Математические заметки

Том 92 выпуск 2 август 2012

УДК 519.938

# Аналитическая динамика одномерной системы частиц с сильным взаимодействием

**В. А. Малышев**

Рассматривается динамика системы $N$ частиц на окружности с взаимодействием ближайших соседей и кулоновским потенциалом и аналитической внешней силой. Траектории являются вещественно аналитическими функциями времени. Однако, ряды для них сходятся лишь при достаточно малых временах. При нулевых начальных скоростях и равномерном начальном расположении частиц доказываются зависящие от $N$ оценки на коэффициенты этого ряда.

Библиография: 12 названий.

## 1. Введение

**1.1. Постановка задачи и основные результаты.** Рассматривается система $N$ точечных частиц $i = 1, 2, \dots, N$ на отрезке $[0, L) \subset \mathbb{R}$ с периодическими граничными условиями, т.е. на окружности $S_L$ длины $L$. Первоначально они расположены в точках

$$0 = x_1(0) < \dots < x_N(0) < L.$$

Траектории $x_i(t)$ определяются системой $N$ уравнений

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + F(x_i), \tag{1}$$

{eq1}

где взаимодействие между частицами имеет вид

$$U(\{x_i\}) = \sum_{\langle i, i-1 \rangle} V(x_i - x_{i-1}),$$

где сумма берется по всем парам соседей на окружности. Мы предполагаем, что потенциал $V(x) = V(-x) = 1/r$, $r = |x|$, является кулоновским, и положим

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = r^{-2}.$$

Заметим, что из сильного отталкивания на близких расстояниях следует, что частицы при движении не меняют своего порядка. Через $F(x)$ обозначена внешняя сила.

В работах [1], [2] исследовались неподвижные точки таких систем. Вопросы динамики существенно сложнее. Конечно, решение системы (1) существует и единственно (при произвольных начальных условиях) на всем интервале времени, однако получить более детальную информацию о траекториях частиц (если $N$ достаточно велико) довольно трудно и требует развития специальной техники. Если $F$ аналитична, то, как хорошо известно [3], решение может быть представлено в виде степенного ряда по $t$ в некоторой окрестности точки $t = 0$.

Мы рассматриваем естественные начальные условия: для всех $i$

$$\Delta = \Delta_i(0) = x_{i+1}(0) - x_i(0) = \frac{L}{N}, \qquad v_i(0) = 0, \tag{2}$$ {eq2}

и удобно считать $x_1(0) = 0$. Заметим, что эта конфигурация является наподвижной точкой для случая нулевой внешней силы. В этой статье мы получаем оценки радиуса сходимости для таких начальных условий. Мы ищем решение в виде

$$v_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{i,j} t^j. \tag{3}$$ {eq3}

Теорема 1. *Пусть $F$ аналитична на окружности $S_L$. Тогда*

1) *для всех $j = 1, 2, \ldots$, существуют числа $b_j < \infty$, не зависящие от $N$ и такие, что для всех $i$, $j$ и для всех $N$*

$$|c_{ij}| < b_j N^{(j-1)/2};$$

2) *пусть, кроме того, для некоторой $C_F > 0$ и всех $x$ и $k$*

$$|F^{(k)}(x)| \leqslant C_F^{k+1}.$$

*Тогда существует константа $0 < \chi < \infty$, не зависящая от $N$, такая, что для всех $i$, $j$ выполнена оценка*

$$|c_{ij}| < \chi^j N^{5j/6-3/2}.$$

Отсюда следует, что радиус сходимости $R = R(N)$ ряда (3) имеет оценку снизу $R > \chi^{-1} N^{-5/6}$. Из доказательства первого утверждения теоремы в п. 2.2 можно сделать вывод, что оценка сверху для радиуса сходимости может быть порядка $1/\sqrt{N}$, но это пока не доказано. В доказательстве второго утверждения теоремы мы даем явную оценку для $\chi$. Также приводятся явные формулы для $c_{ij}$ при $j = 1, 2, 3, 4$.

Цель и сущность работы проще понять, если сказать о ее физической мотивации.

**1.2. О загадке электрического тока.** Математические вопросы статистической физики глубоко разработаны для равновесных систем на решетке, а на непрерывном пространстве достаточно разработаны пожалуй только для газов с малыми обратной температурой или плотностью. Для многих остальных случаев даже проблемы не поставлены на математическом уровне. Одним из таких случаев является постоянный электрический ток. На макроуровне это закон Ома, а на микроуровне, во всех курсах физики твердого тела, он трактуется как система свободных (или слабо зависимых) электронов, каждый из которых ускоряется внешней силой и тормозится внешней средой: как физиками так и математиками изучались одночастичные модели с постоянной ускоряющей внешней силой и разными вариантами (не менее двадцати, первая из них – модель Drude, 1900 года) внешней среды, которой частица отдает энергию.

Тем не менее, остается важный вопрос – откуда берется ускоряющая сила. Дело в том, что из сотен километров ЛЭП сила действует только на протяжении нескольких метров около генератора, турбины и т.д. Вот что написано по этому поводу в Фейнмановских лекциях по физике (том 6, с. 34):

“… Сила толкает электроны вдоль проволоки. Но почему же приходит в движение стрелка гальванометра, который расположен далеко от этой силы? Да потому, что электроны, испытывающие магнитную силу, начинают двигаться и толкают (за счет электрического поля) другие электроны, находящиеся чуть дальше по проволоке, а те, в свою очередь, подталкивают все более удаленные электроны и так далее на большое расстояние. Любопытная штука. Это так удивило Гаусса и Вебера – что они протянули проволоку вдоль всего города, чтобы посмотреть …”. Так пишет знаменитый физик. Надо сказать, что в других курсах, статьях эта проблема вообще игнорируется.

