

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

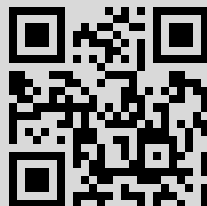
В. А. Малышев, Оценки коэффициентов разложений Майера на границе инфракрасной области, *ТМФ*, 1980, том 45, номер 2, 235–243

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 195.135.238.14

28 марта 2017 г., 21:36:57



ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЙ МАЙЕРА НА ГРАНИЦЕ ИНФРАКРАСНОЙ ОБЛАСТИ

В. А. Малышев

Рассматривается классический газ на решетке с двухчастичным взаимодействием $\Phi(x-y)$. Отказываясь от регулярности, но предполагая устойчивость и ограниченность преобразования Фурье $\tilde{\Phi}(k)$, мы доказываем оценку $|b_n| < C^n n!$ для коэффициентов разложения Майера $\sum b_n z^n$, например первой корреляционной функции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Инфракрасной областью обычно называется такая область изменения параметров взаимодействия, для которой некоторые диаграммы в ряду теории возмущений расходятся при переходе к бесконечному объему. Если все диаграммы сходятся, но часть из них лишь условно (не абсолютно), то естественно назвать эти случаи границей инфракрасной области. Удивительно много интересных физических систем лежит на этой границе. Приведем ряд примеров.

1. Решетчатый или непрерывный классический газ:

а) взаимодействие $\Phi(x) = \sin \alpha x/x$ в размерности $\nu=1$: Это взаимодействие представляет интерес в связи со следующим важным РККИ-взаимодействием;

б) РККИ-взаимодействие в размерности $\nu=3$: $\Phi(x) = \cos \alpha |x|/|x|^3$;

в) газ диполей, где, например, все диполи ориентированы вдоль оси x .

Преобразование Фурье взаимодействия $\Phi(x)$ равно в этом случае $\tilde{\Phi}(k) = (k^4)^2 / ((k^4)^2 + \dots + (k^\nu)^2)$.

2. Спиновые системы или решетчатые модели квантовой теории поля:

а) свободное (гауссово) поле $\sigma_i^\mu = x_i - x_{i+\mu}$ с потенциалом $\sum_{|i-i'|=1}^* (x_i - x_{i'})^2$, $\nu \geq 3$, и его гиббсовские перестройки с потенциалом, например

$$\sum_{|i-i'|=1} \left[(x_i - x_{i'})^2 + \frac{1}{\beta} (x_i - x_{i'})^4 \right]$$

при больших β ;

б) XY-модель с потенциалом $\beta \sum \cos(\varphi_i - \varphi_{i'})$ для больших β , очевидно, тесно связана со случаем «а», и мы ожидаем, что корреляционная функция для нее имеет асимптотику свободного гауссова поля случая «а»;

в) калибровочные модели с абелевой калибровочной группой в области отсутствия конфайнмента в размерности $\nu=4$, по-видимому, также имеют такой характер (см. [1]).

Ряд интересных строгих результатов уже получен для некоторых из перечисленных выше моделей: существование свободной энергии [2, 3], существование гиббсовского поля [4], существование фазового перехода [5]. Однако существующая техника не позволяет получать кластерные разложения. Важность последней задачи явствует из того, что кластерные разложения в настоящее время являются единственным средством строгого изучения спектра частиц, а, как следует из примеров, многие системы с безмассовыми частицами лежат на границе инфракрасной области.

В данной статье мы получаем оценки функций Урселла, недостаточные для кластерного разложения, но позволяющие предположить по меньшей мере суммируемость по Борелю рядов для корреляционных функций. В ряде случаев оценки могут быть улучшены с помощью других подходов, но оценка C^n , необходимая для построения кластерного разложения, неизвестна автору ни в одном случае.

По-видимому, существует связь между нашими оценками и оценками коэффициентов рядов теории возмущений в перенормированных теоретико-полевых моделях [9, 6, 7].

