Отдельный оттиск

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТОМ
XXXIII
ВЫПУСК
2(200)

1978

1978 г. март — апрель *т. XXXIII, вып. 2 (200)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМ. И. Г. ПЕТРОВСКОГО ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ

Заседание 28 сентября 1977 г.

1. В. И. Арнольд «Неравенства Петровского — Олейник и индекс особой точки векторного поля».

Из недавно полученной Д. Эйзенбумом, Г. Левиным и В. Химшиашвили формулы для индекса особой точки векторного поля вытекает следующее обобщение неравенств Петровского — Олейник.

Рассмотрим в действительном пространстве размерности p векторное поле, у которого каждая компонента — однородный многочлен степени k. Тогда индекс особой точки 0 векторного поля не превосходит числа целых точек строго внутри куба $(0, k+1)^p$, лежащих на гиперплоскости, перпендикулярной главной диагонали в центре куба.

Эта оценка содержит неравенства Петровского и Олейник как в случае четного, так и в случае нечетного числа измерений. Из точности неравенства Петровского для кривых следует точность этой оценки в трехмерном пространстве. На плоскости оценка также точна; точна ли она в пространствах четырех и более измерений, неизвестно.

В докладе было рассказано об оценках индекса особой точки векторного поля (в частности, градиентного) и о связях этой задачи с неравенствами Петровского — Олейник, с одной стороны, и со смешанными структурами Ходжа особенностей, введенными П. Делинем и Дж. Стинбринком,— с другой.

Заседание 5 октября 1977 г.

1. А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский «Некоторые математические задачи теории колебаний тонких упругих оболочек».

1°. Свободные колебания тонкой упругой оболочки приводят к задаче на собственные значения следующего вида:

$$h^2 N_{ij} u_j + L_{ij} u_j = \lambda u_i \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

$$l_1|_\Gamma = l_2|_\Gamma = n_1|_\Gamma = n_2|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

Здесь L_{ij} — дифференциальные операторы не выше второго порядка, N_{ij} — не выше четвертого. Указанные операторы содержат дифференцирования по двум независимым переменным. Их явный вид можно найти, например, в [1] и [2]. Граничные условия (2) определяются характером закрепления оболочки. h — малый параметр — относительная толщина оболочки. Задача (1), (2) является самосопряженной и приводит к дискретному спектру: $0 \leqslant \lambda_1(h) \leqslant \lambda_2(h) \leqslant \ldots$, уходящему в $+\infty$ при каждом $h \neq 0$. Как доказано в [3] (см. также [2], [4]) для функции распределения $n_h(\lambda)$ собственных значений задачи (1), (2) справедлива при $h \to 0$ следующая формула:

$$n_h(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi^2 h}\left[\iint_G \left(\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\sqrt{\lambda - \Omega(\theta, \alpha, \beta)}\, d\theta\right) dS + O(h^\nu)\right], \tag{3}$$

ми, теплопроводностью и электропроводностью σ (динамическая система шести уравнений первого порядка). При этом считается, что функция $\sigma = \sigma(\rho,\ T)$ такая, что $\sigma = 0$ в некоторой области значений плотности (ρ) и температуры (T).

Доказано, что для шести типов волн число соотношений, вытекающих из условия существования единственного решения задачи о структуре, совпадает с числом уравнений, требуемых эволюционностью разрыва. Для двух типов волн решение задачи о структуре не существует. В предельном случае большой магнитной вязкости по сравнению с другими диссипативными коэффициентами дополнительные соотношения получены в явном виде.

В отличие от газовой динамики, где ударные волны характеризуются одним параметром, ионизующие ударные волны различных типов характеризуются различным числом параметров. При этом возможны двух- и трехпараметрические волны, которые естественно рассматривать как слившиеся однопараметрические. В рассмотренной автомодельной нестационарной задаче о поршне наблюдается слияние и расщепление поверхностей разрывов при изменении определяющих параметров задачи, при этом суммарное число параметров, характеризующих разрывы, сохраняется. Возможны также волны с «отрицательным» числом параметров, когда, например, состояние перед разрывом не может быть произвольным, а в силу граничных условий на разрыве оказывается связанным некоторыми соотношениями. В решении рассмотренной задачи такое соотношение выполняется за счет газодинамической ударной волны, распространяющейся перед разрывом.