Отсюда уже видно, что толкающие друг друга электроны образуют сильно взаимодействующую систему частиц и таким взаимодействием может быть только кулоновское отталкивание. Для математика естественно понять, как такое возможно сначала для простейшей модели. Такая модель и рассматривается здесь.

В действительности проблема не одна, а их много. Например, надо объяснить почему скорость установившегося тока постоянна и очень медленная (0.1–10 мм в секунду), а установление тока происходит почти мгновенно. Основная идея, почему установившаяся скорость постоянна и мала, была предложена в несколько другой модели в [4], но там не было результатов для собственно кулоновских систем.

Статья делает попытку подойти ко второй проблеме. Если коэффициенты $c_k$ в разложении $v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k$ скорости частицы по времени растут как $N^{ak}$, $a > 0$, где $N$ – число частиц, то естественно ожидать что величина скорости порядка 1 установится уже к моменту времени порядка $t = N^{-a}$, что и есть по выражению физиков почти мгновенно. Сам факт малости времени для установлении скорости строго доказать не удается, однако оценки коэффициентов, приведенные в статье, делают это весьма правдоподобным.

Достаточная сложность подобных оценок даже для простейшей модели (см. также [1], [2]) объясняет, почему такие проблемы не рассматривались физиками.

Целый ряд работ по динамике многочастичных систем, начиная с работ Н. Н. Боголюбова, имели совершенно другую направленность. В основном доказывалось существование термодинамического предела динамики. Это означает, что какое-то время на данную произвольную частицу существенно влияет лишь ограниченное число (соседних) частиц, и это остается справедливым в бесконечном объеме. Одна из основных техник здесь – также разложение (например, скорости) в ряд по времени, коэффициенты которого, однако, ограничены равномерно по числу частиц, и скорость мала для малых времен при нулевых начальных условиях, см. [5]–[12]. В нашем случае термодинамический предельный переход не имеет смысла, это более тонкая задача.

## 2. Доказательство

**2.1. Уравнения для коэффициентов.** Фиксируем начальные данные $x_i(0)$, $v_i(0)$ как в (2) и рассмотрим траектории $x_i(t) \in S$ на интервале $0 \leqslant t < t_0$ для некоторого $t_0 = t_0(N) > 0$. Полагая

$$\Delta_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t), \qquad \Delta = \Delta_i(0) = \frac{L}{N},$$

имеем уравнения

$$\frac{dv_i}{dt} = f(x_i(t) - x_{i-1}(t)) - f(x_{i+1}(t) - x_i(t)) + F(x_i(t))$$

или

$$\frac{dv_i}{dt} = f\biggl(\Delta + \int_0^t [v_i(t_1) - v_{i-1}(t_1)]\,dt_1\biggr) - f\biggl(\Delta + \int_0^t [v_{i+1}(t_1) - v_i(t_1)]\biggr)\,dt_1\biggr) \\ + F\biggl(x_i(0) + \int_0^t v_i(t_1)\,dt_1\biggr).$$

*Интегральные уравнения.* Эквивалентная система интегральных уравнений

$$v_i(t) = \int_0^t \biggl[f\biggl(\Delta + \int_0^t [v_i(t_1) - v_{i-1}(t_1)\biggr]\,dt_1\biggr) \\ - f\biggl(\Delta + \int_0^t [v_{i+1}(t_1) - v_i(t_1)]\,dt_1\biggr) + F\biggl(x_i(0) + \int_0^t v_i(t_1)\,dt_1\biggr)\biggr]\,dt \tag{4}$$ {eq4}

может быть переписана так:

$$v_i(t) = \int_0^t \biggl((\Delta + R_{i-1}(t))^{-2} - (\Delta + R_i(t))^{-2} + F\biggl(x_i(0) + \int_0^t v_i(t_1)\,dt_1\biggr)\biggr)\,dt, \tag{5}$$ {eq5}

где

$$R_{i-1}(t) = \int_0^t (v_i(t_1) - v_{i-1}(t_1))\,dt_1.$$

Для дальнейшего нам понадобятся обозначения связанные с дискретными производными. Пусть на отрезке $[0, N] \subset \mathbb{Z}$ с периодическими граничными условиями задана функция $g(i)$ (т.е. периодическая функция на $\mathbb{Z}$ с периодом $N$). Назовем

$$(\nabla^+ g)(i) = g(i+1) - g(i), \qquad (\nabla^- g)(i) = g(i) - g(i-1) \tag{6}$$ {eq6}

ее *правой* и *левой производной* соответственно. Заметим, что они коммутируют и имеет место равенство

$$\nabla^+(gf)(i) = f(i+1)(\nabla^+ g)(i) + g(i)(\nabla^+ f)(i) = (Sf)(\nabla^+ g) + g(\nabla^+ f), \tag{7}$$ {eq7}

где $S$ – оператор сдвига

$$(Sf)(i) = f(i+1).$$

Ниже операторы дискретного дифференцирования будут действовать на индексы $i$. Если функция $f(i)$ не зависит от $i$, то ее дифференцирование дает нуль.

