ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 30 1994 Вып. 3

УДК 621.391.1:519.2

© 1994 г. В.А. Малышев

ЗАКОНЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ ЭВОЛЮЦИИ СЛУЧАЙНОЙ СТРУНЫ

Рассматривается однородная марковская цепь с дискретным временем, состояниями которой являются последовательности (струны) $\alpha = x_n \dots x_1$ из n символов, а переходные вероятности зависят только от d символов (считая слева) и переход из α в $\beta = y_m \dots y_1$ возможен лишь, если $|n-m| \leqslant d$ и $x_i = y_i$ для всех $i = 1, \dots, n-d$.

Мы доказываем различные законы стабилизации для левого конца струны. В терминах теории очередей это означает, что рассматривается очередь с дисциплиной LIFO с r типами требований и с групповым приходом и обслуживанием. Это первый шаг в новом вероятностном подходе к изучению сетей связи с несколькими типами заявок.

§ 1. Определения и основные результаты

Сначала мы дадим основные определения и сформулируем главные результаты. Мотивировку проблем мы перенесли в последний параграф.

Конечные струны. Рассмотрим однородную счетную цепь Маркова с дискретным временем $\xi(t)$ с множеством состояний

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{1, \dots, r\}^n.$$

Другими словами, состояния этой цепи Маркова – упорядоченные последовательности (струны) из r символов $\alpha = x_n \dots x_1$, $x_i \in \{1, \dots, r\}$, имеющие произвольную длину $n = n(\alpha)$. Обозначим символом $\varnothing$ пустую струну (длины 0).

Для двух произвольных струн $\alpha = x_n \dots x_1$ и $\beta = y_m \dots y_1$ определим их композицию (длины $m+n$)

$$\alpha\beta = x_n \dots x_1 y_m \dots y_1.$$

Обозначим через A_n множество всех струн длины меньше n.

Предположим, что вероятности $p_{\alpha\beta}$ перехода $\alpha \to \beta$ этой цепи за один шаг удовлетворяют следующим условиям.

Условие B (ограниченность скачков): для некоторого $d < \infty$

(i) если $\alpha \in A_d$, то $p_{\alpha\beta} \neq 0$ возможно лишь при $n(\beta) \leqslant d + n(\alpha)$;

(ii) если $n(\alpha) \geqslant d$, то $p_{\alpha\beta} \neq 0$ может быть лишь в том случае, когда $\alpha = \gamma\theta$, $\beta = \delta\theta$ для некоторых γ, δ, θ таких, что $n(\gamma) = d$, $n(\delta) \leqslant 2d$.

Условие H (пространственная однородность): если $n(\gamma) = d$, то $P(\xi(t+1) = \delta\theta \,|\, \xi(t) = \gamma\theta)$ не зависит от θ, а лишь от γ и δ. Обозначим эту условную вероятность $q(\gamma, \delta)$: переход состоит в том, что мы убрали γ слева и взамен добавили δ.

Условие ND (невырожденность): для любой струны γ с $n(\gamma) = 1$ и для всех α

$$p_{(\gamma\alpha)\alpha} > 0 \quad \text{и} \quad p_{\alpha(\gamma\alpha)} > 0.$$

Таким образом, все состояния существенны и цепь Маркова неприводима. Предположим также, что она апериодична. В случае необходимости мы будем в дальнейшем указывать также начальное распределение.

Условие ND необходимо лишь для простоты обозначений и формулировок результатов. Основным является предположение однородности переходных вероятностей для всех струн, длина которых превосходит некоторую константу; для простоты мы положим эту константу равной d. Для струн длины меньше d единственными требованиями являются ограниченность скачков и какое-нибудь условие, обеспечивающее апериодичность (например, $p_{\alpha\alpha} > 0$ для некоторых α).

Полубесконечные струны. Наряду с определенной выше счетной марковской цепью $\xi(t)$, состояниями которой являются конечные струны, мы будем рассматривать два марковских процесса, $\xi^1(t)$ и $\xi^2(t)$, на полубесконечных струнах. Определим k-полубесконечную струну θ как бесконечную последовательность $x_k x_{k+1} x_{k+2} \ldots$ символов $x_i \in \{1, \ldots, r\}$, занумерованных целыми числами, начиная с $k \in \mathbb{Z}$.

Замечание 1. Как правило, мы нумеруем конечные струны справа налево, а полубесконечные слева направо. Однако иногда для конечных струн мы используем обратную нумерацию.

Пространство состояний $\mathfrak{A}_1$ для $\xi^1(t)$ есть множество всех k-полубесконечных струн (для всех k), т.е.

$$\mathfrak{A}_1 = \{(k; x_k, x_{k+1}, \ldots),\ k \in \mathbb{Z},\ x_i \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

Пространством состояний для $\xi^2(t)$ является множество всех 0-полубесконечных струн

$$\mathfrak{A}_2 = \{(x_0, x_1, \ldots),\ x_i \in \{1, \ldots, r\}\} = \{1, \ldots, r\}^{\mathbb{Z}_+}.$$

Определим отображение $\varphi : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ следующим образом: $\varphi(k; x_k, x_{k+1}, \ldots) = (y_0, y_1, \ldots)$, где $y_0 = x_k$, $y_1 = x_{k+1}, \ldots$ Определим также операцию композиции конечной струны $\beta = y_m \ldots y_1$ с k-полубесконечной струной $\theta = x_k x_{k+1} x_{k+2} \ldots$ как $(k-m)$-полубесконечную струну

$$\beta\theta = x_{k-m} \ldots x_{k-1} x_k x_{k+1} x_{k+2} \ldots = y_m \ldots y_1 x_k x_{k+1} x_{k+2} \ldots,$$

где $x_{k-m} = y_m, \ldots, x_{k-1} = y_1$.

Процесс $\xi^1(t)$ имеет те же вероятности переходов, что и $\xi(t)$ с $n(\xi(t)) \geqslant d$ т.е. $\gamma\theta \to \delta\theta$ с вероятностью $q(\gamma, \delta)$ (для любой θ):

$$P(\xi^1(t+1) = \delta\theta \,|\, \xi^1(t) = \gamma\theta) = q(\gamma, \delta).$$

Это означает, что лишь "однородная часть" переходных вероятностей для $\xi(t)$ играет роль в этом определении.

Мы определяем $\xi^2(t)$ на том же вероятностном пространстве, что и $\xi^1(t)$, простой перенумерацией: $\xi^2(t) = \varphi(\xi^1(t))$.

Для любой вероятностной меры μ на $\mathfrak{A}_2$ определим корреляционные функции (конечномерные распределения)

$$p(\alpha) = p_\mu(\alpha) = \mu(\{x_0 = a_0, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}\}),$$

где $\alpha = a_0 \ldots a_{n-1}$, $a_i \in \{1, \ldots, r\}$.

Одномерные блуждания с отражением. Для $r = 1$ процесс $\xi(t)$ – это случайное блуждание с отражением с пространством состояний $\mathbb{Z}_+$ (см. [1]). В этом случае закон стабилизации очень простой. Например, для $d = 1$ мы имеем марковскую цепь с дискретным временем $\xi(t) = \xi(j, t)$ на $\mathbb{Z}_+$ с начальным состоянием j и вероятностями скачков $p_{i,i-1} = p$ и $p_{i,i+1} = q = 1 - p$, $p > q$ (вероятность скачка из 0 в 1 равна p_0, а вероятность остаться в 0 равна $1 - p_0$). Для любых вещественных положительных τ и x возьмем начальное состояние $j = [nx]$ достаточно большим, тогда из закона больших чисел с помощью простых рассуждений следует сходимость $\xi([n, x], [\tau, n])/n$ при $n \to \infty$ по вероятности к константе $\max\{0, x + \tau(q - p)\}$; таким образом, получается детерминированное движение с постоянной скоростью $q - p$. Попав в начало координат, частица остается там навсегда. Многомерный случай описан в [1], подобного рода детерминированные масштабные пределы называются законами Эйлера или уравнениями Эйлера. Для $r \geqslant 2$ предельное поведение эйлеровского типа также имеет место, но существуют и другие более сложные законы, которые становятся тривиальными при $d = 1$. Цель настоящей статьи – исследовать эти законы. Дадим теперь основное определение.