Заседание 16 ноября 1977 г.

1. С. В. Манаков «Интегрируемые типы многоволновых систем и уравнения Эйлера для n-мерного твердого тела».

Заседание 23 ноября 1977 г.

1. В. А. Малышев, Р. А. Минлос «Изучение спектра стохастических операторов для гиббсовских случайных полей».

В статистической физике и конструктивной квантовой теории поля в настоящее время развиваются методы, которые для некоторого класса моделей дадут, по-видимому, возможность понять на математическом уровне структуру объектов, изучение которых ранее велось на уровне, близком к эвристическому. Эти объекты (частицы в квантовой теории поля, квазичастицы в статистической физике и их рассеяние определяются через изучение структуры спектра гамильтониана соответствующей модели. Такое изучение в настоящее время возможно только в рамках евклидова подхода (если отвлечься от явно решаемых моделей), причем для моделей с малым взаимодействием любой объект в спектре допускает вычисление с помощью абсолютно сходящихся рядов, члены которых вычисляются с помощью простых рекуррентных процедур. В работах Глимма, Джаффе, Спенсера, Цирилли, Димока, Экмана довольно полно изучена структура спектра гамильтониана для $P\,(\varphi)_2$-моделей квантовой теории поля в одно- и двух частичной области.

Пусть ξ_t ($t = (x,\ \tau)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, $\tau \in T = \mathbb{Z}^1$)-стационарное случайное поле, принимающее два значения в каждой точке (равные, например, ± 1). Обозначим через L_2 гильбертово пространство случайных величин, зависящих от значений поля ξ_t, а через $\mathscr{H}_\tau \subset L_2$, $\tau \in T$, подпространство случайных величин, зависящих от значений поля $\xi_{(x,\ \tau)}$, $x \in \mathbb{Z}^d$, в «момент времени» τ. Обозначим через U_t унитарное отображение L_2 в себя, порожденное сдвигом поля $\xi_{t'} \to \xi_{t'+t}$ на вектор t. Трансфер-матрицей называется семейство операторов $F_\tau : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_0$, $\tau \in T$, определяемое формулой $F_\tau f = P_0 U_{(0,\ \tau)} f$, $f \in \mathscr{H}_0$, где P_0 — ортогональный проектор в L_2 на подпространство $\mathscr{H}_0$.

Если ξ_t является гиббсовским полем с взаимодействием ближайших соседей, то F_τ является полугруппой самосопряженных операторов (требуется инвариантность ξ_t относительно «отражения времени»).

Т е о р е м а. *Для любого целого положительного N существует такое $\beta_0 > 0$ (обратная температура), что при $|\beta| < \beta_0$ пространство $\mathscr{H}_0$ разбивается в прямую сумму инвариантных относительно $U_{(x,0)}$ и F_τ подпространств*

$$\mathscr{H}_0 = \mathscr{L}^{(0)} \oplus \mathscr{L}^{(1)} \oplus \ldots \oplus \mathscr{L}^{(N+1)},$$

где —$L^{(0)}$ — пространство констант, $\mathscr{L}^{(1)}$ циклично относительно группы $U_{(x,0)}$ (одночастичное подпространство, т. е. «частица» в данной модели).

Далее, спектр $F_1^{(k)} \equiv F_1 |_{\mathscr{L}^{(k)}}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, заключен в отрезке $[(c_1\beta)^k, (c_2\beta)^k]$, где константы $c_1, c_2 > 0$ не зависят от β и k. Спектр $F_1^{(N+1)}$ расположен в $(c_2\beta)^{N+1}$-окрестности нуля.

Этот результат о спектре гамильтониана в N-частичной области подтверждает ожидаемую асимптотическую полноту теории рассеяния Хаага — Рюэлля для настоящей модели или для модели с непрерывным временам, т. е. где $T = \mathbb{R}^1$.

Доказательства основаны на полном кластерном разложении для данного гиббсовского поля.

Заседания 30 ноября 1977 г.

1. Л. Д. Ф а д д е е в «Теория киральных полей».