Отдельный оттиск

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТОМ
XXVIII
ВЫПУСК
2 (170)

1973

ФАКТОРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В АЛГЕБРАХ МНОГОМЕРНЫХ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. А. Малышев

Будем говорить [1], что непрерывная при $|\zeta|=1$ функция $A(\zeta)$ со значениями в банаховой алгебре $\mathfrak{A}$ операторов в некотором банаховом пространстве допускает (правую) вполне правильную факторизацию, если

$$A(\zeta)=A_{-}(\zeta)D(\zeta)A_{+}(\zeta), \quad |\zeta|=1,$$

где $A_{+}(\zeta)\,(A_{-}(\zeta))$ допускает непрерывное продолжение при $|\zeta|\leqslant 1$ $(|\zeta|\geqslant 1)$ и голоморфное внутри этой области, $A_{+}^{-1}(\zeta)$ $(A_{-}^{-1}(\zeta))$ существует и принадлежит при $|\zeta|\leqslant 1$ $(|\zeta|\geqslant 1)$ и $D(\zeta)=P_0+\sum_{i=1}^{m}\zeta^{k_i}P_i$, где $\sum_{i=0}^{m}P_i=1$, $P_i^2=P_i$; $P_iP_j=0$, $i\neq j$; $\dim P_i<\infty$, $i=1,\ldots,m$.

В работах [1] и [2] рассматривалась факторизация функций, значениями которых являются операторы в банаховом пространстве, отличающиеся от единичного слагаемым с малой нормой [2] или вполне непрерывным слагаемым [1], в [3] рассматривалась факторизация положительных оператор-функций. Здесь мы получаем необходимые и достаточные условия существования вполне правильной факторизации для функций, значениями которых являются теплицевы операторы в n-мерном ортанте. Получение этой факторизации эквивалентно «явному» обращению произвольного такого оператора в $(n+1)$-мерном ортанте.

Пусть $\mathbf{Z}(\mathbf{Z}_{+})$—множество целых (неотрицательных целых) чисел, $l_{m,n}^{1}=l^{1}(\mathbf{Z}_{+}^{m}\oplus\mathbf{Z}^{n})$ Обозначим через b — односторонний сдвиг в $l_{1,0}^{1}$ на 1 вправо, b^{*} — ограничение сопряженного оператора на $l_{1,0}^{1}$, ζ — сдвиг в $l_{0,1}^{1}$ на 1 вправо, $\zeta^{*}=\zeta^{-1}$. $\mathfrak{A}_{m,n}$ — банахова алгебра, порожденная всевозможными тензорными произведениями операторов b, b^{*}, ζ, ζ^{*} в $l_{m,n}^{1}$.

Пусть P_{+} — естественная проекция $l_{m,n}^{1}\to l_{m+1,n-1}^{1}$. Алгебра $\mathfrak{A}_{m,n}$ при $n\geqslant 1$ естественно изоморфна алгебре функций $\left\{A(\zeta)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\zeta^i,\ \alpha_i\in\mathfrak{A}_{m,n-1},\ \sum\|\alpha_i\|<\infty\right\}$.

Основной результат работы составляет следующая теорема.

Теорема 1. *Функция $A(\zeta)$, являющаяся элементом $\mathfrak{A}_{m,n}$, допускает правую вполне правильную факторизацию тогда и только тогда, когда $P_{+}A(\zeta)$ — нётеров оператор в $l_{m+1,n-1}^{1}$.*

Следствие 1. *$P_{+}A(\zeta)$ обратим тогда и только тогда, когда $k_i=0$ равны для всех i и тогда*

$$[P_{+}A(\zeta)]^{-1}=A_{+}^{-1}(\zeta)P_{+}A_{-}^{-1}(\zeta).$$

Для $m=0$ теорема 1 следует из результатов работы [4]. Доказательство теоремы далее проводится индуктивно по m и n, причем требуемая факторизация строится эффективно. Используются следующие леммы.

Лемма 1. *Имеет место точная последовательность*

$$0\longrightarrow K_{1,0}\xrightarrow{j}\mathfrak{A}_{1,0}\xrightarrow{\pi}\mathfrak{A}_{0,1}\longrightarrow 0,$$

где $K_{m,0}$ — замкнутый двусторонний идеал в $\mathfrak{A}_{m,0}$, все элементы которого вполне непрерывны, j — вложение, π — естественная проекция $\mathfrak{A}_{1,0}\to\mathfrak{A}_{1,0}/K_{1,0}$.

Лемма 2. *Если оператор $1+T$, где $T\in K_{m,0}$, обратим в $l_{m,0}^{1}$, то $(1+T)^{-1}-1\in K_{m,0}$.*

Лемма 3. *Имеет место точная последовательность алгебр*

$$0\longrightarrow K_{m,0}\xrightarrow{j}\mathfrak{A}_{m,0}\xrightarrow{\rho}[\mathfrak{A}_{m-1,1}]^{n\oplus},$$

где j — вложение.

Эта лемма является аналогом точной последовательности Дугласа — Хоува в контексте C^*-алгебр и ρ строится также, как в [5].

Лемма 4. *Если* $A \in \mathfrak{A}_{m,n}$ *является обратимым оператором в* $l^1_{m,n}$, *то* $A^{-1} \in \mathfrak{A}_{m,n}$.

Лемма 5. *Пусть* $L_{m,0}$ *есть банахова алгебра, порожденная операторами* 1 *и* $K_{m,0}$ *в* $\mathfrak{A}_{m,0}$. *Каждый ее обратимый элемент допускает вполне правильную факторизацию.*

Эта лемма является небольшим усилением основной теоремы из [1] для интересующего нас случая (не выполняется условие в) на стр. 1060 [1]).

Теорема 1 с помощью преобразования $\zeta \to \dfrac{\lambda - i}{\lambda + i}$, $\lambda \in R$, позволяет получить факторизацию для многомерных интегральных уравнений Винера — Хопфа в n-мерном ортанте R^n_+, где R_+ — неотрицательная вещественная полупрямая.

С помощью аналогичной техники можно получать различные обобщения на случай, когда вместо $\mathfrak{A}_{0,1}$ фигурирует другая распадающаяся R-алгебра непрерывных функций на единичной окружности или вещественной оси.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ц. Гохберг, Задача факторизации оператор-функций, Изв. АН, сер. матем. 28:5 (1964), 1055—1082.

[2] И. Ц. Гохберг, Ю. Лайтерер, О канонической факторизации оператор-функций относительно окружности, Функцион. анализ **6**:1 (1972), 73—74.

[3] M. Rosenblum, J. Rovnyak, The factorisation problem for nonnegative operator-valued functions, Bull. Amer. Math. Soc. **77**:3 (1971), 287—318.

[4] Л. С. Гольденштейн, И. Ц. Гохберг, О многомерном уравнении на полупространстве с ядром, зависящим от разности аргументов, и его дискретном аналоге, ДАН **131**:1 (1960), 9—12.

[5] R. G. Douglas, R. Howe, On the C^*-algebra of Toeplitz operators in the quarter-plane, Trans. Amer. Math. Soc. 158 (1971), 203—217.

Поступило в Правление общества 10 октября 1972 г.