ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 58, № 2
февраль, 1984

КЛАСТЕРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ГИББСОВСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ БЕЗМАССОВОГО ГАУССОВСКОГО ПОЛЯ

Ахмитзянов Р. Р., Малышев В. А., Петрова Е. Н.

Построено кластерное разложение для гиббсовского случайного поля, являющегося возмущением гауссовского безмассового решетчатого поля со степенным убыванием корреляций.

Пусть ξ_t, $t\in\mathbb{Z}^\nu$, — трансляционно-инвариантное гауссовское случайное поле на ν-мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^\nu$, причем $\langle\xi_t\rangle=0$, $\langle\xi_t^2\rangle=1$, где $\langle\cdot\rangle$ — среднее по мере μ на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^\nu}$, порожденной распределением гауссовского поля ξ_t. Обозначим $\langle\xi_t\xi_{t'}\rangle\equiv\varphi_{tt'}\equiv\varphi(t-t')$. Такое гауссовское поле называется безмассовым, если его спектр (множество значений преобразования Фурье)

$$\tilde{\varphi}(k)=(2\pi)^{-\frac{\nu}{2}}\sum_{t\in\mathbb{Z}^\nu}\exp(i(k,t))\varphi(t)$$

не отделен от нуля. Безмассовое поле не может иметь экспоненциального убывания корреляций и, как правило, имеет степенное. Мы рассматриваем гиббсовские возмущения этого гауссовского поля с взаимодействием вида $\lambda\sum_{t\in\Lambda}f(\xi_t)$, где, например, $f(\xi_t)=\xi_t^4$, а $\lambda>0$ мало.

В [1] построено кластерное разложение для случая

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}^\nu-\{0\}}|\varphi(t)|<1.$$

Наша задача — освободиться от этого условия. Федербуш [2] предложил новый метод, использующий идею ренормгруппы, позволяющий для ряда конкретных φ получить кластерное разложение. Однако, помимо существенных ограничений на функцию φ, метод Федербуша сталкивается с трудностями при оценке убывания корреляций предельного гиббсовского поля. Мы рассматриваем более простой подход, восходящий к идеям Глимма, Джаффе, Спенсера [3], позволяющий получить кластерное разложение в случае

$$(1)\qquad \sum_{t\in\mathbb{Z}^\nu}|\varphi(t)|<\infty.$$

Заметим, что все полученные к настоящему времени кластерные разложения относятся к этому случаю. Выход на границу инфракрасной области [4], по-видимому, требует существенного развития техники кластерных разложений.

Перейдем к формулировке основного результата.

Теорема. Пусть функция $g(z, \lambda)$, $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in (0, \lambda_0] \subset \mathbb{R}^1$, при любом фиксированном λ вещественна на вещественной оси z и является аналитической в полосе комплексной плоскости

$$E = \{z : |\operatorname{Im} z| \leqslant 1/\lambda\}$$

и, кроме того, для всех $z \in E$ $\operatorname{Re} g(z, \lambda) > -d$, где $d > 0$ некоторое число. В конечном объеме $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ рассмотрим гиббсовскую меру μ_Λ с плотностью Радона — Никодима относительно меры μ, соответствующей описанному выше гауссовскому полю с условием (1):

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\mu} = Z_\Lambda^{-1} \exp\Big(-\sum_{t \in \Lambda} g(\xi_t, \lambda)\Big),$$

где

$$Z_\Lambda = \Big\langle \exp\Big(-\sum_{t \in \Lambda} g(\xi_t, \lambda)\Big)\Big\rangle.$$

Тогда при любом $\lambda \in (0, \lambda_0]$, где $\lambda_0 > 0$ достаточно мало, для любой последовательности расширяющихся объемов $\Lambda_1 \subset \ldots \subset \Lambda_n \subset \ldots$, таких что $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i = \mathbb{Z}^\nu$, существует предел последовательности мер μ_{Λ_i} в смысле слабой сходимости конечномерных распределений.

