и любого* $j \in V_i = \left\{ j : \sup\limits_{\nu \in D} p_{ji}(\nu) > 0 \right\}$

$$P_{ji}(n, 0) > \delta, \tag{4.11}$$

и выполняются неравенства

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(k_i^\nu, \nu) f_j^\nu - f_i^\nu < -\varepsilon \tag{4.12}$$

для некоторого $\varepsilon>0$, всех $\nu \in D$ и для всех i, кроме некоторого конечного непустого множества B. Тогда цепи L^ν эргодичны для каждого $\nu \in D$, а стационарные вероятности $\pi_j(\nu)$ аналитичны по ν при $|\nu|$, меньшем некоторого ν_0 и любом $j \in A$.

Доказательство. Эргодичность цепей L^ν и непрерывность стационарных вероятностей $\pi_j(\nu)$ $(j \in A;\ \nu \in D)$ следует из теоремы 3.5. Пусть $\xi_0^\nu, \xi_1^\nu, \ldots, \xi_n^\nu, \ldots$ — последовательность случайных величин, соответствующих цепи L^ν.

Введем

$$f_{ij}^n(\nu) = P\{\xi_1^\nu \neq j,\ \xi_2^\nu \neq j,\ \ldots,\ \xi_{n-1}^\nu \neq j,\ \xi_n^\nu = j / \xi_0^\nu = i\},$$

$$_k p_{ij}(\nu) = P\{\xi_1^\nu \neq k,\ \xi_2^\nu \neq k,\ \ldots,\ \xi_{n-1}^\nu \neq k,\ \xi_n^\nu = j / \xi_0^\nu = i\},$$

$$_k P_{ij}^*(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_k P_{ij}^n(\nu).$$

В теореме 3.5 доказывается оценка

$$f_{00}^n(\nu) < c_1 \exp\{-\delta_1 n\} \tag{4.13}$$

для некоторых c_1, $\delta_1>0$ и любых $n \in A$, $\nu \in D$. Совершенно аналогично доказывается формула

$$_0P_{0j} < c_1 \exp\{-\delta_1 n\}. \tag{4.14}$$

Для удобства доказательство теоремы разобьем на серию лемм.

Лемма 4.2.

$$\pi_j(\nu) < c_2 \exp\{-\delta_2 f_i^\nu\} \tag{4.15}$$

для некоторых c_2, $\delta_2>0$ и любых $i \in A$, $\nu \in D$.

Доказательство. Для неприводимой непериодической возвратной цепи L^ν справедлива формула (см. [1 или 8])

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=0}^{m} p_{ij}(n, \nu)}{\sum\limits_{n=0}^{m} p_{ii}(n, \nu)} = {}_iP_{ij}^*(\nu). \tag{4.16}$$

Для эргодической цепи эта формула превращается в следующую:

$$\frac{\pi_j(\nu)}{\pi_i(\nu)} = {}_ip_{ij}^*(\nu). \tag{4.17}$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\pi_j(\nu) < {}_0p^*_{0j}(\nu), \tag{4.18}$$

$$ {}_0P^*_{0j}(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_0P^n_{0j}(\nu) = \sum_{n=1}^{[f^\nu_j/d]} {}_0p^n_{0j}(\nu) + \sum_{n=[f^\nu_j/d]}^{\infty} {}_0p^n_{0j}(\nu). \tag{4.19}$$

Первая сумма в правой части равенства (4.19) равна нулю, что следует из условия 3 теоремы. Используя оценку (4.14), получаем, что существуют такие константы c_2, $\delta_2>0$, что

$$\sum_{n=[f^\nu_j/d]}^{\infty} {}_0p^n_{0j}(\nu) < c_2 \exp\{-\delta_2 f^\nu_j\}. \tag{4.20}$$

Тем самым лемма 4.2. доказана.

Лемма 4.3. *Существуют такие константы* c_3, $\delta_3>0$, *что*

$$| p_{00}(n, \nu) - \pi_0(\nu) | < c_3 \exp\{-\delta_3 n\} \tag{4.21}$$

для любых $n\in A$, $\nu\in D$.