Вернемся к основным уравнениям и перепишем их так:

$$v_i(t) = \int_0^t dt \left[(-\nabla^-((\Delta + R_i(t))^{-2}) + F\left(x_i(0) + \int_0^t v_i(t_1)\,dt_1\right)\right].$$

Полезно будет следующее представление подынтегрального выражения:

$$\begin{aligned}
(\Delta + R_{i-1}(t))^{-2} &- (\Delta + R_i(t))^{-2} + F\left(x_i(0) + \int_0^t v_i(t_1)\,dt_1\right) \\
&= \Delta^{-2}\left(1 + \frac{R_{i-1}}{\Delta}\right)^{-2} - \Delta^{-2}\left(1 + \frac{R_i}{\Delta}\right)^{-2} + F\left(x_i(0) + \int_0^t v_i(t_1)\,dt_1\right) \\
&= F(x_i(0)) + \sum_{m=1}^{\infty} d_m[\Delta^{-2-m}(R_{i-1}^m - R_i^m)] \\
&\qquad + \left[F\left(x_i(0) + \int_0^t v_i(t_1)\,dt_1\right) - F(x_i(0)\right] \\
&= F(x_i(0)) + \sum_{m=1}^{\infty} d_m\Delta^{-2-m}(R_{i-1}^m - R_i^m) \\
&\qquad + \left[F\left(x_i(0) + \int_0^t v_i(t_1)\,dt_1\right) - F(x_i(0))\right],
\end{aligned}$$

где

$$d_m = (-1)^m(m+1).$$

Если $F$ аналитична на $S_L$, то существует достаточно малое $\epsilon > 0$ такое, что для любого $x_0 \in S_L$ и для всех $x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ имеет место разложение в сходящийся ряд

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Получим окончательно

$$\begin{aligned}
v_i(t) = F(x_i(0))t &+ \int_0^t \sum_{m=1}^{\infty} d_m\Delta^{-2-m}[-\nabla^- R_i^m)]\,dt \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{F^{(k)}(x_i(0))(\int_0^t v_i(t_1)\,dt_1)^k}{k!}\,dt. \qquad (8)
\end{aligned}$$

{eq8}

*Рекуррентные уравнения.* Используя (3) и

$$R_{i-1}(t) = \sum_{j=1}^{\infty}(c_{i,j} - c_{i-1,j})\frac{t^{j+1}}{j+1}\,, \qquad (9)$$

{eq9}

$$R_i - R_{i-1} = \sum_{j=1}^{\infty}(c_{i+1,j} - 2c_{i,j} + c_{i-1,j})\frac{t^{j+1}}{j+1}\,, \qquad (10)$$

{eq10

мы видим, подставив ряды (3) в (8), что правая часть (8) также представляет собой степенной ряд по $t$ с хорошо определенными коэффициентами.

Будем искать $c_{i,j}$ приравниванием коэффициентов при $t^j$. Для $j = 1, 2$ уравнения дают сразу явный вид:

$$c_{i1} = F(x_i(0)), \qquad c_{i,2} = 0, \tag{11}$$ {eq11

так как остальные слагаемые в правой части (8) имеют больший порядок по $t$. Для $j \geqslant 3$ уравнения для коэффициентов при $t^j$ имеют вид

$$c_{ij} = \frac{1}{j}\left[\sum_{m=1}^{\infty} d_m \Delta^{-2-m}(-\nabla^- R_i^m) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F^{(k)}(x_i(0))(\int_0^t v_i(t_1)\,dt_1)^k}{k!}\right]_{j-1}, \tag{12}$$ {eq12

где для степенного ряда $\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ мы полагаем $[\phi(t)]_j = a_j$. Для $j > 2$ коэффициенты $c_{i,j}$ находятся рекуррентно, причем $c_{ij}$ зависят только от $c_{i,k}$ с $k \leqslant j-2$. Действительно, в правой части уравнения для $c_{i,j}$ не может быть $c_{i,k}$ с $k \geqslant j-1$, так как ввиду (9) каждый из $c_{ik}$ входит вместе с $t^{k+1}$.

Тогда основные уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} c_{ij} = \frac{1}{j}\sum_{m=1}^{\infty} d_m \Delta^{-2-m}\Biggl(-\nabla^- \Biggl[\Biggl(\sum_{j=1}^{\infty}(c_{i+1,j} - c_{i,j})\frac{t^{j+1}}{j+1}\Biggr)^m\Biggr]_{j-1}\Biggr) \\ + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{F^{(k)}(x_i(0))}{k!}\Biggl[\Biggl(\sum_{j=1}^{\infty} c_{i,j}\frac{t^{j+1}}{j+1}\Biggr)^k\Biggr]_{j-1}. \end{aligned} \tag{13}$$ {13}

Имеем

$$\Biggl[\Biggl(\sum_{j=1}^{\infty} c_{i,i}\frac{t^{j+1}}{j+1}\Biggr)^k\Biggr]_{j-1} = \sum_{j_1+\dots+j_m = j-m-1} \frac{c_{i,j_1}}{j_1+1}\cdots\frac{c_{i,j_k}}{j_k+1}, \tag{14}$$ {eq14