Мы докажем теорему, получив кластерное разложение (см. [1]) для характеристических функций

$$\Big\langle \prod_{t \in A} \exp(iu_t \xi_t) \Big\rangle_\Lambda, \qquad A \subset \Lambda,$$

где $\langle \cdot \rangle_{\mu_\Lambda}$ — среднее по мере μ_Λ.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 1. Обозначим через $\Phi_\Lambda = (\varphi_{tt'})$, t, $t' \in \Lambda$, матрицу ковариаций рассматриваемого гауссовского поля в объеме Λ. Фиксируем некоторое $D \subset \Lambda$ и обозначим

$$\tilde\varphi_{t_1t_2} = \begin{cases} \varphi_{t_1t_2}, & \text{если } t_1, t_2 \in D \text{ или } t_1, t_2 \notin D, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Обозначим $\tilde\Phi_\Lambda = (\tilde\varphi_{tt'})$, t, $t' \in \Lambda$. Для любого числа s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, обозначим через $L(D, s)$ матрицу такую, что $L(D, s)\Phi_\Lambda = s\Phi_\Lambda + (1-s)\tilde\Phi_\Lambda$, а через $\langle \cdot \rangle_s$ — среднее по гауссовской мере μ_s в Λ с матрицей ковариаций $L(D, s)\Phi_\Lambda$ (при $s=1$ опускаем индекс). Пусть F_t, $t \in \Lambda$, — набор вещественных бесконечно дифференцируемых функций, интегрируемых вместе со всеми своими производными по мере $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$.

Тогда

$$(2)\qquad \left\langle \prod_{t\in\Lambda} F_t(\xi_t) \right\rangle = \left\langle \prod_{t\in D} F_t(\xi_t) \right\rangle \left\langle \prod_{t\in\Lambda-D} F_t(\xi_t) \right\rangle +$$

$$+\int_0^1 \sum_{\substack{t_0\in D\\ t_1\in\Lambda-D}} \langle \xi_{t_0}\xi_{t_1}\rangle \left\langle F_{t_0}'(\xi_{t_0})F_{t_1}'(\xi_{t_1}) \prod_{\substack{t\in\Lambda-\\ -\{t_0,t_1\}}} F_t(\xi_t) \right\rangle_s ds.$$

Сумма в (2) берется по всем парам точек $t_0\in D$, $t_1\in\Lambda-D$, а F_t' есть производная функции F_t.

Доказательство леммы 1 можно найти, например, в [5].

Фиксируем некоторое $A\subset\Lambda$ и положим

$$F_t(\xi_t)=\begin{cases} \exp(iu_t\xi_t-g(\xi_t,\lambda)), & \text{если } t\in A,\\ \exp(-g(\xi_t,\lambda)), & \text{если } t\in\Lambda-A.\end{cases}$$

Фиксируем $t_0\in\Lambda$ и рассмотрим в лемме 1 в качестве D множество $\{t_0\}\equiv\equiv B_0$. Получим

$$(3)\qquad Z_\Lambda \left\langle \prod_{t\in A} \exp(iu_t\xi_t) \right\rangle_\Lambda = \left\langle \prod_{t\in A} \exp(iu_t\xi_t) \prod_{t\in\Lambda} \exp(-g(\xi_t,\lambda)) \right\rangle =$$

$$= k_{t_0} \left\langle \prod_{t\in A-\{t_0\}} \exp(iu_t\xi_t) \prod_{t\in\Lambda-\{t_0\}} \exp(-g(\xi_t,\lambda)) \right\rangle +$$

$$+\sum_{\substack{t_1\in\Lambda\\ t_1\neq t_0}} \langle \xi_{t_0}\xi_{t_1}\rangle \int_0^1 \left\langle \frac{\partial^2 \exp\left(\sum_{t\in A}(iu_t\xi_t-g(\xi_t,\lambda)-\sum_{t\in\Lambda-A} g(\xi_t,\lambda)\right)}{\partial\xi_{t_0}\,\partial\xi_{t_1}} \right\rangle_{s_1} ds_1,$$