Доказательство. Введем производящие функции

$$F^\nu_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n_{ij}(\nu) z^n, \tag{4.22}$$

$$\mathbf{P}^\nu_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}(n, \nu) z^n. \tag{4.23}$$

Используя соотношение $p_{ii}(n, \nu) = \sum_{s=1}^{n} f^s_{ii}(\nu) p_{ii}(n-s, \nu)$, получаем для производящих функций соотношение

$$\mathbf{P}^\nu_{ii}(z) = \frac{1}{1-F^\nu_{ii}(z)} \quad \text{или для } i=0$$

$$\mathbf{P}^\nu_{00}(z) = \frac{1}{1-F^\nu_{00}(z)}. \tag{4.24}$$

Из оценки (4.13) следует, что $F^\nu_{00}(z)$ аналитична по z при $|z|<1-\sigma$ для некоторого $\sigma>0$ и любом $\nu\in D$. Кроме того, $|F^\nu_{ii}(z)|<1$ при $|z|=1$, $z\neq 1$, так как наибольший общий делитель k такой, что $f^k_{00}(\nu)\neq 0$, есть 1. Существует окрестность U точки $z=1$, такая, что в ней $F^\nu_{00}(z)=1$ только при $z=1$, поэтому для некоторого $\sigma_1>0$ при $|z|<1+\sigma_1$ больше нет корней уравнения $F^\nu_{00}(z)-1=0$. Следовательно, $\mathbf{P}^\nu_{00}(z)=\frac{1}{1-F^\nu_{00}(z)}$ — мероморфная функция при $|z|<1+\sigma_1$ и $z=1$ ее единственный полюс 1-го порядка (см. [19, с. 237]). Вычет $\mathbf{P}^\nu_{00}(z)$ при $z=1$ равен

$$\operatorname*{res}_{z=1} \mathbf{P}^\nu_{00}(z) = \operatorname*{res}_{z=1} \frac{1}{1-F^\nu_{00}(z)} = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{1-F^\nu_{00}(z)} = -\lim_{z\to 1} \frac{1}{\dfrac{1-F^\nu_{00}(z)}{1-z}} =$$

$$= -\frac{1}{\left.\dfrac{dF^\nu_{00}(z)}{dz}\right|_{z=1}} = -\frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{f^n_{00}(\nu)\cdot n}} = -\pi^\nu_0.$$

Тогда $\widetilde{\mathbf{P}}^\nu_{00}(z) = \mathbf{P}^\nu_{00}(z) - \frac{\pi^\nu_0}{1-z}$ голоморфна при $|z| < 1-\varepsilon_2$. А так как

$\widetilde{\mathbf{P}}^{\nu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(p_{00}(n,\ \nu)-\pi_0)\,z^n$, то из этого заключаем, что существуют такие константы $c_3,\ \delta_3>0$, что

$$|\ p_{00}(n,\ \nu)-\pi_0(\nu)\ |<c_3\exp\{-\delta_3 n\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Существуют такие константы* $\sigma,\ c_4,\ \delta_4>0$, *что*

$$|\ p_{i0}(n,\ \nu)-\pi_0(\nu)\ |<c_4\exp\{-\delta_4 n\} \tag{4.25}$$

для любого $\nu\in D$, *любого* $i\in A$ *и* $n>\sigma f_i^{\nu}$.

Доказательство. Используя лемму 1.2, аналогично оценке (4.13) получаем, что существуют такие константы $b_1,\ a_1,\ \sigma_1>0$, что

$$f_{i0}^{n}(\nu)<b_1\exp\{-a_1\cdot n\} \tag{4.26}$$

для любого $\nu\in D$, любого $i\in A$ и $n>\sigma_1\cdot f_i^{\nu}$.

$$p_{i0}(n,\ \nu)=\sum_{r=1}^{n}f_{i0}^{n-r}(\nu)\,p_{00}(r,\ \nu). \tag{4.27}$$

Из (4.27) следует

$$|\ p_{i0}(n,\ \nu)-\pi_0(\nu)\ |\leqslant\sum_{r=1}^{n}\ |\ p_{00}(r,\ \nu)-\pi_0(\nu)\ |\ \cdot f_{i0}^{n-r}(\nu)+\pi_0\sum_{r=n+1}^{\infty}f_{i0}^{r}(\nu). \tag{4.28}$$

Возьмем $\sigma>\sigma_1$ и пусть $n>\sigma f_i^{\nu}$. Оценим правую часть неравенства (4.28).