где $\sum_{j_1} + \dots + j_m = j - m - 1$ – сумма по всем упорядоченным наборам $j_1, \dots, j_k$, среди которых могут быть одинаковые, таким, что

$$(j_1 + 1) + \dots + (j_k + 1) = k + j_1 + \dots + j_k = j - 1, \tag{15}$$ {eq15

откуда

$$k \leqslant j_1 + \dots + j_k = j - 1 - k \leqslant j - 2, \qquad k \leqslant \left[\frac{j-1}{2}\right]. \tag{16}$$ {eq16

Аналогично

$$\Biggl[\Biggl(\sum_{j=1}^{\infty}(c_{i+1,j} - c_{i,j})\frac{t^{j+1}}{j+1}\Biggr)^m\Biggr]_{j-1} = \sum_{j_1,\dots,j_m}^{(j-1,m)} \frac{\nabla^+ c_{i,j_1}}{j_1+1}\cdots\frac{\nabla^+ c_{i,j_m}}{j_m+1},$$

причем выполнены (15) и (16) с заменой $k$ на $m$. Поэтому уравнение может быть записано в виде

$$c = Gc + c^{(0)}, \tag{17}$$ {eq17

где $c$ – вектор $c = \{c_{ij}\}$, свободный член $c^{(0)} = \{c_{ij}^{(0)}\}$ равен

$$c_{i1}^{(0)} = F(x_i(0)), \qquad c_{ij}^{(0)} = 0, \quad j \geqslant 2, \tag{18}$$ {eq18

а нелинейный оператор $G$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
&c_{i1} = c_{i1}^{(0)} = F(x_i(0)), \qquad c_{i2} = 0, \\
&c_{ij} = (Gc)_{ij} = -\sum_{m=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1} A_{ij}(m; j_1, \dots, j_m) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1+\dots+j_k=j-k-1} B_{ij}(k; j_1, \dots, j_k)
\end{aligned} \tag{19}
$$

при $j \geqslant 3$, где

$$
A_{ij}(m; j_1, \cdots, j_m) = \frac{1}{j}\, d_m \Delta^{-2-m} \nabla^- \left( \frac{\nabla^+ c_{i,j_1}}{j_1+1} \cdots \frac{\nabla^+ c_{i,j_m}}{j_m+1} \right), \tag{20}
$$

$$
B_{ij}(k; j_1, \dots, j_k) = \frac{1}{j}\frac{1}{k!}\, F^{(k)}(x_i(0)) \frac{c_{i,j_1}}{j_1+1} \cdots \frac{c_{i,j_k}}{j_k+1}\,. \tag{21}
$$

Далее через $F_{i,k,q}$ будем обозначать любую дискретную производную вида

$$
\left( \prod_{p=1}^{q} \nabla^{s(p)} \right) F^{(k)}(x_i(0)),
$$

где $s(p) = \pm$. Для оценок выбор $s(p)$ будет совершенно не важен. Обозначим $F_{i,k} = F_{i,k,0}$.

Явный вид $c_{i3}$, $c_{i4}$ немедленно получается, если учитывать в уравнениях (19) лишь члены с $k = 1$ и $m = 1$, так как $k, m \leqslant [(j-1)/2] \leqslant 1$. Имеем

$$
\begin{aligned}
c_{i3} &= -\frac{1}{3}\, d_1 \Delta^{-3} \nabla^- \nabla^+ \frac{c_{i1}}{2} + \frac{1}{3}\, F^{(1)}(x_i) \frac{c_{i1}}{2} = \frac{1}{6}(d_1 \Delta^{-3} F_{i,0,2} + F_{i,0,0} F_{i,1,0}), \\
c_{i4} &= -\frac{1}{4}\, d_1 \Delta^{-3} \nabla^- \left( \nabla^+ \frac{c_{i1}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}\, F^{(1)}(x_i) \frac{c_{i1}^2}{4} \\
&= \frac{1}{8} \left( -d_1 \Delta^{-3} F_{i,0,2} F_{i,0;1} + \frac{1}{2}\, F_{i,1,0} F_{i,0,0}^2 \right).
\end{aligned}
$$

Из формул

$$
\begin{aligned}
F_{i,0,1} &= F_{i+1,0,0} - F_{i,0,0} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} F^{(1)}(x)\, dx, && |F_{i,0,1}| \leqslant C_F^2 \Delta, \\
F_{i,0,2} &= (F_{i+2,0,0} - F_{i+1,0,0}) - (F_{i+1,0,0} - F_{i,0,0}) \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \int_{x}^{x+\Delta} F^{(2)}(y)\, dy \right) dx, && |F_{i,0,2}| \leqslant C_F^3 \Delta^2
\end{aligned} \tag{22}
$$

следует, что

$$
|c_{i3}| \leqslant \frac{1}{3}\, C_F^3 \left( \Delta^{-1} + \frac{1}{2} \right), \qquad |c_{i4}| \leqslant \frac{1}{4}\, C_F^5 + \frac{1}{16}\, C_F^4.
$$

**2.2. Оценка главной экспоненты.** Из рекуррентных формул (20) и (21) следует, что $c_{ij}$ конечны и зависят от $i$, $j$, $N$. Мы рассмотрим их сначала как функции от $N$ при фиксированных $i$, $j$. Иначе говоря, мы докажем первую часть теоремы. Введем понятие главной экспоненты

$$I(\xi) = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln|\xi|}{\ln N}$$

для величины $\xi$, зависящей от $N$. Попросту говоря, она показывает, что главный порядок асимптотики $\xi$ есть $N^{I(\xi)}$.