где

$$k_{t_0}=\langle F_{t_0}\rangle=\langle \exp(-g(\xi_{t_0},\lambda)+iu_{t_0}\xi_{t_0}\chi_A(t_0))\rangle,\qquad \chi_A(t_0)=\begin{cases}1, & t\in A,\\ 0, & t\notin A.\end{cases}$$

Применим далее лемму 1 к каждому из слагаемых в сумме (3), полагая $D=B_1=\{t_0,\ t_1\}$ и рассматривая ковариационную матрицу $L(B_0,\ s_1)\Phi_\Lambda$, и т. д. Обозначим через $\tau=\{(t_0,\ t_1),\ (t_{i_2},\ t_2),\dots,\ (t_{i_n},\ t_n)\}$ упорядоченный набор пар точек решетки, такой что все $t_1,\dots,t_n$ различны и $i_m<m$ для $m=2,\dots,\ n$; $i_1=0$. Назовем τ диаграммой, а пары $(t_{i_m},\ t_m)$ ребрами τ. Пусть $s=\{s_1,\dots,\ s_n\}$ — последовательность из n чисел, $0\leqslant s_i\leqslant 1$, $i=1,\dots,n$. Для каждого τ рассмотрим возрастающую последовательность множеств $B_0\subset B_1\subset\dots\subset B_n$, $B_k=\{t_0,\ t_1,\dots,\ t_k\}$, и обозначим через $\langle\cdot\rangle_{\tau,\,s,\,m}$ среднее по гауссовской мере с нулевым средним и матрицей ковариаций $L(B_{m-1},\ s_m)\dots L(B_0,\ s_1)\Phi_\Lambda$. Заметим, что для любого $m\geqslant 2$

$$\langle \xi_{t_{i_m}}\xi_{t_m}\rangle_{\tau,\,s,\,m-1}=\langle \xi_{t_{i_m}}\xi_{t_m}\rangle \prod_{j=i_m+1}^{m-1} s_j$$

(мы полагаем $\prod\limits_{j=i_m+1}^{m-1} s_j=1$ при $i_m=m-1$). Обозначим

$$\frac{\partial}{\partial\tau}=\prod_{m=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\xi_{t_{i_m}}\partial\xi_{t_m}}$$

и для любого конечного $B \subset \mathbb{Z}^\nu$, $|B| \geqslant 2$, $B \ni t_0$, положим

$$k_B = \sum_{\substack{\tau:\, B_n = B \\ B_0 = \{t_0\}}} \prod_{m=1}^{n} \langle \xi_{t_{i_m}} \xi_{t_m} \rangle \int_0^1 f(\tau, s) \times \tag{4}$$

$$\times \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \exp \Big(\sum_{t \in B \cap A} i u_t \xi_t - \sum_{t \in B} g(\xi_t, \lambda) \Big) \right\rangle_{\tau, s, n} ds,$$

где

$$f(\tau, s) = \prod_{m=2}^{n} \prod_{j=i_m+1}^{m-1} s_j, \quad ds = \prod_{m=1}^{n} ds_m.$$

Многократно применяя лемму 1 к (3), получим

$$Z_\Lambda \left\langle \prod_{t \in A} \exp(i u_t \xi_t) \right\rangle_{\mu_\Lambda} = k_{t_0} \left\langle \prod_{t \in A - \{t_0\}} \exp(i u_t \xi_t) \times \right. \tag{5}$$

$$\left. \times \prod_{t \in \Lambda - \{t_0\}} \exp(-g(\xi_t, \lambda)) \right\rangle + \sum_{\substack{B: |B| \geqslant 2 \\ B \ni t_0}} k_B \left\langle \prod_{t \in A - B} \exp(i u_t \xi_t) \prod_{t \in \Lambda - B} \exp(-g(\xi_t, \lambda)) \right\rangle.$$

Существование предела характеристических функций $\left\langle \prod_{t \in A} \exp(i u_t \xi_t) \right\rangle_{\mu_\Lambda}$ при $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^\nu$ следует из (5) и следующей леммы (см. [6]).