Законы стабилизации (невозвратный случай). Пусть марковская цепь $\xi(t)$ невозвратна. Мы будем говорить, что законы стабилизации T1 (соответственно T2) имеют место, если

T1. Существует единственная стационарная мера μ процесса $\xi^2(t)$ и для любых фиксированных $k, a_0, \ldots, a_{k-1}$

$$P(\xi_{n(t)}(t) = a_0, \ldots, \xi_{n(t)-k+1}(t) = a_{k-1}) \to p_\mu(a_0 \ldots a_{k-1}) \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

где $n(t)$ – длина, а $\xi_{n(t)}(t)$ – самый левый символ струны $\xi(t)$.

T2. Имеет место сходимость по вероятности

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n(t)}{t} = v$$

для некоторой константы $v > 0$.

Замечание 2. Заметим, что в T1 и T2 для начальной точки не выполняется скейлинг по пространству.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия* **B**, **H**, **ND** *и пусть* $\xi(t)$ *невозвратна. Тогда выполнен закон* T1.

В эргодическом случае существование законов стабилизации менее очевидно, поскольку эволюция, начинающаяся с достаточно длинной струны, сильно зависит от начального состояния (мы увидим, что в невозвратном случае зависимость от начального состояния теряется экспоненциально быстро). Наиболее интересные законы стабилизации имеют условную форму: например, если мы начинаем с условного стационарного распределения (при условии, что длина струны равна N), то ее движение назад к нулю детерминировано и постоянно.

Законы стабилизации (эргодический случай). Пусть $\xi(t)$ эргодична. Мы будем говорить, что законы стабилизации E1(i), E1(ii), E2 выполнены, если соответственно:

E1(i). Для любых фиксированных $k \geqslant 0, a_0, \ldots, a_{k-1} \in \{1, \ldots, r\}$ и $n \leqslant N$, условное (для фиксированного N) стационарное распределение

$$\pi(\{\beta = b_N \ldots b_1 : b_n = a_0, \ldots, b_{n-k+1} = a_{k-1}\} \mid n(\beta) = N) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{b_1,\dots,b_{n-k},b_{n+1},\dots,b_N} \pi(\beta = b_N \dots b_1 : b_n = a_0, \dots, b_{n-k+1} = a_{k-1})}{\sum\limits_{\beta=b_N\dots b_1} \pi(\beta)} \tag{1.1}$$

стремится к некоторому $p(a_0 \dots a_{k-1})$ при n и $N-n$ (а следовательно, и N), стремящихся к бесконечности. Величины $p(a_0 \dots a_{k-1})$ не зависят от того, каким образом n и $N-n$ стремятся к бесконечности.

E1(ii). Для любых фиксированных $k, a_0, \dots, a_{k-1}$ условное стационарное распределение

$$\pi\big(\{\beta = b_N \dots b_1 : b_N = a_0, \dots, b_{N-k+1} = a_{k-1}\} \mid n(\beta) = N\big)$$

стремится при $N \to \infty$ к некоторому $p'(a_0 \dots a_{k-1})$.

E2. Предположим, что при $t = 0$ мы начинаем с условного стационарного распределения при условии, что длина струны равна $[xN]$, x и t – вещественные положительные числа. Тогда по вероятности

$$\frac{n([tN])}{N} \to U_t x = \max(0, x + vt)$$

при $N \to \infty$, так что U_t есть детерминированное движение со скоростью $v < 0$; попав в 0, оно остается там навсегда.

Т е о р е м а 2. *Если $\xi(t)$ эргодична, то* E1 *имеет место.*

Мы доказываем эту теорему в §2. Теорема 1 доказана в §3.

Среди прочих результатов мы получаем, что T2 и E2 также выполнены. Очевидно, E1 и T1 являются намного более сильными утверждениями, чем E2 и T2.

§ 2. Эргодический случай

Д о к а з а т е л ь с т в о E1. Уравнения для стационарных вероятностей

$$\pi_\alpha = \sum_\beta \pi_\beta p_{\beta\alpha} \tag{2.1}$$

обладают следующими свойствами "трансляционной инвариантности" (условие **H**), которое мы используем в доказательстве: $p_{\beta\alpha}$ отлично от нуля, только если правые части струн α и β (обе длины $n(\beta) - d$) совпадают и, более того, $p_{\beta\alpha}$ не зависят от этой общей части.

Для ориентации читателя приведем план доказательства.

1. Мы решаем уравнения (2.1) в терминах вероятностей путей (или вероятностей запретов) в удобной для нас форме (см. уравнение (2.2)).

2. Мы используем "частичное пересуммирование", чтобы представить это решение в мультипликативной форме (см. уравнение (2.7)), где основным множителем является частичный след матрицы Q^N, Q – "трансфер-матрица".

3. Мы используем гиббсовское представление для условных стационарных вероятностей и стандартный формализм трансфер-матриц, чтобы получить асимптотическое сокращение числителя и знаменателя.

Пути. Определим путь Γ как последовательность струн $\alpha^0, \dots, \alpha^M$, $M = 0, 1, \dots$, такую, что $|n(\alpha^i) - n(\alpha)^{i-1}| \leqslant d$, $i = 1, \dots, M$, и $p_{\alpha^{i-1}\alpha^i} \neq 0$. Обозначим через $\alpha(\Gamma) = \alpha^M$ последнюю струну в Γ и будем писать $\Gamma(\alpha)$ для пути Γ с $\alpha(\Gamma) = \alpha$. Обозначим через $\alpha^0(\Gamma) = \alpha^0$ первую струну в Γ. Иначе говоря, путь Γ – это конечная последовательность состояний марковской цепи. Вклад Г определяется следующим образом:

$$q(\Gamma) = \prod_{i=1}^{M} p_{\alpha^{i-1}\alpha^{i}},$$

где $p_{\alpha^{i-1}\alpha^{i}} = q(\gamma_i, \delta_i)$, если $n(\alpha^{i-1}) \geqslant d$. Мы полагаем $q(\Gamma) = 1$, если $M = 0$.

Л е м м а 1. *Для* $n(\alpha) \geqslant d$

$$\pi(\alpha) = \sum_{\Gamma} \pi(\alpha^0(\Gamma)) q(\Gamma) = \sum_{\beta \in A} \pi(\beta)_A p^{*}_{\beta\alpha}, \tag{2.2}$$

где в первой сумме суммирование ведется по всем Г таким, что $\alpha(\Gamma) = \alpha$, $n(\alpha^0(\Gamma)) < d$, $n(\alpha^i) \geqslant d$, $i = 1, \ldots, M$. Во второй сумме $A = A_d$ есть множество всех струн длины, не превосходящей d, ${}_A p^{*}_{\beta\alpha}$ есть среднее число посещений состояния α марковской цепью, выходящей из β, прежде чем она попадет в состояние A, исключая оба конца (см. [2]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напишем уравнения для $\alpha \notin A$

$$\pi_\alpha = \sum_{\beta \notin A} \pi_\beta p_{\beta\alpha} + \sum_{\gamma \in A} \pi_\gamma p_{\gamma\alpha}$$

и проитерируем систему

$$\pi_\alpha = \sum_{\beta \notin A} \pi_\beta \, {}_A p^{(n)}_{\beta\alpha} + \sum_{\theta \in A} \sum_{k=1}^{n} \pi_\theta \, {}_A p^{(k)}_{\theta\alpha}. \tag{2.3}$$

Здесь ${}_A p^{(n)}_{\theta\alpha}$ есть вероятность того, что марковская цепь, выходящая из θ, находится в n-й момент времени в состоянии α и ни разу не посетила множество A (исключая оба конца). Итак,

$${}_A p^{*}_{\theta\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} {}_A p^{(n)}_{\theta\alpha}.$$

Как следует из возвратности, ${}_A p^{(n)}_{\beta\alpha}$ стремится к нулю при $n \to \infty$ для любого β, поэтому первая сумма в (2.3) также стремится к нулю. Отсюда следует (2.2).

