ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1989

ТОМ 304 № 2

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

А.Ш. ДОМНЕНКОВ, В.А. МАЛЫШЕВ

ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ С ФЕРМИ-ГАЗОМ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 15 VII 1987)

В работе приводится первый пример асимптотически полной трансляционно-инвариантной бесконечночастичной системы с взаимодействием, не сохраняющим числа частиц. Система представляет собой шредингеровскую частицу, взаимодействующую со свободным ферми-газом.

Пусть в пространстве Фока $\mathcal{F}(L_2(R)^\nu)$ задана сумма конечного числа мономов Вика:

$$(1)\quad V=\Sigma V_i^{(1)}=\Sigma\int W_i(x_1,\ldots,x_{k_i},y_1,\ldots,y_{m_i})a^*(x_1)\ldots a^*(x_{k_i})a(y_1)\ldots\ldots a(y_{m_i})\,dx_1\ldots dy_{m_i}.$$

Предположим, что W_i являются гладкими, достаточно быстро убывающими по каждой переменной функциями и V формально симметричен. Пусть $h=-\Delta+\mu 1$ – самосопряженный оператор в $L_2(R^\nu)$. Рассматриваем операторы вида:

$$H_1=d\Gamma(h)+\epsilon V\quad \text{(нетрансляционно-инвариантный случай)};$$

$$H_2=d\Gamma(h)+\epsilon\int_{R^\nu}V_x dx\quad \text{(трансляционно-инвариатный случай)},$$

где $d\Gamma(h)$ – вторичное квантование h, V_x – оператор вида (1) с ядрами

$$W_i(x_1-x,\ldots,x_{k_i}-x,\ y_1-x,\ldots,y_{m_i}-x).$$

Если V сохраняет число частиц (т.е $m_i=k_i\ \forall i$), то H_1 и H_2 можно рассматривать отдельно в каждом n-частичном секторе $\mathcal{F}^{(n)}(L_2(R^\nu))$. Здесь имеются глубокие результаты об унитарной эквивалентности $H_0=d\Gamma(h)$ и H_2. Первые результаты для $n=3$ принадлежат Л.Д. Фаддееву [1]; полная библиография приведена в [2]. Особо отметим теорему Иорио–О'Кэррола: для любых $n\geqslant 2$, $\nu\geqslant 3$ существует $\epsilon_0(n,\nu)$ такое, что при $|\epsilon|<\epsilon_0(n,\nu)$ H_0 и H_2 унитарно эквивалентны в секторе $\mathcal{F}^{(n)}(L_2(R^\nu))$. Доказательства этих результатов проводились в рамках двух подходов: стационарного [1] и нестационарного [4]. Операторы H_1 и H_2 с $k_i\neq m_i$ подробно изучались Фридрихсом [5].

В настоящей статье приняты следующие ограничения:

1. Рассматриваются только ферми-системы, т.е. антисимметрическое пространство Фока $\mathcal{F}(L_2(R^\nu))$. В этом случае, во-первых, просто доказывается "существование динамики", т.е. самосопряженность операторов H_1 и H_2. Для H_2 это можно сделать аналогично доказательству теоремы Робинсона [6] в квантовой статистической механике (динамика на C^*-алгебре с последующим переходом к ГНС-представлению). Более существенной причиной ограничения ферми-системами является то, что единственно доступным методом построения обратных волновых операторов является доказательство сходимости их разложения в ряд по ϵ, что возможно лишь при ограниченных $a(\psi),a^*(\psi)$.

2. $\nu\geqslant 3$, так как при малых размерностях даже для одной частицы во внешнем поле появляется дискретный спектр при как угодно малых ϵ и нельзя рассчитывать на эквивалентность H_0 и H_i, $i=1,2$.

3. $\min m_l > 1$, так как на существование прямых волновых операторов

$$\hat{W}_\pm = \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim} \exp(-itH_2)\exp(itH_0)$$

можно рассчитывать, лишь если V не поляризует вакуум (т.е. $\min m_l > 0$) и нет перенормировки массы ($\min m_l > 1$). В этом случае можно показать, что $\hat{W}_\pm$ действительно существуют [7].

Нетрансляционно-инвариантный случай полностью изучен в [8]. Из результатов [8] следует, например, решение проблемы Фридрихса: при $\nu \geqslant 3$ и достаточно малом ϵ H_1 унитарно эквивалентен H_0 + const $\cdot$ 1. Ранее один результат такого рода доказан в [9]: при $\nu \geqslant 3$ и достаточно малом ϵ H_1 и H_0 унитарно эквивалентны (без доказательства унитарности волновых операторов), если V – положительный оператор, не поляризующий вакуум, и спектр H_0 принадлежит $[m_2, \infty)$, $m^2 > 0$.