Мы будем рассматривать алгебру $\mathbf{A}$ многочленов от счетного числа (коммутирующих) переменных $F_{i,k,q}$, $i = 1, \ldots, N$, $k, q = 0, 1, 2, \ldots$ с вещественными коэффициентами, не зависящими от $F$. Для любого монома $M$ из этой алгебры обозначим

$$Q(M) = -\sum q$$

по всем $q$ в этом мономе. Естественное отображение алгебры $\mathbf{A}$ на подалгебру $\mathbf{A}_0$, порожденную всеми $F_{i,k} = F_{i,k,0}$ определяется последовательными подстановками

$$F_{i,k,q} = F_{i+1,k,q-1} - F_{i,k,q-1}$$

или

$$(\nabla^+)^n = (S-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k S^{n-k}.$$

Лемма 1. *Для любого монома* $M \in \mathbf{A}$

$$I(M) \leqslant Q(M).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно доказать, что

$$I(F_{i,q}) \leqslant Q(F_{i,q}) = -q.$$

Это делается, как и в (22), индукцией по $q$.

Для любого многочлена $P = \sum a_r M_r$ с (различными) мономами $M_r$ и коэффициентами $a_r$, не зависящими от $F$, но возможно зависящими от $N$, определим

$$Q(P) = \max_r (I(a_r) + Q(M_r)),$$

что согласуется с предыдущим определением. Тогда для любого полинома $P$

$$I(P) \leqslant \max_r (I(a_r) + I(M_r)) \leqslant \max_r (I(a_r) + Q(M_r)).$$

Заметим, что для любых двух многочленов $P_1$ и $P_2$ выполнено

$$Q(P_1 P_2) \leqslant Q(P_1) + Q(P_2).$$

Имеет место также

$$Q(\nabla^+ P) \leqslant Q(P) - 1, \qquad Q(\nabla^- \nabla^+ P) \leqslant Q(P) - 2. \tag{23}$$

{eq23

Назовем степенью $\deg P$ многочлена $P = \sum a_r M_r$ наибольшую степень его мономов.

Лемма 2. *При* $j > 1$ $c_{ij}$ *есть многочлен в алгебре* $\mathbf{A}_0$ *степени не более* $j - 1$.

Доказательство. Мы уже видели это для $j=1,2,3,4$. Заметим, что

$$\deg(\nabla^{\pm}P)=\deg P.$$

Далее, можно использовать индукцию: в формуле (20) степень будет $j-2$, а в (21) степень будет $j-1$.

Заметим, что рекуррентные формулы определяют $c_{ij}$ для всех функций $F(x)$, не обязательно аналитических. Поэтому имеет смысл следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $F$ бесконечно дифференцируема. Тогда для всех $i$, $j$*

$$I(c_{ij})\leqslant Q(c_{ij})\leqslant\frac{j-1}{2}\,.$$

Доказательство. Так как

$$Q(c_{ij})=0,\quad j=1,2,\qquad Q(c_{i,3})=1,\qquad Q(c_{i,4})=0,$$

то утверждение верно для $j=1,2,3,4$. Будем доказывать лемму индукцией по $j$. Предположим, что

$$Q(c_{ij})\leqslant\frac{j-1}{2}$$

для всех $j=1,2,\dots,J-2$.

Тогда при данных $m,j_1,\dots,j_m$ ввиду (15) и (16) имеем

$$\begin{aligned}Q(A_{iJ}(m;j_1,\dots,j_m))&\leqslant 2+m-1+Q(c_{ij_1})+\dots+Q(c_{ij_m})-m\\&\leqslant 1+\frac{1}{2}(j_1+\dots+j_m)-\frac{m}{2}=1+\frac{1}{2}(J-m-1)-\frac{m}{2}\,,\end{aligned}$$

так как ввиду (23) $(-1)$ и $(-m)$ добавляются из-за операторов дискретной производной, примененных к соответсвующим мономам. Максимум последнего выражения достигается при $m=1$. И значит,

$$Q(A_{iJ}(m;j_1,\dots,j_m))\leqslant\frac{J-1}{2}\,.$$

Аналогично для $B_{iJ}(k:j_1,\dots,j_k)$ имеют место следующие неравенства:

$$Q(B_{iJ}(k;j_1,\cdots,j_k))\leqslant\frac{1}{2}(J-1-k)-\frac{k}{2}<\frac{J-1}{2}\,.$$

Отсюда получается $Q(c_{iJ})\leqslant(J-1)/2$, а значит, и $I(c_{iJ})\leqslant Q(c_{iJ})\leqslant(J-1)/2$.

**2.3. Радиус сходимости.** Здесь мы докажем второе утверждение теоремы 1. В доказательстве удобно писать $N$ вместо $N/L$ и считать $C_F\geqslant 1$.