Гиббсовская формула. Подставляя (2.2) в (1.1), получим, что для любого $n > k+d$ и любой струны $\alpha = a_0 \ldots a_{k-1}$

$$\pi(\{\beta = b_N \ldots b_1 : b_N = a_0, \ldots, b_{N-k+1} = a_{k-1}\} \mid n(\beta) = N) = \\ = \frac{\sum^{\alpha,n} \pi(\alpha^0(\Gamma)) q(\Gamma)}{\sum \pi(\alpha^0(\Gamma)) q(\Gamma)}. \tag{2.4}$$

В знаменателе сумма берется по путям с последней струной длины N, т.е. по путям $\Gamma = \Gamma(\beta)$ с $n(\beta) = N$, в числителе сумма берется по всем $\Gamma = \Gamma(\beta)$, $\beta = b_N \ldots b_1$, с $n(\beta) = N$ и $b_n = a_0, \ldots, b_{n-k+1} = a_{k-1}$; более того, все эти пути удовлетворяют ограничениям леммы 1.

Пересуммирование. Мы хотим выполнить пересуммирование в формуле (2.2). Для этого нам понадобятся следующие технические определения.

Для любого интервала $I = [l, m]$, $l \leqslant m$, определим I-часть $\alpha(I)$ струны α как подструну, состоящую из символов, занумерованных индексами из I (θ называется подструной струны α, если $\alpha = \beta\theta\gamma$ для некоторых струн β, γ).

Разделение пути. Мы выполним пересуммирование, используя разделение пути Γ между двумя последовательными существенными индексами, к определению которых мы переходим. Для любого $\Gamma = \alpha^0, \ldots, \alpha^M = \alpha$, $M = 1, 2, \ldots$, и любых k, $d \leqslant k \leqslant N - d$, $N = n(\alpha)$, определим индекс $j = j(\Gamma, k)$ следующим образом. Эвристически это первый момент, когда процесс "не трогает" более первые $k-1$ символов струны, но может затрагивать k-й символ, не изменяя его. Точнее, это минимальный индекс j, удовлетворяющий следующим условиям:

(i) $\alpha^i([1,k]) = \alpha([1,k])$ для всех $i \geqslant j$;

(ii) $n(\alpha^i) \geqslant k + d - 1$ для всех $i \geqslant j$.

Итак,

$$k + d - 1 \leqslant n(\alpha^j) \leqslant k + 2d - 1, \tag{2.5}$$

второе неравенство следует из минимальности j. Мы называем такие индексы *существенными.*

Для любого пути $\Gamma = \alpha^0, \ldots, \alpha^M = \alpha = x_N \ldots x_1$, определим пару $(x_k, \gamma_k) = (x_k(\Gamma), \gamma_k(\Gamma))$, $\gamma_k = \alpha^j([k+1, \infty])$ для $j = j(\Gamma, k)$. Итак,

$$d - 1 \leqslant n(\gamma_k) \leqslant 2d - 1. \tag{2.6}$$

Множество путей между существенными индексами. Для любых двух путей $\Gamma_1 = \beta^0, \ldots, \beta^M$ и $\Gamma_2 = \gamma^0, \ldots, \gamma^N$ определим их композицию $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2$ следующим образом:

$$\Gamma_1\Gamma_2 = \alpha^0, \ldots, \alpha^{M+N+1} = \beta^0, \ldots, \beta^M, \gamma^0, \ldots, \gamma^N.$$

Путь Γ_1 назовем подпутем пути Γ, если $\Gamma = \Gamma_2\Gamma_1\Gamma_3$ для некоторых путей Γ_2 и Γ_3.

Опишем теперь формально множество возможных подпутей между двумя последовательными существенными индексами. Для любого $k \geqslant d$, любой струны β, $n(\beta) = k-1$, любых двух пар (x, γ), (y, δ), где $x, y \in \{1, \ldots, r\}$, γ и δ – любые струны, удовлетворяющие условиям

$$d - 1 \leqslant n(\gamma), \quad n(\delta) \leqslant 2d - 1,$$

определим множество $G(k, \beta; (x, \gamma), (y, \delta))$ всех путей $\Gamma = \alpha^0, \ldots, \alpha^M = \alpha$, $M = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих следующим условиям:

(a) $\alpha^0 = \gamma x \beta$;

(b) $\alpha^M = \delta y x \beta$;

(c) $\alpha^i([1,k]) = x\beta$ для всех i;

(d) $n(\alpha^i) \geqslant k + d - 1$ для всех i;

(e) не существует L такого, что подпуть $\Gamma^{(L)} = \alpha^0, \ldots, \alpha^L$, $L < M$, пути Γ с $\alpha^L = \theta y x \beta$ для некоторой θ, $d - 1 \leqslant n(\theta) \leqslant 2d - 1$, удовлетворяет свойству, что для всех $i > L$ $n(\alpha^i) \geqslant k + d$ и $\alpha^i([1, k+1]) = yx\beta$. Это есть фактически переформулировка свойства минимальности последующего индекса.

Трансфер-матрица. Определим трансфер-матрицу $Q = (g((x,\gamma),(y,\delta)))$, строки и столбцы которой занумерованы парами (x, γ), $x \in \{1, \ldots, r\}$, $d - 1 \leqslant n(\gamma) \leqslant 2d - 1$, а $g((x,\gamma),(y,\delta))$ есть сумма $\sum_{\Gamma} q(\Gamma)$ вкладов всех путей $\Gamma \in G(k, \beta; (x,\gamma),(y,\delta))$. Заметим, что это определение не зависит от выбора β и k.

Таким образом, Q определена на конечномерном пространстве $\mathcal{B}$ вещественных функций на множестве определенных выше пар (x, γ). Положим $D = \dim \mathcal{B}$. Обозначим через $e(x, \gamma)$ функцию, равную 1 на (x, γ), и 0 – в остальных случаях. Скалярное произведение в $\mathcal{B}$ определяется так $(f, r \in \mathcal{B})$:

$$(f,g) = \sum_{(x,\gamma)} f((x,\gamma))\, r((x,\gamma)).$$

Лемма 2. *Числа* $g((x,\gamma),(y,\delta))$ *конечны и положительны.*

Доказательство. Числа $g((x,\gamma),(y,\delta))$ ограничены сверху средним числом посещений марковской цепью, выходящей из $\gamma x\beta$, состояния $\delta y x\beta$, прежде чем она попадет в множество A_{k+d-1}. Эта величина ограничена сверху средним временем достижения A_{k+d-1}, которое конечно в силу эргодичности.

Замечание 3. Альтернативное доказательство леммы 2 не требует ни эргодичности, ни даже возвратности: каждый раз, когда текущее состояние является струной длины $k+d-1$, на следующем шаге мы попадем в A_{k+d-1} с вероятностью $\varepsilon > 0$ (ε равномерно по k). Другими словами, условная вероятность (при условии, что начальным состоянием является струна длины $k+d-1$) снова вернуться в A_{k+d}, не заходя по пути в A_{k+d-1}, не превосходит $1-\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Поэтому сумма $\sum_{\Gamma} q(\Gamma)$ вкладов всех путей $\Gamma \in G(k,\beta;(x,\gamma),(y,\delta))$ ограничена величиной $1+\sum_{k} k(1-\varepsilon)^{k-1}$.

Формулы пересуммирования. Для начальной и конечной части пути необходимо использовать несколько измененные формулы пересуммирования. Для произвольных струн β, θ, γ таких, что

$$n(\beta) < d, \quad n(\theta) = d, \quad d-1 \leqslant n(\gamma) \leqslant 2d-1,$$

определим множество $G_0(\beta;\theta,\gamma)$ всех путей $\Gamma = \alpha^0,\ldots,\alpha^M = \alpha$, $M = 1,2,\ldots$, обладающих следующими свойствами:

(a0) $\alpha^0 = \beta$;

(b0) $\alpha^M = \gamma\theta$;

(c0) $n(\alpha^i) \geqslant d$ для всех i;

(d0) не существует подпути $\Gamma^{(L)} = \alpha^0,\ldots,\alpha^L$, $L < M$, такого, что $\alpha^L = \delta\theta$ для некоторого δ, $d-1 \leqslant n(\delta) \leqslant 2d-1$, $n(\alpha^i) \geqslant 2d-1$ и $\alpha^i([1,d]) = \theta$ для всех $i > L$. Это означает минимальность индекса $j = j(\Gamma,d)$.