1^0. Пусть $r<\varepsilon_1 n$, где $(1-\varepsilon_1)\sigma>\sigma_1$. Тогда $(n-r)>(1-\varepsilon_1)\,n>\sigma_1 f_i^{\nu}$. Поэтому, используя (4.26), получаем

$$f_{i0}^{n-r}(\nu)<b_1\exp\{-a_1(n-r)\}<b_1\cdot\exp\{-a_1(1-\varepsilon_1)\,n\}.$$

2^0. Пусть теперь $r\geqslant\varepsilon_1 n$. Тогда из леммы 2 следует, что

$$|\ p_{00}(r,\ \nu)-\pi_0(\nu)\ |<c_3\exp\{-\delta_3 r\}<c_3\exp\{-\delta_3\varepsilon_1 n\}.$$

Объединяя оба случая, имеем

$$\sum_{r=1}^{n}|\ p_{00}(r,\ \nu)-\pi_0(\nu)\ |\ f_{i0}^{n-r}(\nu)<nb_2\exp\{-a_2 n\} \tag{4.29}$$

для любого $n>\sigma f_i^{\nu}$ и некоторых $b_2,\ a_2>0$. Из (4.26) следует

$$\pi_0\sum_{r=n+1}^{\infty}f_{i0}^{r}(\nu)<b_3\cdot\exp\{-a_3 n\}. \tag{4.30}$$

Из (4.29) и (4.30) следует, что существуют константы $c_4,\ \delta_4>0$, такие, что выполняется (4.25) для любого $\nu\in D$, любого $i\in A$ и $n>\sigma f_i^{\nu}$. Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Существуют такие константы* $\sigma_1,\ c_5,\ \delta_5>0$, *что*

$$|\ p_{ij}(n,\ \nu)-\pi_j(\nu)\ |<c_5\exp\{-\delta_5 n\} \tag{4.31}$$

для любого $\nu\in D$; $i,\ j\in A$ *и* $n>\sigma_1 f_i^{\nu}$.

Доказательство.

$$p_{ij}(n,\ \nu)=\sum_{r=1}^{n}p_{i0}(r,\ \nu)\ {}_0p_{0j}^{n-r}(\nu)+{}_0p_{ij}^{n}(\nu). \tag{4.32}$$

$$| p_{ij}(n, \nu) - \pi_j(\nu) | = \left| \sum_{r=1}^{n} (p_{i0}(r, \nu) - \pi_0(\nu))\, {}_0p_{0j}^{n-r}(\nu) - \right.$$

$$\left. - \pi_0 \sum_{r=n-1}^{\infty} {}_0p_{0j}^{r} + {}_0p_{ij}^{n}(\nu) \right| \leqslant \sum_{r=1}^{n} | p_{i0}(r, \nu) - \pi_0(\nu) |\, {}_0p_{0j}^{n-r}(\nu) +$$

$$+ \pi_0 \sum_{r=n+1}^{\infty} {}_0p_{0j}^{r}(\nu) + {}_0p_{ij}^{n}(\nu). \quad (4.33)$$

Из неравенства (4.33), используя лемму 4.4 и неравенство (4.14), как и в лемме 4.4, доказывается оценка (4.31).

Лемма 4.6. *Существуют такие константы* σ_2, c_6, $\delta_6 > 0$, *что*

$$\sum_{j=0}^{\infty} | p_{ij}(n, \nu) - \pi_j(\nu) | < c_6 \exp\{-\delta_6 n\} \quad (4.34)$$

для любого $\nu \in D$, *любых* i, $j \in A$ *и* $n > \sigma_2 f_i^{\nu}$.