Мы будем использовать принцип мажорирования для бесконечных систем рекуррентных уравнений и неравенств: например, если даны две системы уравнений

$$c_{ij}^{(q)}=P^{(q)}(c_{i1}^{(q)},\dots,c_{i,j-2}^{(q)}),\qquad q=1,2,$$

где $P^{(q)}$ – многочлены с коэффициентами $p_\alpha^{(q)}$, причем $p_\alpha^{(2)}\geqslant 0$, $|p_\alpha^{(1)}|\leqslant p_\alpha^{(2)}$ для всех $\alpha$, а также $|c_{ij}^{(1)}|\leqslant c_{ij}^{(2)}$ для $j=1,2,3,4$, то $|c_{ij}^{(1)}|\leqslant c_{ij}^{(2)}$ для всех $j$. Одна из таких систем, которая получается из одночастичной задачи (т.е. задачи с $N=1$) со специально подобранной внешней силой, будет сейчас введена. Другая вспомогательная система $\beta(c_{ij})$ с положительными коэффициентами будет введена ниже.

*Одночастичная задача.* Положим для $j = 1, 2, \dots$ и фиксированного $a$

$$g_j = g_j\left(\frac{a}{2}\right) = \left\{\frac{a}{2}\right\}^j \frac{1\cdot 3\cdots(2j-1)}{j!} = \left\{\frac{a}{2}\right\}^j \frac{(2j)!}{2^j j! j!} \sim \left\{\frac{a}{2}\right\}^j \frac{1}{\sqrt{4\pi j}}\,.$$

Тогда имеет место

Лемма 4. *Для* $j = 5, 6, \dots$ *выполнены неравенства*

$$g_j \geqslant \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1} \left(\frac{a}{2}\right)^{k+1} \frac{(k+1)(k+2)}{2} \frac{g_{j_1}}{j_1+1} \cdots \frac{g_{j_k}}{j_k+1}\,.$$

Доказательство. Пусть частица, находившаяся в момент $t = 0$ в точке $x(0) = 0$, движется со скоростью ($a > 0$ произвольно)

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{1-at}} = \sum_{j=0}^{\infty} g_j t^j$$

в поле некоторой внешней силы $F(x)$, которую мы найдем. Тогда

$$x(t) = \int_0^t v(s)\,ds = \left(-\frac{2}{a}\right)\sqrt{1-at} + \frac{2}{a}$$

откуда получаем

$$1 - at = \left(1 - \frac{ax}{2}\right)^2,$$

$$F = \frac{dv}{dt} = \frac{a}{2}\frac{1}{(1-at)^{3/2}} = \frac{a}{2}\frac{1}{(1-ax/2)^3}\,,$$

$$\frac{F^{(k)}}{k!} = \left(\frac{a}{2}\right)^{k+1} \frac{3\cdot 4\cdots(k+2)}{k!} = \left(\frac{a}{2}\right)^{k+1} \frac{(k+1)(k+2)}{2}\,.$$

Как при выводе рекуррентных уравнений выше (разница состоит только в том, что здесь $v(0) = 1$ и отсутствуют $A$-члены), получаем

$$g_j = \sum_{k=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1} \frac{1}{j}\frac{1}{k!} F^{(k)}(x_i(0)) C_k^p v^p(0) \frac{g_{j_1}}{j_1+1} \cdots \frac{g_{j_{k-p}}}{j_{k-p}+1}$$

для определенных выше $g_j$. Здесь, как и выше, $\sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1}$ означает суммирование по всем $j_1, \dots, j_{k-p}$ таким, что

$$j_1 + \dots + j_{k-p} = j - k - 1.$$

Так как все коэффициенты положительны, то, откидывая члены с $p > 0$, имеем для всех $a > 0$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{j} \sum_{k=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1} \left(\frac{a}{2}\right)^{k+1} \frac{g_{j_1}}{j_1+1} \cdots \frac{g_{j_k}}{j_k+1} \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1} \left(\frac{a}{2}\right)^{k+1} \frac{(k+1)(k+2)}{2} \frac{g_{j_1}}{j_1+1} \cdots \frac{g_{j_k}}{j_k+1} \leqslant g_j. \end{aligned}$$

*Мажорирование.* Из рекуррентной формулы для $c_{ij}$ видно, что они могут быть представлены в виде

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{d_{ij}} b_{i,j,r} N^{I_{i,j,r}} M_{i,j,r},$$

где $b_{i,j,r}$ и $d_{ij}$ – числа, не зависящие ни от $N$, ни от $F$, и $M_{i,j,r} \in \mathbf{A}$. При этом по лемме 2

$$\deg M_{i,j,r} \leqslant j-1.$$

Нам нужны будут также другие предварительные понятия. Для любого многочлена

$$P = \sum b_r N^{I_r} M_r,$$

где $b_r$ – числа, не зависящие ни от $N$, ни от $F$, $M_r \in \mathbf{A}$, положим

$$\beta(P) = \sum_r |b_r| N^{I_r + Q(M_r)} C_F^{Q_0(M_r) - Q(M_r) + \deg M_r},$$

где для любого монома $M_r$ натуральное число $Q_0(M_r)$ равно сумме $\sum k$ по всем его множителям $F_{i,k,q}$. В частности

$$\beta(c_{ij}) = \sum_r |b_{i,j,r}| N^{I_{i,j,r} + Q(M_{i,j,r})} C_F^{Q_0(M_{i,j,r}) - Q(M_{i,j,r}) + \deg M_{i,j,r}}.$$