Для любых струн $\alpha = x_N \ldots x_1$ и γ, $d-1 \leqslant n(\gamma) \leqslant 2d-1$, определим множество $G_N(\alpha,\gamma)$ всех путей $\Gamma = \alpha^0,\ldots,\alpha^M = \alpha$, $M = 0,1,2,\ldots$, удовлетворяющих следующим условиям:

(aN) $\alpha^0 = \gamma\alpha([1,N-d-1])$;

(bN) $\alpha^M = \alpha$;

(cN) $n(\alpha^i) \geqslant N$ и $\alpha^i([1,N-d-1]) = \alpha([1,N-d-1])$ для всех $i \leqslant M$.

Обозначим через $q_0(\beta;\theta,\gamma)$ и $q_N(x_{N-d},\ldots,x_N,\gamma)$ суммы вкладов всех путей, принадлежащих $G_0(\beta;\theta,\gamma)$ и $G_N(\alpha,\gamma)$ соответственно. Очевидно, $q_N(x_{N-d},\ldots,x_N,\gamma)$ не зависит от $\alpha([1,N-d-1])$. Рассуждения, подобные доказательству леммы 2, показывают, что $q_0(\beta;\theta,\gamma)$ и $q_N(x_{N-d},\ldots,x_N,\gamma)$ конечны.

Лемма 3. *Для любой* $\alpha = x_N \ldots x_1$ $(N > 3d)$

$$\pi(\alpha) = \sum_{\beta:n(\beta)<d} \; \sum_{\gamma_d,\ldots,\gamma_{N-d}} \pi(\beta) q_0\big(\beta;\alpha([1,d]),\gamma_d\big) \times$$

$$\times \left[\prod_{k=d}^{N-d-1} q\big((x_k,\gamma_k),(x_{k+1},\gamma_{k+1})\big)\right] q_N(x_N,\ldots,x_{N-d},\gamma_{N-d}). \tag{2.7}$$

Доказательство. Рассмотрим любой $\Gamma = \Gamma(\alpha) = \alpha^0,\ldots,\alpha^M = \alpha = (x_N,\ldots,x_1)$, $n(\alpha) = N$, и последовательность индексов, определенных выше,

$$j(\Gamma,d-1) = 0 < j(\Gamma,d) \leqslant \ldots \leqslant j(\Gamma,k) \leqslant \ldots \leqslant j(\Gamma,N-d) \leqslant j(\Gamma,N-d+1) = M.$$

Определяя подпуть Γ_k, $k = d-1, \ldots, N-d-1$ как последовательность

$$\alpha^0(\Gamma_k) = \alpha^{j(\Gamma,k)}, \ldots, \alpha^{j(\Gamma,k+1)} = \alpha(\Gamma_k)$$

и полагая

$$\gamma_k x_k \ldots x_1 = \alpha^0(\Gamma_k) = \alpha(\Gamma_{k-1})$$

(для фиксированных γ_k и γ_{k+1} мы иногда будем писать $\Gamma(\gamma_k, \gamma_{k+1})$ вместо Γ_k), мы можем представить $q(\Gamma)$ в виде произведения:

$$q(\Gamma) = \prod_{i=d-1}^{N-d-1} q(\Gamma_i).$$

Теперь из (3) получаем

$$\pi(\alpha) = \sum \pi\big(\alpha^0(\Gamma)\big) q(\Gamma) = \sum_{\Gamma_{d-1},\ldots,\Gamma_{N-d-1}} \pi\big(\alpha^0(\Gamma)\big) \prod_{i=d-1}^{N-d-1} q(\Gamma_i) =$$

$$= \sum_{\gamma_d,\ldots,\gamma_{N-d-1}} \sum_{\{\Gamma_k=\Gamma_i(\gamma_k,\gamma_{k+1})\}} \pi\big(\alpha^0(\Gamma)\big)\, q(\Gamma_{d-1}) \left[\prod_{k=d}^{N-d-2} q(\Gamma_k)\right] q(\Gamma_{N-d-1}),$$

а это в точности (2.7).

Статистическая сумма. Это знаменатель в (2.4), или просто $Z_N = \sum\limits_{\alpha:n(\alpha)=N} \pi(\alpha)$. Определяя "начальный" вектор

$$a = a(x_d, \gamma_d) = \sum_{\beta:n(\beta)<d} \sum_{\theta:n(\theta)=d-1} q_0(\beta; x_d\theta, \gamma_d)$$

и "конечный" вектор

$$b = b(x_{N-d}, \gamma_{N-d}) = \sum_{x_{N-d+1},\ldots,x_N} q_N(x_N, \ldots, x_{N-d}, \gamma_{N-d}),$$

мы получаем следующее утверждение.

Лемма 4. *Знаменатель в* (2.4)

$$Z_N = (aQ^{N-2d}, b) \sim C\lambda_1^{N-2d} \tag{2.8}$$

для некоторых C, $\lambda_1 > 0$.

Доказательство. Равенство получается суммированием в (2.7) по $x_1, \ldots, x_N$, $\gamma_d, \ldots, \gamma_{N-d+1}$ при фиксированном N.

Пусть $e_1, \ldots, e_D$ – собственные векторы Q с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_D$, $\lambda_1 > |\lambda_i|$, $i = 2, \ldots, D$, $\lambda_1 > 0$. Заметим, что по теореме Перрона – Фробениуса e_1 – положительный собственный вектор и существует $c_1 > 0$ такое, что ([4, с. 282, теорема 4])

$$aQ^k \sim c_1\lambda_1^k e_1, \quad Z_k \sim c_1\lambda_1^k(e_1, b).$$

Заметим, что эргодичность эквивалентна тому, что $\lambda_1 < 1$, так как из эргодичности следует, что $Z_k \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда получаем следующую лемму.

Лемма 5. *Статистическая сумма*

$$Z_N = \sum_{\alpha : n(\alpha)=N} \pi(\alpha)$$

убывает экспоненциально быстро по N.

Корреляционные функции. Рассмотрим E1 (ii) (случай E1 (i) аналогичен). Мы можем получить асимптотику числителя в (2.4) таким же образом, как и для статсуммы:

$$\sum_{\beta_1,\ldots,\beta_{N-k}} \pi(\beta = b_N \ldots b_1 : b_N = a_0, \ldots, b_{N-k+1} = a_{k-1}) =$$
$$= (aQ^{N-k-2d}, f) \sim C(a_0, \ldots, a_{k-1})\lambda_1^{N-k-2d}, \qquad (2.9)$$

где $f = f(a_0, \ldots, a_{k-1})$ – положительный вектор из $\mathcal{B}$ с компонентами

$$f(x_{N-d-k}, \gamma_{N-d-k}) =$$
$$= \sum_{x_{N-k-d+1},\ldots,x_{N-k-1}} q_N(a_0, \ldots, a_{k-1}; x_{N-k-1}, \ldots, x_{n-k-d}, \gamma_{N-k-d}),$$

а $q_N(a_0, \ldots, a_{k-1}; x_{N-k-1}, \ldots, x_{n-k-d}, \gamma)$ – сумма вкладов всех путей, принадлежащих $G_N(a_0, \ldots, a_{k-1}; x_{N-k-1}, \ldots, x_1; \gamma)$.

Множество путей $G_N(a_0, \ldots, a_{k-1}; x_{N-k-1}, \ldots, x_1; \gamma)$ определяется подобно $G_N(\alpha, \gamma)$. Для любых струн $\alpha = x_N \ldots x_1$ и γ, $d-1 \leqslant n(\gamma) \leqslant 2d-1$, $x_N = a_0, \ldots, x_{N-k} = a_{k-1}$, определим множество $G_N(a_0, \ldots, a_{k-1}; x_{N-k-1}, \ldots, x_1; \gamma)$ всех путей $\Gamma = \alpha^0, \ldots, \alpha^M = \alpha$, $M = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих следующим условиям:

(a) $\alpha = \gamma\alpha([1, N-k-d])$;

(b) $\alpha^M = \alpha$;

(c) $n(\alpha^i) \geqslant N-k-1$ и $\alpha^i([1, N-k-d]) = \alpha([1, N-k-d])$ для всех $i \leqslant M$.

Из (2.8) и (2.9) получаем E1 (ii).