Дополнительное упрощение состоит во введении выделенной частицы. Точнее, рассмотрим комплексное гильбертово пространство

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}(L_2(R^\nu)) \otimes L_2(R^\nu),$$

и пусть

$$H_0 = d\Gamma(h) \otimes 1 + 1 \otimes (-\Delta), \quad V = \Sigma V_l^{(1)} \otimes V_l^{(2)},$$

где $V_l^{(2)}$ – оператор умножения на функцию $g_l \in L_2(R^\nu)$. Предполагается, что преобразования Фурье

$$\hat{W}_l \in C_0^\infty(R^{\nu(m_l + k_l)}), \quad \hat{g} \in C_0^\infty(R^\nu).$$

Положим

$$H_2 = H_0 + \epsilon \int_{R^\nu} v_x dx, \quad V_x = \Sigma V_{l,x}^{(1)} \otimes V_{l,x}^{(2)},$$

где $V_{l,x}^{(2)}$ – оператор умножения на функцию $g_l(y) = g_l(y - x)$.

Л е м м а 1. *Если* $\min m_l > 0$, *то* H_2 *самосопряжен в существенном на линейной оболочке* D *векторов вида*

$$a^*(\psi_1)\ldots a^*(\psi_k)\Omega \otimes \varphi, \quad k = 0 - \infty,$$

где Ω – *вакуум в* $\mathcal{F}(L_2(R^\nu))$ *и* $\hat{\psi}_0, \hat{\varphi} \in C_0^\infty(R^\nu)$.

Л е м м а 2. *Если* $\min m_l > 1$, *то существуют прямые морфизмы Мёллера* $W_\pm$.

Основной результат состоит в следующем утверждении:

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\nu > 4$ *и* $\min m_l > (\nu + 2)/(\nu - 4)$. *Тогда при достаточно малом* ϵ *существуют обратные морфизмы Мёллера*:

$$W_\pm = \underset{t\to\infty}{s\text{-}\lim} W_t, \quad W_t = \exp(-itH_0)\exp(itH_2).$$

Схема д о к а з а т е л ь с т в а: используя представление ($t \geqslant 0$, $\psi \in D$)

$$W_t\psi = \psi + \sum_{h=1}^{\infty} (i\epsilon)^n \int_{Q_t^n} \int_{R^{n\nu}} V_{x_n,t_n} \ldots V_{x_1,t_1} \psi\, dx_1 \ldots dx_n\, dt_1 \ldots dt_n, \tag{2}$$

$$Q_t^n = \{(t_1, \ldots, t_n)\colon\ 0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_h \leqslant t\},$$

$$V_{x,t} = \exp(-itH_0)\, V_x \exp(itH_0),$$

докажем сходимость при $t \to +\infty$ и равномерную ограниченность n-го члена ряда (2) величиной $\epsilon^n C^n C(\psi)$, где C зависит только от V. Возникающие при этом множители вида ($\psi = \psi^{(1)} \otimes \psi^{(2)}$)

$$\| V^{(2)}_{x_n, t_n} \dots V^{(2)}_{x_1, t_1} \psi^{(2)} \|$$

оцениваются с помощью метода стационарной фазы [2, т. 2, с. 50], а для множителей вида

$$\| V^{(2)}_{x_n, t_n} \dots V^{(1)}_{x_1 t_1} \psi^{(1)} \|$$

применяется частичное суммирование по диаграммам, аналогичное методу [8]. В результате общий член ряда (2) оценивается величиной

$$(3) \qquad \epsilon^n C^h(V)\, C(\psi) \left(\int_0^\infty (1+s)^{-(\nu/2-2)m+\nu/2} ds \right)^n,$$

где $m = \min m_i$. Условия теоремы 1 обеспечивают сходимость интеграла в (3).

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 H_0 *и* H_2 *унитарно эквивалентны.*

Замечания. Выбор в качестве одночастичного гамильтониана оператора $h = -\Delta + \mu 1$ обусловлен соображениями простоты изложения. На самом деле результаты данной работы верны и для более общих h при некоторых ограничениях на V. Точнее, пусть h – самосопряженный дифференциальный или псевдодифференциальный оператор в $L_2(R^\nu)$ со спектральной функцией $P(k) \in C^\infty(R^\nu)$ и функция $u(x)$ такова, что $\hat{u}(k) \in C_0^\infty(R^\nu)$. Положим

$$u_t(x) = \int \exp\{ i(x \cdot k - t \cdot P(k)) \} \hat{u}(k)\, dk.$$

Тогда верна следующая

Лемма 3 [2, т. 3]. *Пусть* $J_1 = \{ \operatorname{grad} P(k) / k \in \operatorname{supp} \hat{u} \}$, $J_2 = \{ k / \det [\partial^2 P / \partial k_i \partial k_j] = 0 \}$ *и* $\operatorname{supp} \hat{u} \cap J_2 = \phi$.