Доказательство.

$$\sum_{j=0}^{\infty} | p_{ij}(n, \nu) - \pi_j(\nu) | = \sum_{j: f_j^{\nu} > f_i^{\nu} + nd} | p_{ij}(n, \nu) - \pi_j(\nu) | +$$

$$+ \sum_{j: f_j^{\nu} < f_i^{\nu} + nd} | p_{ij}(n, \nu) - \pi_j(\nu) |. \quad (4.35)$$

Из ограниченности скачков случайных блужданий следует, что первая сумма правой части (4.35) равна нулю. Из леммы 4.5 следует, что каждое слагаемое второй суммы меньше, чем $c_5 \exp\{-\delta_5 n\}$, если только $n > \sigma_1 f_i^{\nu}$. Пусть M^{ν} равно числу таких j, что

$$f_j^{\nu} < f_i^{\nu} + nd. \quad (4.36)$$

Пусть j удовлетворяет (4.36), тогда

$$c j^{\nu} < f_j^{\nu} < f_i^{\nu} + nd,$$

$$j < \left[\frac{1}{c} (f_i^{\nu} + nd) \right]^{1/\nu} < \left[\frac{1}{c} \left(\frac{n}{\sigma_1} + nd \right) \right]^{1/\nu} = n^{1/\nu} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{1}{\sigma_1} + d \right) \right]^{1/\nu}.$$

Следовательно,

$$M^{\nu} < n^{1/\nu} b_1, \quad (4.37)$$

где $b_1 = \left[\frac{1}{c} \left(\frac{1}{\sigma_1} + d \right) \right]^{1/\nu}$. Таким образом,

$$\sum_{j: f_j^{\nu} < f_i^{\nu} + nd} | p_{ij}(n, \nu) - \pi_j(\nu) | < n^{1/\nu} b_1 c_5 \exp\{-\delta_5 n\}.$$

Поэтому существуют такие константы σ_2, c_6, $\delta_6 > 0$, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} | p_{ij}(n, \nu) - \pi_j(\nu) | < c_6 \exp\{-\delta_6 n\},$$

если только $n > \sigma_2 f_i^{\nu}$. Лемма доказана.

Лемма 4.7. *Существуют такие константы* δ_7, c_7, $\sigma_3 > 0$, *что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} | p_{ij}(n, \nu) - \pi_j(\nu) | < \sigma_3 f_i^{\nu} + c_7 \exp\{- \delta_7 f_i^{\nu}\} \quad (4.38)$$

для любых $\nu \in D$, $i \in A$.

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|p_{ij}(n,\nu)-\pi_j(\nu)| = \sum_{n:n<\sigma_2 f_i^{\nu}}\sum_{j=0}^{\infty}|p_{ij}(n,\nu)-\pi_j(\nu)| +$$

$$+\sum_{n:n\geqslant\sigma_2 f_i^{\nu}}\sum_{j=0}^{\infty}|p_{ij}(n,\nu)-\pi_j(\nu)|, \tag{4.39}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}|p_{ij}(n,\nu)-\pi_j(\nu)|<2 \tag{4.40}$$

для любых i, $n\in A$. Поэтому первая сумма правой части (4.39) меньше $2\sigma_2 f_i^{\nu}$. Оценим вторую сумму правой части (4.39), воспользовавшись леммой 4.6,

$$\sum_{n:n\geqslant\sigma_2 f_i^{\nu}}\sum_{j=0}^{\infty}|p_{ij}(n,\nu)-\pi_j(\nu)| < \sum_{n:n\geqslant\sigma_2\cdot f_i^{\nu}} c_6\exp\{-\delta_6 n\}<c_7\exp\{-\delta_7 f_i^{\nu}\} \tag{4.41}$$

для некоторых c_7, $\delta_7>0$. Объединяя полученные оценки для первой и второй суммы правой части равенства (4.39), получаем утверждение леммы.