В случае E1 (i) для числителя вместо (2.9) можно получить

$$\sum_{b_1,\ldots,b_{n-k},b_{n+1},\ldots,b_N} \pi(\beta = b_N \ldots b_1 : b_n = a_0, \ldots, b_{n-k+1} = a_{k-1}) =$$
$$= (aQ^{n-k+1-2d} T Q^{N-n-d}, b) \qquad (2.10)$$

Мы оставляем читателю доказательство (2.10) и определение положительной матрицы T.

Т е о р е м а 3. *Конечномерные распределения* $p(a_0 \ldots a_{k-1})$ *в* E1 (i) *задают стационарное поле* $\eta(i)$ *на* $\mathbb{Z}$. *Более того, сходимость в* E1 (i) *для фиксированных* $a_0, \ldots, a_{k-1}$ *является экспоненциальной*:

$$B(a_0, \ldots, a_{k-1})\varepsilon^{\min(N, N-n)} \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > \max_{i=2,\ldots,D} \frac{|\lambda_i|}{\lambda_1}, \qquad (2.11)$$

и корреляции стационарного поля $\eta(i)$ *убывают экспоненциально со скоростью* (2.11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение следует из (2.8) и (2.10). Второе получается из стандартных рассуждений о трансфер-матрице, если вместо (2.10) рассмотреть асимптотику, например,

$$\sum_{b_1,\ldots,b_{n-1},b_{n+1},\ldots,b_{m-1},b_{m+1},\ldots,b_N} \pi(\beta = b_N\ldots b_1 : b_n = a_0, b_m = a_1) =$$

$$= (aQ^{n-2d}T_1Q^{r-2d}T_2Q^{N-m-d}, b), \tag{2.12}$$

где $m = n + r$. Зафиксируем вначале r и рассмотрим асимптотику по n и $N - n$. Затем рассмотрим большие r.

Доказательство E2. Положим $d = 1$ для простоты записи. Пусть $\xi(0)$ есть случайная струна $x_{[Nx]}\ldots x_1$ фиксированной длины $[Nx]$, ее распределение задается некоторым случайным процессом $\eta(i)$, $i \in \mathbb{Z}$, со значениями в $\{1,\ldots,r\}^{\mathbb{Z}}$. Точнее, положим $x_{[Nx]} = \eta([Nx]),\ldots,x_1 = \eta(1)$. Пусть τ_n – первый момент, когда $n(\xi(t)) = n$. Случайные величины $s_n = \tau_{n-1} - \tau_n$ – условно независимы при условии заданного $\xi(0)$, а распределение s_n зависит только от x_n. Если $\eta(i)$ – стационарный и эргодический процесс, то

$$\lim \frac{\tau_n}{[Nx]-n} \to 1/v = \mathbf{E}F_k, \quad F_k = s_k, \tag{2.13}$$

по вероятности, когда $[Nx] - n$ стремится к бесконечности, v – константа (заметим, что знак ее не зависит от процесса η), $\mathbf{E}$ обозначает условное среднее по распределению ξ с последующим усреднением относительно η.

В нашем случае $\xi(0)$ не порождается стационарным эргодическим процессом, однако экспоненциально сходится к нему при $N \to \infty$. Поэтому (2.13) выполнено. С использованием (2.13) E2 легко следует из рассуждений теории восстановления.

§ 3. Невозвратный случай

Лемма 6. *Пусть выполнены условия* **B**, **H**, **ND** *и пусть процесс $\xi(t)$ невозвратен. Тогда существует χ, $0 < \chi < 1$ такое, что для любого n, любого $k < n$ и любой струны α, $n(\alpha) = n$, вероятность $f_{\alpha k}$, выходя из α, попасть когда-либо в множество A_{n-k+1} струн длины, меньше или равной $n - k$, не превосходит*

$$f_{\alpha k} < \chi^{k/d}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Из невозвратности следует, что $n(t) \to \infty$ п.н., какой бы ни была начальная струна. Поэтому существует струна $\gamma = \gamma_N\ldots\gamma_1$, $n(\gamma) = N > 2d$ такая, что для процесса $\xi(\gamma, t)$, начинающегося с γ, событие $\{n(\xi(\gamma,t)) > 2d$ для всех $t\}$ имеет положительную вероятность. Но по условию **HD** для любой струны α мы можем пройти цепочку $\alpha, \gamma_1\alpha, \gamma_2\gamma_1\alpha, \ldots, \gamma_N\ldots\gamma_1\alpha$ от α до $\gamma\alpha$ за N шагов с положительной вероятностью, отделенной от нуля равномерно по α. Поэтому существует ε, $0 < \varepsilon < 1$ такое, что для любой струны α событие $\{$для всех t α является самой правой струной процесса $\xi(t) = \xi(\alpha, t)$, начинающегося в $\alpha\}$ имеет вероятность, не меньшую, чем ε. Следовательно, $f_{\alpha 1} < \chi = 1 - \varepsilon$. Отсюда следует (3.1).

Лемма 7. *В условиях леммы* 6 *процесс $\xi^2(t)$ имеет единственную инвариантную меру μ, и для любой начальной меры его корреляционные функции сходятся к корреляционным функциям μ.*

Доказательство. Из компактности следует существование по крайней мере одной инвариантной меры ν. Используем метод каплинга: на одном вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) построим два экземпляра $\eta^2(t) = (x_0(t), x_1(t), \ldots)$ и $\varphi^2(t) = (y_0(t), y_1(t), \ldots)$ процесса $\xi^2(t)$ с начальными распределениями μ и ν соответственно и так, что для любого k существует п.н. $t_k(\omega) < \infty$ такое, что $x_i(t) = y_i(t)$ для всех $i \leqslant k$ и всех $t > t_k(\omega)$.

Заметим вначале, что для любого начального распределения процесс $\xi^1(t) = (k = k(t); z_k(t), z_{k+1}(t), \dots)$ обладает следующим свойством: $k(t) \to -\infty$ п.н. при $t \to \infty$. Доказательство аналогично доказательству леммы 6.

Мы начинаем с независимых процессов $\eta^2(t)$ и $\varphi_0^2(t) = (y_0^0, y_1^0, \dots)$ с начальными распределениями μ и ν соответственно и будем рассматривать также независимые процессы $\eta^1(t) = (l = l(t); z_l(t), \dots)$ и $\varphi_0^1(t) = (m = m(t); u_m(t), \dots)$ с начальными распределениями μ и ν с носителями на множествах $(0; z_0(0), z_1(0), \dots)$ $(0; u_0(0), u_1(0), \dots)$ соответственно; $\eta^2(t)$ и $\varphi_0^2(t)$ однозначно определяются по $\eta^1(t)$ и $\varphi_0^1(t)$.

Мы построим теперь по индукции последовательность случайных моментов времени $t_1(\omega) < t_2(\omega) < \dots$ и последовательность процессов $\varphi_1^2, \varphi_2^2, \dots$; $\varphi_i^2 = (y_0^i(t), y_1^i(t), \dots)$.

Определение $t_1(\omega)$. Зафиксируем струну $\gamma = \gamma_N \dots \gamma_1$ из доказательства леммы 6. Для заданного ω пусть $t_1 = t_1(\omega)$ есть первый момент, когда выполнены следующие равенства:

$$\eta^2(t_1 + j) = \big(x_0(t_1 + j), x_1(t_1 + j), \dots\big) = \big(\gamma_j, x_0(t_1 + j - 1), x_1(t_1 + j - 1), \dots\big),$$
$$\varphi_0^2(t_1 + j) = \big(y_0^0(t_1 + j), y_1^0(t_1 + j), \dots\big) = \big(\gamma_j, y_0^0(t_1 + j - 1), y_1^0(t_1 + j - 1), \dots\big)$$

для всех $j = 1, \dots, N$. Пусть событие A_1 состоит в том, что $\{l(t) > l(t_1(\omega))$ для всех $t > t_1 + N\}$. Определим процесс φ_1^2 следующим образом: $\varphi_1^2(t) = \varphi_0^1(t)$, если $\omega \notin A_1$; если же $\omega \in A_1$, положим $y_i^1 = x_i(t)$ для всех $t > t_1 + N$ и всех $i = l(t), l(t) - 1, \dots, l(t_1(\omega))$, и оставим $y_i(t)$ неизменным в противном случае, т.е. $y_i^1(t) = y_i^0(t)$.