Тогда при произвольном m *существует константа* C, *зависящая от* m, $\hat{u}$ *и* J_1, *такая, что*:

а) $| u_t(x) | \leqslant C(1 + |x| + |t|)^{-m}$ *при* $x/t \notin J_1$;

б) $| u_t(x) | \leqslant C(1 + |t|)^{-\nu/2}$ *при всех* x, t.

Пользуясь этой леммой, можно показать, что теорема 1 верна для возмущений V того же вида при дополнительном ограничении: мера множества критических точек J_2 равна 0 и ядра

$$\hat{W}_i(x_1, \dots, x_{k_i}, y_1, \dots, y_{m_i})$$

обращаются в нуль, если по крайней мере один из аргументов принадлежит некоторой окрестности множества J_2.

Конечномерным аналогом рассматриваемой системы является система с гамильтонианом

$$-\sum_{i=1}^n \Delta_{x_i} - \Delta_y + \epsilon \sum_{i=1}^n V(y - x_i),$$

где каждая из n частиц взаимодействует с одной выделенной. Заметим, что аналог теоремы Иорио–О'Кэррола доказывается в этом случае не намного проще стандартного варианта.

Условия теоремы 1 являются техническими. По-видимому, она верна и при $\nu \geqslant 3$, $\min m_i > 0$. Рассматриваемая система, хотя и является приближением к реальным физическим системам (имеющим как в квантовой теории поля, так и в статистической физике поляризацию вакуума), позволяет продемонстрировать основные трудности, связанные с контролем роста числа частиц, и наметить пути их устранения.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
14 X 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фаддеев Л.Д.* Тр. МИАН, 1963, т. 69, с. 1–122. 2. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М.: Мир, 1982, т. 2–4. 3. *Iorio R., O'Carrol H.* – Comm. Math. Phys., 1972, vol. 27, p. 137–145. 4. *Prosser R.* – J. Mat. Phys., 1964, vol. 5, p. 708–713. 5. *Фридрихс К.* Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1969. 6. *Robinson D.* – Comm. Math. Phys., 1973, vol. 31, p. 171–189. 7. *Hepp K.* In: Statistical mechanics and quantum field theory. N.Y., 1971. 8. *Botvich D.D., Malyshev V.A.* – Comm. Math. Phys., 1983, vol. 91, p. 301–312. 9. *Högh-Krohn R.* – J. Pure and Appl. Math., 1968, vol. 21, p. 313–343.

УДК 553.70 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Ю.Н. ОРЛОВ, И.П. ПАВЛОЦКИЙ

ПОСТГАЛИЛЕЕВЫ РАВНОВЕСНЫЕ ЦЕПОЧКИ БОГОЛЮБОВА

(Представлено академиком Н.Н. Боголюбовым 24 X 1987)

Постгалилеевым мы называем приближение, в котором учитываются поправки порядка $O(c^{-2})$ к классической механике; c – скорость света. Рассмотрим системы N взаимодействующих тел в этом приближении. Обозначим $q = (\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N)$ – совокупность позиций тел, $v = (v_1, \ldots, v_N)$ – совокупность их скоростей, $p = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N)$ – совокупность гамильтоновых импульсов; $\gamma = \{q, v\}$ – фазовое пространство переменных Лагранжа, $\gamma^p = \{q, p\}$ – фазовое пространство переменных Гамильтона. Отображение Лежандра $\gamma \to \gamma^p$ сильно вырождено на поверхностях, объединение которых имеет в γ нулевую лебегову меру [1].

В постгалилеевом приближении функция Лагранжа системы тензорного типа $(\kappa, 0)$ имеет вид [2–4]

$$L = -c^2 \sum_{1 \leq i \leq N} \sqrt{1 - v_i^2/c^2} +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left\{ -\Phi_{ij} + \frac{1}{2c^2} [((1-\kappa)(v_i - v_j)^2 + v_i v_j) \Phi_{ij} - (\mathbf{r}_{ij}\mathbf{v}_i)(\mathbf{r}_{ij}\mathbf{v}_j) \frac{\Phi'_{ij}}{\mathbf{r}_{ij}} \right\}.$$

Здесь $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j$, $\Phi_{ij} = \Phi(r_{ij})$ – потенциал парного взаимодействия, заряды и массы тел положены равными единице. В случае векторного поля ($\kappa = 1$) имеем лагранжиан Дарвина, а для скалярных частиц ($\kappa = 0$) по этой формуле получается лагранжиан Ф.Д. Кеннеди. По этому лагранжиану вычисляются энергия

$$E = \sum_i \frac{c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} - \frac{1}{2c^2} \sum_{i<j} [\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j + (1-\kappa)(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)^2] \Phi_{ij} -$$

$$- (\mathbf{v}_i \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{v}_j \mathbf{r}_{ij}) \frac{\Phi'_{ij}}{\mathbf{r}_{ij}} + \sum_{i<j} \Phi_{ij} + o(c^{-2})$$