Приступим теперь к доказательству собственно теоремы 4.2. Введем множество M_α для некоторого $\alpha>1$

$$M_\alpha=\left\{(x_0,x_1,\ldots,x_n\ \ldots):|x_i|\leqslant\alpha\pi_i(0);\ \sum_{i=1}^{\infty}x_i=1\right\}. \tag{4.42}$$

Докажем, что множество M_α является множеством равномерной сходимости для оператора $P(0)$, соответствующего марковской цепи L^0. Докажем, что $P_0M_\alpha\subset M_\alpha$. Пусть $\mathrm{x}=(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in M_\alpha$. Тогда положим

$$P(0)\mathrm{x}=\mathrm{y}=(y_0,y_1,\ldots,y_n,\ldots),$$

$$|y_j|=\left|\sum_{i=0}^{\infty}p_{ij}(0)x_i\right|\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}p_{ij}(0)\alpha\pi_i(0)=\alpha\pi_j(0).$$

Кроме того, $\sum_{j=0}^{\infty}y_j=1$, поэтому $\mathrm{y}\in M_\alpha$. Положим

$$\varphi_n=\sup_{\mathrm{x}\in M}\|P^n(0)\mathrm{x}-\pi(0)\|. \tag{4.43}$$

Имеем

$$\varphi_n=\sup_{\mathrm{x}\in M}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\sum_{i=0}^{\infty}x_ip_{ij}(n,0)-\pi_j(0)\right|=\sup_{\mathrm{x}\in M}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\sum_{i=0}^{\infty}x_i(p_{ij}(n,0)-\pi_j(0))\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{\mathrm{x}\in M}\sum_{i=0}^{\infty}|x_i|\sum_{j=0}^{\infty}|p_{ij}(n,0)-\pi_j(0)|\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\alpha\pi_i(0)\sum_{j=0}^{\infty}|p_{ij}(n,0)-\pi_j(0)| \tag{4.44}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n<\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i(0)\sum_{j=0}^{\infty}|p_{ij}(n,0)-\pi_j(0)|=$$

$$=\alpha\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i(0)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|p_{ij}(n,0)-\pi_j(0)|. \tag{4.45}$$

Для оценки ряда (4.45) воспользуемся леммами 4.2. и 4.7. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n<\alpha\sum_{i=0}^{\infty}c_2\exp\{-\delta_2 f_i^{\nu}\}\,(\sigma_3 f_i^{\nu_0}+c_7\exp\{-\delta_7 f_i^{\nu}\}). \tag{4.46}$$

Из (4.46) следует, что существуют такие константы a_1 и b_1, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n<a_1\sum_{i=0}^{\infty}\exp\{-b_1 f_i^{\nu_0}\}. \tag{4.47}$$

Сходимость ряда (4.47) следует из условия 2 к теореме 4.2. Тем самым мы показали, что множество M_α является множеством равномерной сходимости для оператора $P(0)$.

Возьмем $\alpha_1<\alpha_2$; M_{α_1} и M_{α_2} — множества равномерной сходимости для оператора $P(0)$ и $M_{\alpha_1}\subset M_{\alpha_2}$. Возьмем $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\in M_{\alpha_1}$. Имеем $\sum_{i=1}^{\infty}x_i=1$; $x_i\leqslant\alpha_1\pi_i(0)$. Положим $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)=P(\nu)\mathbf{x}$, где $y_i=\sum_{j=0}^{\infty}p_{ji}(\nu)x_j$; $\sum_{i=0}^{\infty}y_i=1$, так как P_ν — марковский оператор. $p_{ji}(\nu)$ отлично от нуля лишь для $j\in V_i$ (множество V_i определяется в условии теоремы). Из (4.11) следует, что существует такая константа $a>0$, что для всех точек $j\in V_i$ $\sum_{j\in V_i}\pi_j(0)<a\pi_i(0)$ для любого $i\in A$. Поэтому

$$|y_i|\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}p_{ji}(\nu)\,|x_j|\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}p_{ji}(\nu)\,\alpha_1\pi_j(0)<a\alpha_1\pi_i(0). \tag{4.48}$$

Из (4.48) следует, что если $a\alpha_1<\alpha_2$, то $\mathbf{y}\in M_2$ и тем самым условие 2 теоремы 4.1 предыдущего параграфа выполнено.