Определение $t_2(\omega)$. Для всех $\omega \notin A_1$ пусть $t_2 = t_2(\omega)$ – первый момент, когда выполнены следующие равенства:

$$\eta^2(t) = \big(x_0(t), x_1(t), \dots\big) = \big(\gamma_j, x_0(t-1), x_1(t-1) \dots\big),$$
$$\varphi_1^2(t) = \big(y_0^1(t), y_1^1(t), \dots\big) = \big(\gamma_j, y_0^1(t-1), y_i^1(t-1), \dots\big)$$

для всех $t = t_2 + j$, $j = 1, \dots, N$. В последнем равенстве мы могли бы написать y_i^0 вместо y_i^1. Пусть событие A_2 состоит в том, что $\{l(t) > l(t_2(\omega))$ для всех $t > t_2 + N\}$. Определим процесс φ_2^2 так: $\varphi_2^2 = \varphi^2(t)$, если $\omega \notin A_1 \cup A_2$; если же $\omega \in A_2$, положим $y_i^2(t) = x_i(t)$ для всех $t > t_2 + N$ и всех $i = l(t), l(t) - 1, \dots, l(t_2(\omega))$, и оставим $y_i^1(t)$ неизменным в остальных случаях.

Далее мы продолжаем очевидным образом по индукции. Исходя из независимости η^2 и φ_0^2, понятно, что $t_n(\omega) \to \infty$ п.н. при $n \to \infty$. Таким образом, для любых t, k последовательность $y_k^i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, стабилизируется п.н. Определим

$$y_k(t) = \lim_{i\to\infty} y_k^i(t).$$

Более того, для любого k существует п.н. такое ω, что $x_k(t) = y_k(t)$ для всех $t > t(\omega)$ при некотором конечном $t(\omega)$. Лемма 7 доказана.

Доказательство Т1. Пусть $\xi^2(t)$ – стационарный процесс и в качестве начального распределения взята инвариантная мера μ, и пусть $\xi(t)$ имеет произвольную начальную струну β. Снова возьмем независимые копии этих процессов: $\eta^2(t)$ и $\varphi(t)$ соответственно. Каплинг, выполненный в точности так же, как в лемме 7, доказывает теорему 1. Детали мы оставляем читателю.

Следствие 1. *В Т1 сходимость экспоненциальная, точнее, существуют χ, $0 < \chi < 1$, и $C(k) > 0$, $k = 0, 1, \dots$, такие, что*

$$\big|P(\xi_{n(t)}(t) = a_0, \dots, \xi_{n(t)-k}(t) = a_k) - p_\mu(a_0 \dots a_k)\big| < C(k)\chi^t$$

для всех $a_0, \dots, a_k$.

Доказательство следует из того очевидного факта, что $P(t < t_k$ для всех $k)$ экспоненциально мала по t равномерно по начальным условиям.

Д о к а з а т е л ь с т в о Т2. Мы докажем, например, что при $d = 1$

$$v = \sum_{\alpha_1} p_\mu(\alpha_1)\left(\sum_{\alpha_0\beta_0} q(\alpha_1, \alpha_0\beta) - q(\alpha_1, \varnothing)\right). \tag{3.2}$$

Так как $\mathbf{E}n(t) \sim vt$, нам нужно лишь доказать, что $\mathbf{D}n(t) \sim Ct$ для некоторого $C > 0$. Положим

$$n(t) = \sum_{\tau=1}^{t} s(\tau), \quad s(\tau) = n(\tau) - n(\tau - 1).$$

Из следствия 1 получаем, например,

$$\bigl|P\bigl(n(t+1) = n(t) + 1, \xi_{n(t)+1}(t+1) = b_0, \ldots, \xi_{n(t)-d+1} = b_{d+1}, \xi_{n(t)}(t) = a_0, \ldots$$
$$\ldots, \xi_{n(t)-k}(t) = a_k\bigr) - p_\mu(a_0 \ldots a_k) q(a_0 \ldots a_{d-1}, b_0 \ldots b_d)\bigr| < C(k)\chi^t, \quad k > d.$$

Отсюда имеем следующую оценку для ковариации $(\tau' > \tau)$

$$\bigl|(s(\tau), s(\tau'))\bigr| \equiv \bigl|\mathbf{E}s(\tau)s(\tau') - \bigl(\mathbf{E}s(\tau)\bigr)\bigl(\mathbf{E}s(\tau')\bigr)\bigr| =$$
$$= \bigl|\mathbf{E}\bigl[s(\tau)\mathbf{E}(s(\tau') \,|\, \xi(\tau))\bigr] - \mathbf{E}\bigl[s(\tau)\bigr]\mathbf{E}\bigl[\mathbf{E}(s(\tau') \,|\, \xi(\tau))\bigr]\bigr| < C\lambda^{|\tau'-\tau|}$$

для некоторого λ, $0 < \lambda < 1$.

Теперь найдем инвариантную меру μ. Пусть $\mathbb{P} = (p_{\alpha\beta})$, $p_{\alpha\beta} = P(\xi(t+1) = \beta \,|\, \xi(t) = \alpha)$ – переходный оператор для марковской цепи $\xi(t)$. Таким образом, если мы рассмотрим вектор-столбец $p_t = (P(\xi(t) = \alpha), \alpha \in \mathfrak{A})$, то

$$p_{t+1} = p_t \mathbb{P}. \tag{3.3}$$

Введем вектор-строку корреляционных функций $p = (p(\alpha), \alpha \in \mathfrak{A})$. Тогда стационарная мера μ процесса $\xi^2(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$p = p\mathbb{R} = p\mathbb{P}_1 + c, \tag{3.4}$$

где $\mathbb{P}_1$ называется главной частью $\mathbb{P}$, а $c = (c(\alpha), \alpha \in \mathfrak{A})$ – некоторый вектор. Мы определим $\mathbb{P}_1$ и c, выписывая явно эти уравнения (для простоты мы выписываем их для $d = 1$).

Для произвольного символа $\alpha_0 \in \{1, \ldots, r\}$ (суммирование ведется по $\alpha_1, \beta_0 \in \in \{1, \ldots, r\}$)

$$p(\alpha_0) = \sum_{\alpha_1} p(\alpha_1)\left[q(\alpha_1, \alpha_0) + \sum_{\beta_0} q(\alpha_1, \alpha_0\beta_0)\right] + \sum_{\alpha_1} p(\alpha_1\alpha_0) q(\alpha_1; \varnothing). \tag{3.5}$$

Если $n(\gamma) \geqslant 1$, $\gamma = \gamma_0 \ldots \gamma_{n-1}$, то

$$p(\alpha_0\gamma) = \sum_{\alpha_1} p(\alpha_1\gamma) q(\alpha_1, \alpha_0) + \sum_{\alpha_1} p(\alpha_1\gamma_1 \ldots \gamma_{n-1}) q(\alpha_1, \alpha_0\gamma_0) +$$
$$+ \sum_{\alpha_1} p(\alpha_1\alpha_0\gamma) q(\alpha_1; \varnothing). \tag{3.6}$$

Уравнения (3.5), (3.6) образуют бесконечную систему связанных уравнений. Мы можем переписать (3.6) в следующем виде:

$$p(\beta) = \sum_{\alpha} p(\alpha) p_{\alpha\beta}, \quad n(\beta) \geqslant 2,$$

так что имеется совпадение с соответствующими уравнениями в (3.3). Но (3.5) отличается, для $n(\beta) = 1$ имеем:

$$p(\beta) = \sum_{\alpha: n(\alpha)=1} p(\alpha) p^{+}_{\alpha\beta} + c(\beta) + \sum_{\alpha_1} p(\alpha_1 \beta) q(\alpha_1; \varnothing),$$

где $c(\beta) = 0$ для $n(\beta) \geqslant 2$, а для $n(\beta) = 1$ $c(\beta)$ – положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\begin{aligned} c(\beta) &\leqslant \frac{1}{2} \min_{\alpha: n(\alpha)=1} \left(q(\alpha, \beta) + \sum_{\beta_0} q(\alpha, \beta\beta_0) \right), \\ p^{+}_{\alpha,\beta} &= q(\alpha, \beta) + \sum_{\beta_0} q(\alpha; \beta\beta_0) - c(\beta). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Заметим, что в силу условия **ND**

$$\min_{\alpha: n(\alpha)=1} \left(q(\alpha, \beta) + \sum_{\beta_0} q(\alpha, \beta\beta_0) \right) \neq 0.$$

Итерируя (3.4), получаем

$$p = c(1 + \mathbb{P}_1 + \cdots + \mathbb{P}_1^{n-1}) + p\mathbb{P}_1^n. \tag{3.8}$$

Обозначим через $p_1^{(n)}(\alpha, \beta)$ элементы матрицы $\mathbb{P}_1^n$.