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И ПЕРВЫЕ ГРУБЫЕ ОЦЕНКИ

Рассмотрим классическую систему тождественных частиц на решетке Z^v с двухчастичным взаимодействием $\Phi(x-y)$. Мы не предполагаем твердой сердцевины, т. е. в любой точке $x \in Z^v$ может находиться произвольное число частиц. Поэтому мы предполагаем устойчивость, т. е. что для любых $x_1, \dots, x_n \in Z^v$

$$(2.1) \quad U(x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Phi(x_i - x_j) \geq Cn, \quad (x)_n = (x_1, \dots, x_n),$$

мы не предполагаем регулярности [8]. Вместо этого требуем, чтобы

$$\Phi(k) = \frac{1}{(2\pi)^v} \sum e^{i(k,x)} \Phi(x), \quad k \in S^v = [-\pi, \pi]^v,$$

была ограниченной неотрицательной функцией, непрерывной всюду, кроме конечного числа гладких поверхностей в S^v (достаточно даже интегрируемости по Риману). Из неотрицательности следует (2.1).

Будем работать в смешанном x - и k -представлении. Поэтому в конечном объеме мы должны использовать периодические граничные условия. Заметим, что если некоторый ряд (например, определяющий диаграмму) является абсолютно сходящимся, то его сумма определена единственным образом. В случае же неабсолютной сходимости сумма ряда должна быть определена специальным предписанием. Для этого определения мы используем граничные условия, являющиеся периодическими в k -представлении.

Рассмотрим конечный объем $\Lambda = [-N, N]^v \subset Z^v$. Для любой функции $\Phi_\Lambda(x)$, $x \in \Lambda$, ее преобразование Фурье в Λ

$$(2.2) \quad \Phi_\Lambda(k) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^v \sum_{x \in \Lambda} e^{i(x,k)} \Phi_\Lambda(x)$$

определено при $k \in \Lambda = \{\pi l / N: l = -N, \dots, N-1\}^v \subset [-\pi, \pi]^v$. Положим тогда

$$(2.3) \quad \Phi_\Lambda(x) = \left(\frac{\pi}{N}\right)^v \sum_{k \in \Lambda} \tilde{\Phi}_\Lambda(k) e^{-i(x,k)}, \quad x \in \Lambda.$$

Наш метод суммирования следующий: мы полагаем

$$(2.4) \quad \tilde{\Phi}_\Lambda(k) = \tilde{\Phi}(k) \text{ для всех } k \in \tilde{\Lambda}.$$

Рассмотрим газ тождественных частиц в Λ со взаимодействием $\Phi_\Lambda(x)$ между ними. Ввиду устойчивости существует распределение Гиббса в Λ . Пусть $\rho_n^{(\Lambda)}(x)_n$ — корреляционные функции (см., например, [8]) в объеме Λ . Они допускают разложение в ряд Майера по интенсивности z , например,

$$\rho_1^\Lambda(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(\Lambda)} z^n.$$

Нетрудно показать, см. ниже, что существует $b_n = \lim_{N \rightarrow \infty} b_n^{(\Lambda)}$.

Теорема. Равномерно по Λ выполняется оценка $|b_n^{(\Lambda)}| \leq C^n n!$, где C зависит только от рассматриваемого взаимодействия и от β . Таким образом, $|b_n| \leq C^n n!$

Это наш основной результат. Для его доказательства мы введем диаграммы в удобном для нас виде.

Рассмотрим граф Γ с множеством вершин $\{0, 1, \dots, n\}$. Между любыми двумя вершинами $i, j, i \neq j$, не более одного ребра (i, j) . Определим вклад диаграммы Γ в объеме Λ :

$$I_\Gamma^{(\Lambda)} = \sum_{x_i \in \Lambda} \dots \sum_{x_n \in \Lambda} \prod_{(i,j) \in S} K(x_i - x_j),$$

где $K(x) = e^{-\beta\Phi(x)} - 1$. Здесь S — множество всех ребер Γ и $x_0 \equiv 0$. Каждый цикл Γ (с коэффициентами в группе \mathbb{Z}_2) можно рассматривать как подмножество S . Пусть c_1, \dots, c_k — линейно-независимые циклы в Γ , причем

$S_0 = S - \bigcup_{i=1}^k c_i$ не содержит циклов. При этом мы предполагаем, что c_i

не содержит других циклов, отличных от самого c_i . Ориентируем все ребра и все циклы произвольным образом. Пусть λ_{lj} — матрица инцидентности между ребрами l и циклами c_j . Пусть S_1, \dots, S_m — связанные компоненты

поддиаграммы $\bigcup_{i=1}^k c_i$ диаграммы Γ . Пусть $p_j \in \Lambda$ — переменные, соответствующие циклу c_j .