Лемма 2. Имеет место кластерная оценка

$$\sum_{\substack{B \subset \mathbb{Z}^\nu \\ B \ni t_0 \\ |B| = n}} |k_B| \leqslant (C\lambda)^n. \tag{6}$$

Сумма в (6) берется по всем подмножествам $B \subset \mathbb{Z}^\nu$ мощности n, содержащим t_0, а C — некоторая константа (зависящая лишь от ν и d).

Для доказательства леммы 2 нам понадобится

Лемма 3. Пусть точка $t \in B$ встречается в наборе τ n_t раз, $\sum_{t \in B} n_t = 2n$.

Тогда

$$\left| \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \exp \Big(- \sum_{t \in B} g(\xi_t, \lambda) + \sum_{t \in B \cap A} i u_t \xi_t \Big) \right\rangle_{\tau, s, n} \right| \leqslant (C\lambda)^n \prod_{t \in B} n_t! \tag{7}$$

для некоторой константы C, не зависящей от τ (одной и той же буквой C мы обозначаем различные абсолютные константы, зависящие, возможно, лишь от констант d и ν).

Доказательство леммы 3. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \exp \Big(- \sum_{t \in B} g(\xi_t, \lambda) + \sum_{t \in B \cap A} i u_t \xi_t \Big) = \prod_{t \in B} \frac{\partial^{n_t}}{\partial \xi_t^{n_t}} \times \tag{8}$$

$$\times \exp(-g(\xi_t, \lambda) + \chi_A(t) i u_t \xi_t),$$

достаточно оценить каждый сомножитель в правой части (8). При каждом фиксированном λ воспользуемся аналитичностью $g(z, \lambda)$ в полосе

$|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/\lambda$. Получим для любого вещественного x

$$(9)\qquad \frac{\partial^{n_t}}{\partial x^{n_t}} \exp(-g(x,\lambda)+\chi_A(t)iu_tx) = \\ = \frac{n_t!}{2\pi i} \int\limits_{|z-x|=1/\lambda} \frac{\exp(-g(z,\lambda)+\chi_A(t)iu_tz)}{(z-x)^{n_t+1}}\,dz.$$

Поскольку $\operatorname{Re} g(z,\lambda) > -d$, из (8) получаем

$$\left| \frac{\partial^{n_t}}{\partial x^{n_t}} \exp(-g(x,\lambda)+\chi_A(t)iu_tx) \right| \leqslant (C\lambda)^{n_t} e^d n_t!,$$

откуда следует **(7)**.

Доказательство леммы 2. Воспользовавшись леммой 3, имеем из (4)

$$(10)\qquad |k_B| \leqslant (C\lambda)^n \sum_{\substack{\tau: B_n=B \\ B_0=\{t_0\}}} \prod_{m=1}^{n} |\varphi(t_{i_m}-t_m)| \prod_{t\in B} n_t! \int\limits_0^1 f(\tau,s)\,ds.$$

Здесь сумма — по всем диаграммам τ, для которых $B_n(\tau)=B$, $B_0(\tau)=\{t_0\}$. Обозначим через $T(\tau)$ порожденное диаграммой τ дерево с множеством вершин $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ и множеством ребер (t_{i_m}, t_m), $m=1,\ldots,n$. Рассмотрим сумму $\sum\limits_{\substack{B:|B|=n+1 \\ B\ni t_0}} |k_B|$. В силу (10) эта сумма не превосходит

$$(11)\qquad (C\lambda)^n \sum_{\substack{B:|B|=n+1 \\ B\ni t_0}} \sum_{\substack{\tau: B_n(\tau)=B \\ B_0(\tau)=\{t_0\}}} \prod_{m=1}^{n} n_t! |\varphi(t_{i_m}-t_m)| \int\limits_0^1 f(\tau,s)\,ds.$$

Суммирование в правой части (11) фактически ведется по всем τ, таким что $B_0(\tau)\equiv\{t_0\}$, и $T(\tau)$ состоит ровно из n ребер. Представим это суммирование как двойную сумму: по всем деревьям T с $(n+1)$ вершинами, принадлежащими $\mathbb{Z}^\nu$, одна из которых совпадает с t_0, и по всем диаграммам τ таким, что $T(\tau)$ совпадает с T.