Л е м м а 8. *Для всех α, β $p_1^{(n)}(\alpha, \beta) \to 0$ при $n \to \infty$ экспоненциально быстро. Точнее, для данного β*

$$\max_{\alpha: n(\alpha)=k} p_1^{(n)}(\alpha, \beta) < C(\beta) \chi^n, \tag{3.9}$$

где $0 < \chi < 1$ не зависит от β. Если $k > dn$, то $p_1^{(n)}(\alpha, \beta) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 8. Рассмотрим следующее представление $p_1^{(n)}(\alpha, \beta)$ в виде суммы по путям. Снова введем пути $\Gamma = \alpha^0, \ldots, \alpha^n$, $n = 0, 1, \ldots$, как в §3, со следующими отличиями:

1) α^i не может быть $\varnothing$.

2) Вклад Γ определяется следующим образом:

$$q(\Gamma) = \prod_{i=1}^{n} f_{\alpha^{i-1}, \alpha^i},$$

где $f_{\alpha^{i-1}, \alpha^i} = p_{\alpha^{i-1}, \alpha^i}$ для всех α^{i-1}, α^i за исключением случая $n(\alpha^{i-1}) = n(\alpha^i) = 1$. В этом случае $g_{\alpha^{i-1}, \alpha^i} = p^{+}_{\alpha^{i-1}, \alpha^i}$. Тогда

$$p_1^{(n)}(\alpha,\beta) = \sum q(\Gamma), \tag{3.10}$$

где суммирование ведется по всем таким путям: $\Gamma = \alpha^0, \dots, \alpha^n$, $\alpha^0 = \alpha$, $\alpha^n = \beta$.

Чтобы получить оценку сверху для (3.10), нужно подробнее рассмотреть последнюю сумму. Фиксируем путь Γ длины n и рассмотрим его подпути $\Gamma(1) = \alpha^{j(1)} \dots \alpha^{m(1)}$, $\Gamma(2) = \alpha^{j(2)} \dots \alpha^{m(2)}, \dots, \Gamma(k) = \alpha^{j(k)} \dots \alpha^{m(k)}$, для некоторого $k = k(\Gamma)$, и последовательность $\varphi(\Gamma)$:

$$1 = m(0,\Gamma) \leqslant j(1,\Gamma) < m(1,\Gamma) < j(2,\Gamma) < m(2,\Gamma) < \dots$$
$$\dots < j(k,\Gamma) < m(k,\Gamma) \leqslant m(k+1,\Gamma) = n$$

такую, что для любого i α^i и α^{i+1} принадлежат одному из этих подпутей тогда и только тогда, когда $n(\alpha^i) = n(\alpha^{i+1}) = 1$. Назовем такие подпути существенными. Они однозначно характеризуются следующими свойствами.

Пусть $L = L(\Gamma)$ – сумма длин всех $\Gamma(i)$, $i = 1, \dots, k(\Gamma)$. Заметим, что $k(\Gamma) \leqslant L(\Gamma)$. Разобьем сумму $\sum q(\Gamma)$ в (3.10) на две суммы: $\sum' q(\Gamma)$ по всем путям с $L(\Gamma) \geqslant \delta n$ (для некоторого $\delta > 0$, которое мы выберем позже) и $\sum'' q(\Gamma)$ по всем остальным путям.

Л е м м а 9. *Справедлива оценка*

$$\sum{}' q(\Gamma) \leqslant (1-C)^{\delta n}, \quad \textit{где} \quad C = \min_{\beta: n(\beta)=1} c(\beta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрица $\mathbb{R}$ в (3.4) имеет элементы $r_{\alpha\beta} = p^+_{\alpha\beta} + c(\beta)$, если $n(\alpha) = n(\beta)$, и $r_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}$ в остальных случаях. Так же, как матрица $\mathbb{P}_1$ порождает вклады путей $q(\Gamma)$, матрица $\mathbb{R}$ порождает вклады $r(\Gamma)$:

$$r(\Gamma) = \prod_{i=1}^{n} r_{\alpha^{i-1},\alpha^i}.$$

Рассмотрим случай $n(\alpha) = n(\beta) = 1$. Для любых фиксированных α, β мы можем написать

$$p_1^{(n)}(\alpha,\beta) = \sum_\Gamma q(\Gamma), \quad r^{(n)}(\alpha,\beta) = \sum_\Gamma r(\Gamma),$$

где $r^{(n)}(\alpha,\beta)$ – матричный элемент $\mathbb{R}$. Тогда

$$\frac{q(\Gamma)}{r(\Gamma)} \leqslant (1-C)^{L(\Gamma)}$$

и поэтому

$$\frac{p_1^{(n)}(\alpha,\beta)}{r^{(n)}(\alpha,\beta)} = \frac{\sum'_\Gamma q(\Gamma)}{\sum'_\Gamma r(\Gamma)} \leqslant (1-2C)^{\delta n}.$$

Лемма 9 будет доказана, если мы докажем, что $r^{(n)}(\alpha,\beta) \leqslant C(\alpha,\beta) = p(\beta)/p(\alpha)$, где $p(\alpha)$ – стационарные корреляционные функции. А это следует из очевидного неравенства $p(\alpha)r^{(n)}(\alpha,\beta) \leqslant p(\beta)$.

Лемма 10. *Справедлива оценка*

$$\sum'' q(\Gamma) \leqslant \nu^n \quad \textit{для некоторого} \quad 0 < \nu < 1.$$

Доказательство. Для всех Γ в этой сумме рассмотрим подпути $\Gamma'(i) = \alpha^{m(i)} \dots \alpha^{j(i+1)}$ между последовательными существенными подпутями. Мы докажем ниже, что вклад $\Gamma'(i)$ не превосходит $\rho^{j(j+1)-m(i)}$ для некоторого $0 < \rho < 1$. Но

$$\sum_i \bigl(j(i+1) - m(i)\bigr) \leqslant \delta n.$$

Число членов в сумме $\sum'' q(\Gamma)$ не превосходит

$$C_n^{\delta n} \leqslant 2^{2\delta \log(1/\delta) n}.$$

Поэтому

$$\sum'' q(\Gamma) \leqslant \rho^n 2^{2\delta \log(1/\delta) n} \leqslant \nu^n$$

для достаточно малого $\delta > 0$.

Возвращаясь к доказательству оценки для вклада $\Gamma'(i)$, заметим, что найдутся k и $\varepsilon > 0$ такие, что для любой струны α

$$\mathbf{E}\bigl(n(\xi(k)) \,|\, \xi(0) = \alpha\bigr) - n(\alpha) > \varepsilon.$$

Это означает, что $n(\xi(kt))$ является субмартингалом, и экспоненциальная оценка следует из хорошо известных результатов (см., например, [5]).

Лемма 8 следует из лемм 9 и 10.

Из (3.9) следует, что β-компонента вектора $p\mathbb{P}_1^n$ имеет оценку

$$\bigl|(p\mathbb{P}_1^n)(\beta)\bigr| \leqslant \sum_\alpha p(\alpha) p_1^{(n)}(\alpha, \beta) \leqslant \sum_k \sum_{\alpha: n(\alpha)=k} p(\alpha) p_1^{(n)}(\alpha, \beta) \leqslant$$
$$\leqslant \chi^{n/2} \sum_k C(\beta) \chi^{n/2} \leqslant C'(\beta) \chi^{n/2}.$$

Мы доказали, таким образом, следующую теорему.