Лемма 2.1. Для связанной диаграммы Γ с точностью до несущественного множителя $(2\pi)^{\text{const}}$

$$(2.5) \quad I_\Gamma^{(\Lambda)} = (\tilde{K}(0))^{|S_0|} \prod_{j=1}^m \sum_{p: c_j \subset S_j} \left(\frac{\pi}{N}\right)^{\alpha_j} \prod_{l \in S_j} \tilde{K}\left(\sum \lambda_{lj} p_j\right),$$

где α_j — число циклов c_i в S_j .

Доказательство стандартное, и мы его опускаем. Из этой леммы следует, что

$$(2.6) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} I_{\Gamma}^{(\Lambda)} = I_{\Gamma} = (\tilde{K}(0))^{|\mathcal{S}_0|} \prod_{j=1}^{\infty} \int \prod_{i: c_i \in \mathcal{S}_j} dp_i \prod_{i \in \mathcal{S}_j} \tilde{K} \left(\sum_j \lambda_{ii} p_i \right).$$

Отсюда видно, что I_{Γ} не зависит от значений $\tilde{K}(k)$ в точках разрыва, кроме, возможно, точки 0.

Хорошо известно, что

$$(2.7) \quad \rho_1^{(\Lambda)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(\Lambda)} z^n,$$

где

$$(2.8) \quad b_1^{(\Lambda)} = 1, \quad b_n^{(\Lambda)} = \frac{1}{n!} \sum I_{\Gamma}^{(\Lambda)}, \quad n \geq 2,$$

и суммирование идет по всем связным Γ с n вершинами.

Используя (2.6) и (2.8), имеем следующее утверждение.

Лемма 2.2. $b_n = \lim_{N \rightarrow \infty} b_n^{(\Lambda)}$ существует и удовлетворяет оценке

$$(2.9) \quad |b_n| \leq C^{n^2}.$$

Оценка (2.9) очень груба, и наша цель будет заключаться в доказательстве лучшей оценки, т. е. сформулированной выше теоремы.

3. ОБОБЩЕННЫЕ ДИАГРАММЫ

Доказательство теоремы мы проведем, используя уравнения Кирквуда — Зальцбурга [8]:

$$(3.1) \quad \rho_1^{(\Lambda)}(x_1) = z \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(y)_n} K(x_1, (y)_n) \rho^{(\Lambda)}(y)_n \right),$$

$$\rho_m^{(\Lambda)}(x)_m = z \exp[-\beta W^1(x)_m] \left[\rho^{(\Lambda)}(x)_{m-1}' + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(y)_n} K(x_1, (y)_n) \rho_{m-1+n}^{(\Lambda)}((x)_{m-1}', (y)_n) \right],$$

где $(x)_m = (x_1, \dots, x_m)$, $(x)_{m-1}' = (x_2, \dots, x_m)$,

$$K(x, (y)_n) = \prod_{i=1}^n K(x-y_i), \quad W^1(x)_m = \sum_{j \neq 1} \Phi(x_j - x_1).$$

Мы будем итерировать уравнения Кирквуда — Зальцбурга, в результате чего получим явный ряд для их решения. Удобным является следующее определение.

Обобщенная диаграмма G состоит из множества вершин $V = \{0, 1, \dots, n\}$, множества \mathcal{S} ребер и множества $\hat{\mathcal{S}}$ обобщенных ребер. Обобщенным ребром называется упорядоченная пара (i, B) , где $i \in V$, $B \subset V$. Положим

$$I_G^{(\Lambda)} = \sum_{x_1} \dots \sum_{x_n} \left(\prod_{(i,j) \in \mathcal{S}} K_{\Lambda}(x_j - x_i) \right) \left[\prod_{(i,B) \in \hat{\mathcal{S}}} \exp \left[-\beta \sum_{k \in B} \Phi(x_i - x_k) \right] \right].$$