Пусть $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2\in M_{\alpha_1}$. Покажем, что тогда существует такое ν_0, что при $|\nu|<\nu_0$

$$\mathbf{z}=\mathbf{x}^1+\frac{(P_\nu-P_0)\,\mathbf{x}^2}{\|P_\nu-P_0\|}\in M_{\alpha_2},$$

$\mathbf{z}=(z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots)$. Очевидно, что $\sum_{i=0}^{\infty}z_i=1$. Покажем, что $|z_i|<\alpha_2\pi_i(0)$.

$$|z_i|\leqslant|x_i|+\frac{1}{\|P_\nu-P_0\|}\left|\sum_{j=0}^{\infty}(P_{ji}(\nu)-p_{ji}(0))\,x_j\right|. \tag{4.49}$$

Так как $P_{ji}(\nu)$ и $p_{ji}(0)$ отличны от нуля лишь для $j\in V_i$ и, как мы уже показали, существует константа $a>0$, такая, что для всех точек $j\in V_i$ и любого $i\in A$ $\sum_{j\in V_i}\pi_j(0)<a\pi_i(0)$, то

$$|z_i|<\alpha_1\pi_i(0)+\frac{1}{\|P_\nu-P_0\|}\max_{j\in V_i}|p_{ji}(\nu)-p_{ji}(0)|\times$$
$$\times\sum_{j\in V_i}\alpha_1\pi_j(0)\leqslant\alpha_1\pi_i(0)+\alpha_1 a\pi_i(0)=\pi_i(0)\,\alpha_1(1+a).$$

Положив $\alpha_2>\alpha_1(1+a)$, получаем, что $\mathbf{z}\in M_{\alpha_2}$. Тем самым выполняются все условия теоремы 4.1. Откуда и следует аналитичность стационарных вероятностей. Теорема доказана.

§ 3. Аналитичность случайных блужданий в $\mathbf{Z}_+^n$

Рассмотрим семейство однородных неприводимых непериодических цепей Маркова $\{L^\nu\}$ с дискретным временем, множеством состояний которых является целочисленная решетка $\mathbf{Z}_+^n = \{(z_1, \ldots, z_n): z_i > 0$ целые$\}$ $(\nu \in D$, где D — открытое подмножество действительной прямой).

Будем предполагать выполненными условия однородности и ограниченности скачков, введенные в § 3 гл. III. Кроме того, предположим, что существуют такие n, $\delta > 0$, что для любого $\nu \in D$, $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$ и $\beta \in V_\alpha$, где $V_\alpha \left\{\beta : \sup\limits_{\nu \in D} p_{\beta\alpha}(\nu) > 0\right\}$ выполняется неравенство

$$p_{\beta\alpha}(n, \nu) > \delta.$$

Как и в § 3 гл. III, введем семейство векторных полей $\{V^\nu\}$.

Теорема 4.3. *Пусть оператор P_ν, определяемый цепью L^ν, аналитически зависит от ν при $\nu \in D$. Тогда, если существует такое множество $U \subset D$, что для семейства векторных полей $\{V^\nu\}$ $(\nu \in D)$ выполняется условие $\tilde{B}$* (см. § 3 гл. III), *то для всех $\nu \in U$ цепи L^ν эргодичны, а стационарные вероятности $\pi_\alpha(\nu)$ аналитичны по ν при любом $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$ и $\nu \in U$.*

Доказательство. Как и в § 3 гл. III, из выполнимости условия $\tilde{B}$ вытекает существование такой функции $f^\nu(\alpha)$ $(\nu \in D)$, что выполняется система неравенств (4.12). При этом семейства функций $\{k_i^\nu\}$ и $\{f_i^\nu\}$ удовлетворяют условиям 1, 2, 3, наложенным на них в теореме 4.2. Неравенство (4.11) выполняется по предположению. Таким образом, выполняются все условия теоремы 4.2, что и приводит к аналитичности стационарных вероятностей $\pi_\alpha(\nu)$ при $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$ и $\nu \in U \subset D$.

Для семейства случайных блужданий $\{L^\nu\}$ в $\mathbf{Z}_+^n$, где $n \leqslant 3$, условия аналитичности стационарных вероятностей формулируются в явном виде, так как удается построить функцию $f(\alpha)$, удовлетворяющую условию $\tilde{B}$ для семейства $\{L^\nu\}$. Сформулируем эту теорему для блужданий в $\mathbf{Z}_+^3$.