Лемма 4. Фиксируем дерево T с $(n+1)$ вершинами, одна из которых есть t_0. Тогда

$$\sum_{\tau: T(\tau)\equiv T} \int\limits_0^1 f(\tau,s)\,ds = 1,$$

где сумма — по всем диаграммам τ таким, что $T(\tau)$ совпадает с T.

Доказательство леммы 4 имеется в [7, теорема A1].

Поскольку числа n_t зависят лишь от T, с помощью леммы 4 получаем следующую оценку для (11):

$$(12)\qquad \sum_{\substack{B:|B|=n+1 \\ B\ni t_0}} |k_B| \leqslant (C\lambda)^n \sum_T \prod_{m=1}^{n} |\varphi(t_{i_m}-t_m)| \prod_t n_t!,$$

где сумма — по всем деревьям с $(n+1)$ вершиной, одна из которых есть t_0, а $\prod\limits_t$ — произведение по всем вершинам дерева T.

Лемма 5.

$$\sum_T \prod_{m=1}^n |\varphi(t_{i_m}-t_m)| \prod_t n_t! \leqslant C^n,$$

где сумма — по всем деревьям T с $(n+1)$ вершинами, принадлежащими $\mathbb{Z}^\nu$, одна из которых есть t_0, а произведение — по всем вершинам дерева T.

Доказательство леммы 5. Рассмотрим множество $X(n)$ всевозможных векторов $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \neq 0$, $x_i \in \mathbb{Z}^\nu$, $i=1, \ldots, n$. По произвольному заданному x построим некоторую совокупность графов с вершинами, принадлежащими $\mathbb{Z}^\nu$ и содержащими t_0. Построение производится по следующему алгоритму.

1 шаг. Фиксируем вектор $r=(r_1, \ldots, r_n)$ натуральных чисел такой, что

$$r_1 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} r_i = n.$$

2 шаг. Строим вершины $t_1, \ldots, t_{r_1}$, положив $t_1=t_0+x_1$, $t_2=t_0+x_2, \ldots, t_{r_1}=$ $=t_0+x_{r_1}$. Каждую из построенных вершин соединяем ребром с вершиной t_0.

3 шаг. Выберем среди точек $t_1, \ldots, t_{r_1}$ первую в лексикографическом порядке. Обозначим ее t_1^*.

Если $r_2=0$, не производя никаких построений переходим к следующему шагу. Если $r_2 \neq 0$, строим вершины $t_{r_1+1}, \ldots, t_{r_1+r_2}$, положив для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant r_2$, $t_{r_1+j}=t_1^*+x_{r_1+j}$. Каждую из построенных вершин соединяем ребром с t_1^*.

Далее построение ведется по индукции. Пусть после $(p+1)$ шагов построено $r_1+\ldots+r_p$ вершин.

$(p+2)$-й шаг. Выберем первую в лексикографическом порядке вершину из числа построенных, при этом не рассматриваются выбранные на предыдущих шагах. Обозначим ее t^*_{p+1}. Следующие r_{p+1} вершин получаются сдвигом вершины t^*_{p+1} на векторы $x_{r_1+\ldots+r_p+1}, \ldots, x_{r_1+\ldots+r_{p+1}}$. Каждая из построенных вершин соединяется ребром с вершиной t^*_{p+1}.

С помощью описанного алгоритма мы построили, в частности, всевозможные деревья с $(n+1)$ вершинами, одна из которых есть t_0. При этом каждое дерево построено $n_{t_0}! \prod\limits_{t \neq t_0} (n_t-1)!$ раз, поскольку мы рассматриваем неупорядоченные векторы x. Поэтому

$$\sum_T \prod_{m=1}^n |\varphi(t_{i_m}-t_m)| \prod_t n_t! \leqslant C^n \sum_{x \in X(n)} \sum_r \prod_{i=1}^n |\varphi(x_i)| \leqslant C^n.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что число векторов r не превосходит 4^n, а также условием (1).

Теорема следует из (12) и леммы 5.