Для всех $i$, $k$ по определению

$$\beta(F_{i,k,0}) = C_F^{k+1}, \qquad \beta(\nabla^{\pm} F_{i,k,0}) = \beta(F_{i,k,1}) = C_F^{k+2} N^{-1} = C_F N^{-1} \beta(F_{i,k}).$$

Кроме того, имеет место: для любых двух многочленов $P_1$, $P_2$

$$\beta(P_1 + P_2) \leqslant \beta(P_1) + \beta(P_2), \qquad \beta(P_1 P_2) \leqslant \beta(P_1)\beta(P_2) \tag{24}$$ {eq24

и для любого монома $M$

$$\beta(\nabla^{\pm} M) \leqslant (\deg M) N^{Q(M)-1} C_F^{Q_0(M) - Q(M) + \deg M + 1} = (\deg M) C_F N^{-1} \beta(M), \tag{25}$$ {eq25

а значит, и для любого полинома $P$

$$\beta(\nabla^{\pm} P) \leqslant (\deg P) C_F N^{-1} \beta(P). \tag{26}$$ {eq26

Назовем $\beta(P)$ *мажорантой* полинома $P$, так как ввиду

$$|F_{i,k,1}| = |\nabla^{+} F_{i,k}| \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} |F_{i,k+1}(x)|\, dx \leqslant C_F^{k+2} N^{-1} = \beta(F_{i,k,1})$$

имеет место свойство

$$|P| \leqslant \beta(P).$$

Из (24) и (17) следует, что

$$\beta(c_{ij}) \leqslant \sum_{m=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1 + \dots + j_m = j-m-1} \beta(A_{ij}(m; j_1, \dots, j_m)) + \sum_{k=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1 + \dots + j_k = j-k-1} \beta(B_{ij}(k; j_1, \dots, j_k)).$$

Наше индуктивное предположение будет (с $g_j = g_j(1)$)

$$\beta(c_{ij}) \leqslant \chi^j N^{5j/6 - 3/2} g_j, \qquad j = 1, 2, \dots, J-2. \tag{27}$$ {eq27

*Начальные данные.* Можно выбрать $\chi_0 > 0$ так, чтобы для $j - 1, 2, 3, 4$

$$\chi_0^j N^{5j/6-3/2} g_j \geqslant \beta(c_{ij}).$$

Действительно, только для $j = 3$ есть зависимость от $N$, но $(5/6)3 - 3/2$ как раз равно $N$.

*Индуктивный шаг для $A$-членов с $m > 1$.* Для оценки $A$-членов мы будем различать два случая: $m = 1$ и $m > 1$. Для $m > 1$ мы используем очевидные оценки

$$\beta(\nabla^{\pm} c_{ij}) \leqslant 2\beta(c_{ij}), \qquad \beta(\nabla^{-}(\nabla^{+} c_{i,j_1} \cdots \nabla^{+} c_{i,j_m})) \leqslant 2^{m+1} \prod_p \beta(c_{i,j_p}).$$

Тогда из (24) и (20) получим

$$\begin{aligned}
\beta(A_{iJ}(m; j_1, \dots, j_m)) &\leqslant \frac{m+1}{J} N^{2+m} 2^{m+1} \frac{\beta(c_{i,j_1})}{j_1+1} \cdots \frac{\beta(c_{i,j_m})}{j_m+1} \\
&\leqslant \frac{m+1}{J} N^{2+m} 2^{m+1} \chi^{J-m-1} N^{(5/6)(J-m-1)-m(3/2)} \prod_{p=1}^{m} \frac{g_{j_p}}{j_p+1} \\
&\leqslant 2^{m+1} \chi^{J-m-1} N^{(5/6)J-3/2} \frac{m+1}{J} \left( \prod_{p=1}^{m} \frac{g_{j_p}}{j_p+1} \right),
\end{aligned}$$

так как экспонента над $N$ при $m \geqslant 2$ допускает оценку

$$2 + m + \frac{5}{6}(J - m - 1) - m\frac{3}{2} = \frac{5}{6} J - m\frac{8}{6} + \frac{7}{6} \leqslant \frac{5}{6} J - \frac{3}{2}.$$

Далее, по лемме 4 с $a = 2$ (если $\chi \geqslant 2$) имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=2}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1} \beta(A_{iJ}(m; j_1, \dots, j_m)) \\
&\qquad \leqslant N^{(5/6)J-3/2} \chi^J \sum_{m=2}^{(j-1)/2} 2^{m+1} \chi^{-m-1} \sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1} \frac{m+1}{J} \left( \prod_{p=1}^{m} \frac{g_{j_p}}{j_p+1} \right) \\
&\qquad \leqslant \left( \frac{2}{\chi} \right)^3 N^{(5/6)J-3/2} \chi^J g_j. \qquad (28)
\end{aligned}$$

{eq28

*Индуктивный шаг для $A$-членов с $m = 1$.* В случае $m = 1$ будем использовать следующие оценки для $j = J - 2 \geqslant 3$. Ввиду (26), (27) и леммы 2

$$\beta(\nabla^{+} c_{ij}) \leqslant (j-1)) N^{-1} C_F \beta(c_{ij}) \leqslant (j-1)) N^{-1} C_F \chi^j N^{(5/6)j-3/2} g_j$$

и аналогично

$$\beta(\nabla^{-}\nabla^{+} c_{i,j})| \leqslant ((j-1)C_F)^2 N^{-2} \chi^j N^{(5/6)j-3/2} g_j.$$