Здесь так же, как и выше, $x_0=0$. Обобщенная диаграмма является конечной суммой обычных диаграмм. Теперь мы определим допустимые обобщенные диаграммы. Допустимая обобщенная диаграмма определяется схемой итераций уравнений (3.1). При этом неудобно выделять переменное x_1 во втором уравнении (3.1), и мы будем пользоваться более общим уравнением

$$(3.2) \quad \rho_m^{(\Delta)}(x)_m = z \exp[-\beta W^i(x)_m] \left[\rho_{m-1}^{(\Delta)}(x)_{m-1}^i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(y)_n} K(x_i, (y)_n) \rho_{m-1+n}^{(\Delta)}((x)_{m-1}^i, (y)_n) \right]$$

где $(x)_{m-1}^i = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_m)$, $\hat{}$ означает, что x_i пропущена.

$$W^{(i)}(x)_m = \sum_{j:j \neq i} \Phi(x_j - x_i).$$

На первом шаге итерации мы выбираем один из членов правой части первого уравнения (3.1). Пусть это будет, например, $\frac{1}{n!} K(0, (y)_n) \rho^{(\Delta)}(y)_n$.

Он дает n ребер в обобщенной диаграмме. Далее, для $\rho^{(\Delta)}(y)_n$ мы используем второе уравнение (если $n > 1$). Если в правой части второго уравнения мы выбираем первый член, то число переменных в $\rho^{(\Delta)}$ уменьшается на 1, но появляется обобщенное ребро, дающее множитель $\exp[-\beta W^1(y)_n]$.

На каждом шаге итерации степень z увеличивается на 1. Таким образом, допустимая диаграмма определится последовательностью $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i = 0, 1, \dots$ или -1 . ε_i означает, что мы выбираем $(\varepsilon_i + 2)$ -й член в одном из уравнений, увеличивая число переменных на ε_i . Так, при $\varepsilon_i = -1$ мы выбираем первый член и уменьшаем число переменных на 1. Число ребер в диаграмме при этом увеличивается на $\varepsilon_i + 1$. При этом для всех

$k \leq n-1$ должно быть $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i > 0$ и $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0$. Например, диаграмма G , определяемая последовательностью $(n-1, -1, \dots, -1)$, дает вклад

$$(3.3) \quad I_G^{(\Delta)} = \frac{1}{n!} \sum_{(y)_n} K(0, (y)_n) \exp(-\beta U(y)_n).$$

Если мы во время итераций пользуемся лишь уравнениями (3.1), то трудно видеть, что $b_n^{(\Delta)} = \sum I_G^{(\Delta)}$. Мы будем пользоваться также уравнениями (3.2), выбирая на каждом шаге подходящим образом i в этих уравнениях.

4. ИНДУКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ

Мы докажем наш основной результат, итерировав уравнения (3.1) и (3.2) и суммируя на каждом шаге по одному переменному. Например, для диаграммы (3.3) получим оценку

$$(4.1) \quad \left| \sum_{(y)_n} K(0, (y)_n) \exp(-\beta U(y)_n) \right| \leq C^n n!$$

Если Φ абсолютно суммируема, то тривиально получается лучшая оценка

$$\left| \sum_{(y)_n} K(0, (y)_n) \exp(-\beta U(y)_n) \right| \leq e^{-\beta n c} \sum_{(y)_n} |K(0, (y)_n)| \leq (\text{const})^n.$$

Мы не можем так же действовать в нашем случае, так как $\sum_{(y)_n} |K(0, (y)_n)| = \infty$. Мы суммируем сначала по y_n при фиксированных $y_i - y_n, i=1, \dots, n-1$. Так как $U(y)_n$ при этом выносится за знак суммы, то можем выполнить суммирование «в явном виде». Далее повторяем эту процедуру.

Прежде чем переходить к изложению алгоритма, приведем некоторые вспомогательные оценки.