Теорема 4.4. *Пусть для цепи Маркова L^{ν_0}, где $\nu_0 \in D$, выполняются условия теоремы 2.4, обеспечивающие эргодичность цепи L^ν. Пусть, кроме того, оператор P_ν аналитически зависит от ν при $\nu \in D$. Тогда существует такая окрестность U точки $\nu_0 (U \subset D)$, что для всех $\nu \in U$ цепи L^ν эргодичны, а стационарные вероятности $\pi_\alpha(\nu)$ аналитичны по ν при любом $\alpha \in \mathbf{Z}_+^3$ и $\nu \in U$.*

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 3.7, и мы на нем останавливаться не будем.

Поступило 23.IV.1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, М., «Мир», 1964.
2. Спицер Ф. С., Принципы случайного блуждания, М., «Мир», 1969.
3. Хасьминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., «Наука», 1969.
4. Малышев В. А., Случайные блуждания. Уравнения Винера — Хопфа в четверти плоскости. Автоморфизмы Галуа, М., Изд-во МГУ, 1970.

5. Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, М., ИЛ., 1956.

6. Лоэв М., Теория вероятностей, М., ИЛ, 1962.

7. Малышев В. А., Уравнения Винера—Хопфа и их применение в теории вероятностей, в кн.: Теория вероятностей, том 13. Итоги науки, М., ВИНИТИ, 1975.

8. Карлин С., Основы теории случайных процессов, М., «Мир», 1971.

9. Меньшиков М. В., Условия эргодичности и транзиентности для случайных блужданий в положительном октанте пространства, ДАН **217**, № 4 (1974), 755—758.

10. Малышев В. А., Меньшиков М. В., Эргодичность в трехмерных марковских задачах ТМО, в кн.: Труды III Всесоюзной школы-совещания по теории массового обслуживания, Пущино, 1974, т. 1, с. 128—134.

11. Малышев В. А., Меньшиков М. В., Условия непрерывности стационарных вероятностей для цепей Маркова, в кн.: Третий советско-японский симпозиум по теории вероятностей, Ташкент, 1975, с. 34—36.

12. Малышев В. А., Классификация двумерных положительных случайных блужданий и почти линейные полумартингалы, ДАН **202**, № 3 (1972), 526—528.

13. Дынкин Е. Б., Граничная теория марковских процессов (дискретный случай), УМН **24**, вып. 2 (1969), 3—43.

14. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, М., «Наука», 1966.

15. Малышев В. А., Нестандартные марковские системы теории массового обслуживания, в кн.: Труды II Всесоюзной школы совещания по теории массового обслуживания, Дилижан, 1971, с. 91—95.

16. Золотарев В. М., Количественные оценки в задачах непрерывности систем массового обслуживания, Теория вероятностей и ее применения **20**, вып. 1 (1975), 215—218.

17. Калашников В. В., Равномерная близость компонент марковского процесса при вариации его параметров, Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика, № 4 (1974), 43—53.

18. Калашников В. В., Свойство γ-возвратности для марковских последовательностей, ДАН **213**, № 6 (1973), 1243—1246.

19. Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, М., «Наука», 1969.

20. Навицкас З., Критерии эргодичности однородных марковских цепей в специальном фазовом пространстве, I—II, Литов. матем. сб. **12**, № 3 (1972), 113—146.

21. Навицкас З., Критерии эргодичности однородных марковских цепей в специальном фазовом пространстве, III, Литов. матем. сб. **12**, № 4, (1972), 153—174.

22. Прохоров Ю. В., Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероятностей и ее применения **1**, вып. 2 (1956), 177—238.

23. Foster F. G., On the stochastic matrices associated with certain quening processes, Ann. Math. Stat. **24** (1953), 355—360.

24. Shimizu A., On the stability of a discrete time Markov chain, Second Japan — U.S.S.R. Sumposium on probability theory, Kyoto, August, 1972.

25. William F., Stout, Maximal inequalities and the law of the iterated logarithm, The Ann. of Probability **1**, N 2 (1973), 322—328.

26. William F. Stout, A martingall analogue of Kolmogorov's law of the iterated logarithm, Z. Wahrscheinlichkeitheorie and Verw. Gebiete 15 (1970), 279—990.