Это дает дополнительное слагаемое $(-2)$ в экспоненте над $N$, которая равна

$$3 - 2 + \frac{5}{6}(J-2) - \frac{3}{2} \leqslant \frac{5}{6} J - \frac{3}{2},$$

т.е.

$$\begin{aligned}
A_{ij}(1; j_1) = A_{ij}(1; J-2) &= \frac{1}{j} |d_1| N^3 \frac{\nabla^{-}\nabla^{+} c_{i,J-2}}{J-1} \\
&\leqslant 2C_F^2 \chi^{j-2} N^{(5/6)J-3/2} g_{j-2} \leqslant \frac{2C_F^2 g_{j-2}}{\chi^2 g_j} \chi^j N^{(5/6)J-3/2} g_j. \qquad (29)
\end{aligned}$$

{eq29

*Индуктивный шаг для $B$-членов.* Для $B$-членов индуктивная оценка проще, но здесь растет степень мономов

$$\begin{aligned}\beta(B_{ij}(k;j_1,\dots,j_k)) &= \frac{1}{j}\frac{1}{k!}\beta\biggl(F^{(k)}(x_i(0))\frac{c_{i,j_1}}{j_1+1}\cdots\frac{c_{i,j_k}}{j_k+1}\biggr)\\ &\leqslant \frac{1}{j}\frac{C_F^{k+1}}{k!}\frac{1}{j_1+1}\cdots\frac{1}{j_k+1}\beta(c_{i,j_1})\dots\beta(c_{i,j_k})\\ &\leqslant \frac{1}{j}\frac{C_F^{k+1}}{k!}\frac{g_{j_1}}{j_1+1}\cdots\frac{g_{j_k}}{j_k+1}\chi^{j_1+\dots+j_k}N^{j_1+\dots+j_k},\end{aligned}$$

откуда по лемме 4

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{[(j-1)/2]}\sum_{j_1+\dots+j_k=j-k-1}\beta(B_{ij}(k;j_1,\dots,j_k))\\ &\qquad\leqslant \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{[(j-1)/2]}\frac{C_F^{k+1}}{k!}\sum_{j_1+\dots+j_k=j-k-1}\frac{g_{j_1}}{j_1+1}\cdots\frac{g_{j_k}}{j_k+1}\chi^{J-k-1}N^{(5/7)j}\\ &\qquad\leqslant C_Fe^{C_F}\chi^{J-2}N^{J/2}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{[(j-1)/2]}\sum_{j_1+\dots+j_k=j-k-1}\frac{g_{j_1}}{j_1+1}\cdots\frac{g_{j_k}}{j_k+1}\\ &\qquad\leqslant C_Fe^{C_F}\chi^{J-2}N^{J/2}g_j. \end{aligned}\tag{30}$$

{eq30

Суммируем три полученных слагаемых (28), (29), (30) и выберем $\chi=\chi_1>0$ так, чтобы

$$\biggl(8\chi^{-1}+\frac{2C_F^2g_{j-2}}{g_j}+C_Fe^{C_F}\biggr)\chi^{-2}\leqslant 1.$$

Тогда для любого $\chi\geqslant\max(\chi_0,\chi_1)$ будет

$$|c_{ij}|\leqslant\chi^JN^{J/2}g_j\leqslant\chi^JN^{J/2}.$$

Теорема доказана.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


[1] V. A. Malyshev, “Fixed points for one-dimensional particle system with strong interaction”, *Mosc. Math. J.*, **12**:1 (2012), 139–147.

[2] В. А. Малышев, “Критические состояния многочастичных систем с сильным взаимодействием на окружности”, *Пробл. передачи информ.*, **47**:2 (2011), 117–127.

[3] В. В. Голубев, *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.

[4] В. А. Малышев, “Почему течет ток: многочастичная одномерная модель”, *ТМФ*, **155**:2 (2008), 301–311.

[5] E. Caglioti, C. Marchioro, M. Pulvirenti, “Non-equilibrium dynamics of three-dimensional infinite particle systems”, *Comm. Math. Phys.*, **215**:1 (2000), 25–43.

[6] S. Caprino, M. Pulvirenti, “A cluster expansion approach to a one-dimensional Boltzman equation: a validity result”, *Comm. Math. Phys.*, **166**:3 (1995), 603–631.

[7] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti, *The Mathematical Theory of Dilute Gases*, Appl. Math. Sci., **106**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[8] R. L. Dobrushin, J. Fritz, "Non-equilibrium dynamics of one-dimensional infinite particle systems with a hard-core interaction", *Comm. Math. Phys.*, **55**:3 (1977), 275–292.

[9] O. E. Lanford, III, "Time evolution of large classical systems", *Dynamical systems, theory and applications*, Lecture Notes in Phys., **38**, Springer-Verlag, Berlin, 1975, 1–111.

[10] Я. Г. Синай, "Построение динамики в одномерных системах статистической механики", *ТМФ*, **11**:2 (1972), 248–258.

[11] H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[12] V. A. Malyshev, "Dynamical clusters of infinite particle dynamics", *J. Math. Phys.*, **46**:7 (2005), 073302.

**В. А. Малышев**
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
*E-mail*: malyshev2@yahoo.com

Поступило
15.07.2011
Исправленный вариант
08.12.2011