Теорема 4. *Стационарная мера процесса $\xi^2(t)$ имеет вид*

$$p = c \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_1^n. \tag{3.11}$$

§ 4. Замечания и задачи

Эта работа имеет несколько источников.

1. Сети связи. В серии недавних работ (см. обзор [1]) получены необходимые и достаточные условия эргодичности для многих классов систем с очередями с одним типом заявок (или случайных блужданий с отражением в $\mathbb{Z}_+^N$), а также дан общий подход к этой проблеме. Системы с несколькими типами заявок имеют много общего с системами с одним типом, но наряду с этим им присущи и резко отличные черты. Их обсуждение явилось отправной точкой настоящей статьи, основная цель которой – представить некоторые новые явления в этой области (см. также [6, 7]).

2. Уравнения Эйлера. Как было показано в [1, 8], масштабные пределы, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям, очень важны для понимания необходимых и достаточных условий эргодичности. Эти пределы подобны гидродинамическим пределам для систем взаимодействующих частиц (см. [9]). Основными гидродинамическими преобразованиями масштаба пространства-времени являются $(x/\varepsilon, t/\varepsilon)$ (приводящие при $\varepsilon \to \infty$ к уравнениям эйлеровского типа) и $(x/\varepsilon, t/\varepsilon^2)$ (приводящие к уравнениям диффузионного типа). Интересно, что подобного рода пределы существуют для систем с очередями, даже для очень простых. Здесь пространственная переменная x – это вектор длин очередей. Таким образом, можно говорить о масштабных (по пространству и времени) пределах для очередей.

Второй способ изменения масштаба $(x/\varepsilon, t/\varepsilon^2)$ хорошо известен в теории очередей, см. [10–12]. Обычно его называют диффузионной аппроксимацией.

Первый способ $(x/\varepsilon, t/\varepsilon)$ менее известен (см., однако, [13]). В [5] впервые было показано, что *индуцированное векторное поле*, построенное формально с помощью этой предельной процедуры, совершенно необходимо для получения критерия эргодичности. Это преобразование неявно использовалось в [5], затем обсуждалось в [1, 8].

Для систем с несколькими типами заявок само существование этих пределов даже в простых случаях является открытой проблемой. *Удивительно, однако, что существуют гораздо более тонкие явления* (законы стабилизации), *не имеющие ничего общего со свойствами систем с одним типом заявок, которые мы здесь и обсуждаем.*

3. Явные условия эргодичности и нулевой возвратности найдены в [14]. Какие законы стабилизации выполнены в случае нулевой возвратности?

4. Имеются различные подходы, обладающие определенными преимуществами в некоторых частных случаях: используя обратимость и (или) явные решения формы-произведения, можно получить законы стабилизации для некоторых эргодических случаев: используя субаддитивную эргодическую теорему Кингмана, можно доказать законы стабилизации типа закона больших чисел в некоторых частных случаях.

5. В эргодическом случае $\xi^2(t)$ имеет континуум инвариантных мер, которые могут быть получены с помощью следующей процедуры. Пусть $\eta = \{\eta(i)\}$ – эргодический случайный процесс на $\mathbb{Z}$; положим $\xi^2(0) = (\eta(0), \ldots, \eta(i), \ldots)$. Тогда $\xi^2(t)$ сходится при $t \to \infty$ к инвариантной мере, зависящей от η.

6. Марковские сети связи BCMP с дисциплиной LIFO принадлежат введенному выше классу одномерных процессов. Дисциплина FIFO приводит к классу процессов с локализованным взаимодействием, когда оба конца струны эволюционируют. Точнее, струна $\gamma_1\alpha\gamma_2$ может превратиться в $\gamma_3\alpha\gamma_4$, $n(\gamma_i) \leqslant d$, с некоторой вероятностью $q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$.

Представляется очень естественным ввести класс случайных процессов, занимающих промежуточное положение между случайным блужданием с отражением и процессами с локальным взаимодействием и находящихся в такой же связи с системами очередей с несколькими типами заявок, как случайное блуждание с отражением – с системами с одним типом заявок. Грубо говоря, состоянием процесса с локальным взаимодействием (см. [15]) является струна (конечная или бесконечная) из r символов, и в каждый момент времени может измениться ее произвольная конечная часть. Для процессов с локализованным взаимодействием, введенных в §3, может меняться только левый конец струны.

7. Интересны также такие дисциплины, когда обслуживающее устройство находится внутри струны и его положение меняется со временем и зависит от соседних позиций струны с обеих сторон, т.е. струна $\alpha\gamma x\delta\beta$, $n(\gamma) = n(\delta) = d$, может превратиться в $\alpha\gamma_1 y\delta_1\beta$, с $n(\gamma_1), n(\delta_1) \leqslant 2d$. Если α и β полубесконечны, получаем обобщение случайного блуждания в случайной среде: средой является элемент пространства $\{1, \ldots, r\}^{\mathbb{Z}}$, частица начинает движение из нуля. Ее скачки зависят от значений среды в некоторой окрестности ее положения. До настоящего времени наиболее важные из полученных результатов относились к случаю, когда частица не влияет на среду (см. обзор [16]).

8. По условию **ND** построенная в §3 трансфер-матрица Q является примитивной. Интересно получить условия, при которых Q непроводима и импримитивна. В этом случае происходит явление осцилляции, имеющее, однако, совершенно другую природу, чем аналогичное явление, обнаруженное для СТМ алгоритмов в [17]. Стэк в СТМ алгоритме можно рассматривать как струну с бесконечным числом символов ($r = \infty$).

Эта статья является переработанной версией препринта [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Malyshev V.A.* Networks and dynamical systems // Rapport de Recherche, INRIA, 1991. № 1468.
2. *Чжун Кай-лай.* Однородные цепи Маркова. М.: Мир, 1964.
3. *Malyshev V.A.* Stabilisation laws for processes with a localised interaction // Rapport de Recherche, INRIA, 1992. № 1635.
4. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
5. *Малышев В.А., Меньшиков М.В.* Эргодичность, непрерывность и аналитичность счетных цепей Маркова // Тр. Московского математического общества. М.: Изд-во МГУ, 1979. Т. 39. С. 3–48.
6. *Рыбко А.Н., Столяр А.Л.* Об эргодичности случайных процессов, описывающих функционирование открытых сетей массового обслуживания // Пробл. передачи информ. 1992. Т. 28. № 2. С. 3–26.
7. *Ботвич Д.Д., Замятин А.А.* Эргодические свойства консервативных сетей связи (в печати).
8. *Ignatyuk I.A., Malyshev V.A.* Classification of Random Walks in $\mathbb{Z}_+^4$ // Selecta Math. 1993. V. 12. № 2. P. 129–194.
9. *DeMasi A., Presutti E.* Lectures on Collective Behaviour of Particle Systems // CARR Reports in Mathematical Physics. 1989. № 5.
10. *Reiman M.I.* Open Queueing Networks in Heavy Traffic // Math. Oper. Res. 1984. V. 9. № 3.
11. *Varadhan S.R.S., Williams R.J.* Brownian Motion in Wedge with Oblique Refflection // Commun. Pure and Applied Math. 1985. V. 38. P. 405–443.
12. *Reiman M.I., Williams R.J.* A boundary property of semimartingale reflecting Brownian motions // Prob. Theor. Rel. Fields. 1988. V. 77. P. 87–97.
13. *Chen Hong, Mandelbaum Avi.* Discrete Flow Networks: Bottleneck Analysis and Fluid Approximations // Math. Oper. Res. 1991. V. 16. № 2. P. 408–446.
14. *Gajrat A., Malyshev V., Menshikov M., Pelih K.* Classification of Markov chains describing the evolution of random strings // Rapport de Recherche, INRA, 1993. № 2022.
15. *Лиггетт Т.* Марковские процессы с локальным взаимодействием. М.: Мир, 1989.
16. *Letchikov A.V.* Localisation in One-Dimensional Random Walks in Random Environments // Soviet Scientific Reviews. 1989. Section C. V. 8. Part 3.
17. *Fayolle G., Flajolet Ph., Hofri M.* On a functional equation arising in the analysis of a protocol for a multi-access broadcast channel // Adv. Appl. Prob. 1986. V. 18. P. 441–472.

Поступила в редакцию
02.12.93