Рассмотрим функции $f(y_1, \dots, y_n)$ на Λ^{N_n} , где $N_n = \{1, \dots, n\}$. В частности, φ_A будет обозначать функцию на Λ^A : $\varphi_A = \varphi_A(y_A)$. Здесь y_A и k_A — векторы $(y_i)_{i \in A}$ и $(k_i)_{i \in A}$, соответственно, $A \subset N_n$. Пусть $\varphi_A(y_B, k_{A-B})$, для любого $B \subset A$ будет обозначать функцию на $\Lambda^B \times \tilde{\Lambda}^{A-B}$, полученную из $\varphi_A(y_A)$ преобразованием Фурье по переменным $y_i, i \in A-B$.

Определим норму

$$(4.2) \quad \|\varphi_A\|_B = \sum_{x_B} \max_{k_{A-B}} |\varphi_A(x_B, k_{A-B})|.$$

В частности, $\|\varphi_A\|_A$ есть l_1 -норма на $l_1(\Lambda^A)$, а $\|\varphi_A\|_\emptyset$ есть l_∞ -норма на $l_\infty(\tilde{\Lambda}^A)$.

Лемма 4.1. Если $\|\Phi_i\|_{l_2(\Lambda)} \leq a_i$, то

$$(4.3) \quad \|\Phi_1(x) \dots \Phi_n(x)\|_{l_1(\Lambda)} = \sum_x |\Phi_1(x) \dots \Phi_n(x)| \leq a_1 \dots a_n.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} 2 \sum_{x \in \Lambda} |\Phi_1(x) \Phi_2(x)| &\leq \sum_{x \in \Lambda} \left(\frac{a_2}{a_1} |\Phi_1(x)|^2 + \frac{a_1}{a_2} |\Phi_2(x)|^2 \right) = \\ &= \frac{a_2}{a_1} \|\Phi_1\|_{l_2}^2 + \frac{a_1}{a_2} \|\Phi_2\|_{l_2}^2 \leq 2a_1 a_2, \end{aligned}$$

но $\max_x |\Phi_i(x)| \leq \|\Phi_i\|_{l_2} \leq a_i$. Из двух последних неравенств следует лемма.

Мы имеем далее

$$\begin{aligned} (4.4) \quad K(0, (y)_n) &= \prod_{j=1}^n (K_0(y_j) + K_1(y_j)) = \\ &= \sum_A \left(\prod_{j \in A} K_1(y_j) \right) \left(\prod_{i \in \bar{A}} K_0(y_i) \right), \\ \bar{A} &= N_n - A, \quad K_0(y) = -\beta \Phi(y), \end{aligned}$$

и по лемме 4.1 $K_1(y) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\beta \Phi(y))^n}{n!} \in l_1(\Lambda)$.

Если раскрыть скобки в первом равенстве (4.4), то получим в очевид-

ных обозначениях

$$(4.5) \quad K(0, (y)_n) = \sum_A \Phi_A \Psi_{\bar{A}},$$

где

$$\|\Phi_A \Psi_{\bar{A}}\|_A \leq c_1^{|\bar{A}|} c_2^{|\bar{A}|}, \quad c_1 = \beta \max_k |\Phi(k)|, \quad c_2 = \|K_1\|_{l_1(\Lambda)}.$$

Рассмотрим теперь сумму

$$(4.6) \quad \sum_{(y)_n} f(y)_n Q(y_1, \dots, y_n),$$

где Q удовлетворяет условию: для всех $y \in \Lambda$

$$(4.7) \quad Q(y_1, \dots, y_n) = Q(y_1 + y, \dots, y_n + y),$$

и Q представима в виде

$$(4.8) \quad Q = \exp \left[-\beta \sum_{j=1}^{n-1} \Phi(m_j) \right] Q'(m)_{n-1},$$

где $Q'(m_1, \dots, m_{n-1}) = Q'(m_1 + m, \dots, m_{n-1} + m)$ для всех m .

Пусть \sum'_{y_n} означает суммирование по $y_n \in \Lambda$ при фиксированных $m_j = y_j - y_n, j=1, \dots, n-1$.

Лемма 4.2. Если $f(y)_n$ удовлетворяет условию $\|f\|_{\emptyset} \leq 1$, то имеет место представление

$$\sum'_{y_n} f(y)_n Q(y)_n = \sum_A f^A(m_1, \dots, m_{n-1}) Q'(m)_{n-1}$$

для некоторых $f^{(A)}$ с нормой $\|f^{(A)}\|_A \leq c_3^{|\bar{A}|}$, $c_3 = \|K\|_{l_2(\Lambda)}$.

Доказательство. Так как $Q(y)_n$ постоянна при таком суммировании, то ее можно вынести, и сумма сводится к

$$\begin{aligned} \sum'_{y_n} f(y)_n &= \sum'_{y_n} f(y_n + m_1, y_n + m_2, \dots, y_n) = \\ &= \sum'_{y_n} \int \tilde{f}(k_1, \dots, k_n) \exp[i(y_n + m_1)k_1 + \dots + k_n y_n] dk_1 \dots dk_n = \\ &= \left(\text{здесь } \int dk = \sum_k \left(\frac{\pi}{N} \right)^n \right) = \int \tilde{f}(k_1, \dots, k_{n-1}, \\ &-k_1 - \dots - k_{n-1}) \exp \left(i \sum_1^{n-1} k_j m_j \right) dk_1 \dots dk_{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} R(m_1, \dots, m_{n-1}). \end{aligned}$$

Для любого A можно записать

$$(4.9) \quad \tilde{R}(k_1, \dots, k_{n-1}) = \sum_{k_A} \delta_{k_A} q_{\bar{A}}(k_{\bar{A}}),$$

где $|q_{\bar{A}}(k_{\bar{A}})| \leq 1$ и δ_{k_A} равно 1 в точке k_A и нулю в остальных точках $\tilde{\Lambda}^A$.

Перепишем (4.8) следующим образом:

$$Q = \left[\prod_{j=1}^{n-1} (1+K(m_j)) \right] Q'(m)_{n-1} = \\ = \left[\sum_{A \subset \{1, \dots, n-1\}} \prod_{j \in A} K(m_j) \right] Q'(m)_{n-1}.$$

Тогда ввиду (4.3)

$$\sum_{\{\alpha_A \in \Lambda^A\}} \left| \left(\prod_{j \in A} K(x_j) \right) \delta_{K_A}(x_A) \right| \leq \left\| \prod_{j \in A} K(x_j) \right\|_{l_2} \|\delta_{K_A}\|_{l_2},$$

но $\|\delta_{k_A}\|_{l_2} = (\pi/N)^{|A|}$ и

$$\|R\|_A \leq \sum_{k_A} \|\delta_{k_A} q_A(k_A)\| \leq \sum_{k_A} \left\| \prod_{j \in A} K(x_j) \right\|_{l_2} \left(\frac{\pi}{N} \right)^{|A|} \leq c_3^{|A|}.$$

Это доказывает лемму 4.2.

Теперь полагаем $f(y)_n = K(0, (y)_n)$, $Q(y)_n = \rho_n^{(\Lambda)}(y)_n$. Затем $\rho_n^{(\Lambda)}$ мы получаем из уравнения (3.2), выбирая $i=n$. Отсюда получается множитель

$\exp \left[-\beta \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(m_i) \right]$, о котором речь шла ранее. Выберем произвольно

допустимую последовательность $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. На каждом шаге мы будем выбирать еще значения i в уравнении (3.2). Мы рассмотрим лишь случай последовательности $(n-1, -1, \dots, -1)$. Остальные обобщенные диаграммы рассматриваются аналогично.

Полученный выше результат можно сформулировать следующим образом. Пусть

$$\alpha(n, m) = \max_{\substack{f(y)_n: \|f\|_A \leq 1 \\ \|A\| = m}} \left| \sum_{(y)_n} f(y)_n Q(y)_n \right|,$$

т. е. максимум берется по всем $f(y)_n$ таким, что для всех A с $|A|=m$ норма $\|f\|_A \leq 1$. Полученный выше результат можно переформулировать таким образом.

Лемма 4.3. *Имеет место оценка*

$$\alpha(n, 0) \leq \sum_{m=0}^{n-1} \alpha(n-1, m) C_{n-1}^m (c_3)^m.$$

Мы докажем теперь

Лемму 4.4. *Имеет место оценка*

$$\alpha(n, m) \leq e^{-2\beta c} \sum_{k=m-1}^{n-1} \alpha(n-1, k) C_{n-1}^{k-(m-1)} (c_3)^{k-(m-1)},$$

где C есть константа из условия устойчивости (2.1).

Доказательство. Можно ограничиться случаем, когда для некоторых $x_1, \dots, x_m \in \Lambda$ и некоторой ψ с $\|\psi\|_{\emptyset} \leq 1$

$$f(y)_n = \delta(y_1 - x_1) \dots \delta(y_m - x_m) \psi(y_{m+1}, \dots, y_n).$$

Действительно, любая $f(y)_n$ представима в виде линейной комбинации таких функций.

Выберем теперь $l, l=1, \dots, m$, так, чтобы

$$(4.10) \quad \sum_{j:j \neq l, j=1, \dots, m} \Phi(x_l - x_j) \geq 2C.$$

Такое l существует по (2.1). Пусть $l=1$. Тогда мы действуем дальше, как в лемме 4.2, суммируя Σ' . После простой выкладки получаем

$$\int \exp \left\{ -i \sum_{j=2}^m (x_1, k_j) \right\} \exp \left\{ i \sum_{j=2}^m (x_j, k_j) \right\} \times \\ \times \bar{\Psi}(k_{m+1}, \dots, k_n) \exp \left[i \sum_{j=2}^n (m_j, k_j) \right] \prod_{j=2}^n dk_j.$$

После этого так же, как и ранее, мы должны разложить экспоненту

$\exp \left[-\beta \sum_{j=2}^n \Phi(x_1 - x_j) \right]$. Мы делаем это иначе, чем раньше, а именно:

$$\exp \left[-\beta \sum_{j=2}^n \Phi(x_1 - x_j) \right] = \exp \left[-\beta \sum_{j=2}^m \Phi(z_j) \right] \prod_{j=m+1}^n (K_0(z_j) + K_1(z_j)).$$

Далее мы действуем в точности, как при доказательстве предыдущей леммы, и используя оценку (4.10), получаем результат.

Из двух последних лемм получается искомая оценка для диаграммы $(n-1, -1, \dots, -1)$. Остальные диаграммы рассматриваются аналогично. Заметив теперь, что число последовательностей $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ не превышает 4^n , получаем нашу основную теорему.

З а м е ч а н и е. Мы пренебрегаем улучшающими оценку множителями,

$\prod \frac{1}{(\varepsilon_i + 1)!}$, возникающими при итерировании уравнений. Этот множитель существенно улучшил бы результат в диаграмме $(n-1, -1, \dots, -1)$, но не в диаграмме $(1, 1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.

Аналогичная техника применима к системе частиц с твердой сердцевиной, непрерывному газу и спиновым системам.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
21 сентября 1979 г.

Литература

- [1] J. Glimm, A. Jaffe. Commun. Math. Phys., **56**, 195, 1977.
- [2] E. H. Lieb, J. L. Lebowitz. Adv. Math., **9**, 316, 1972.
- [3] K. Griffiths. Phys. Rev., **172**, 655, 1969.
- [4] J. Fröhlich, B. Simon, T. Spencer. Commun. Math. Phys., **50**, 79, 1976.
- [5] J. Fröhlich, Y. M. Park. Commun. Math. Phys., **59**, 235, 1978.
- [6] Л. В. Липатов. ЖЭТФ, **45**, 216, 1977.
- [7] E. Bressin, J.-C. Le Guillou, J. Zinn-Justin. Phys. Rev., **D15**, 1544; 1548, 1977.
- [8] Д. Рюэль. Статистическая механика, «Мир», 1971.
- [9] А. Г. Басуев, А. Н. Васильев. ТМФ, **18**, 181, 1974.

ESTIMATES OF THE COEFFICIENTS OF THE MAYER EXPANSIONS ON THE BOUNDARY OF INFRARED REGION

V. A. Malyshev

Classical gas on the lattice and with the two-particle interaction $\Phi(x-y)$ is considered. Rejecting the regularity but assuming the stability and boundedness of the Fourier transformation $\bar{\Phi}(k)$ we prove the estimate $|b_n| < C^n n!$ for the coefficients of the Mayer expansion $\Sigma b_n z^n$ e. g. for the first correlation function.