В. А. Малышев, Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической физики и квантовой теории поля, *УМН*, 1980, том 35, выпуск 2(212), 3–53

1980 г. март—апрель *т. 35, вып. 2 (212)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

КЛАСТЕРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЕШЕТЧАТЫХ МОДЕЛЯХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В. А. Малышев

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Целью настоящей статьи является изложение метода кластерных разложений для построения, исследования марковских случайных полей на решетке, а также для исследования спектра связанных с ними стохастических операторов (трансфер-матриц).

Запас случайных полей, которые можно просто построить, невелик. Это, например, поля с независимыми значениями, гауссовы случайные поля, функции от них и некоторые другие. Запас таких марковских полей еще меньше.

Чрезвычайно большой класс составляют гиббсовские случайные поля. Одним из основных их достоинств (отсутствующее у перечисленных выше полей) является существование правильной «физической» структуры у спектра связанного с ними стохастического оператора: наличие частиц и нетривиального рассеяния. Однако гиббсовские поля строить и исследовать довольно трудно.

Кластерное разложение (если его можно получить) позволяет наиболее полно исследовать соответствующее гиббсовское поле. Кластерные разложения, грубо говоря, разделяются на два класса.

Вакуумные или «первичные» кластерные разложения служат для построения поля и исследования основных его важных свойств. Для исследования спектра трансфер-матрицы требуется существенно более тонкая техника: N-частичное или полное кластерное разложение.

Формальные ряды кластерных разложений используются в физике уже полстолетия.

Первое доказательство сходимости получено Н. Н. Боголюбовым и Б. И. Хацетом в 1947 году [1].

Спустя примерно 10 лет началось бурное развитие теории. Многие новые идеи здесь принадлежали Глимму, Джаффе, Спенсеру.

Глава I посвящена вакуумным кластерным разложениям. В § 1.1, 1.3 излагаются основы теории семиинвариантов, диаграммной техники и понятие связности. В § 1.2 вводится понятие кластерного разложения. В § 1.4 строится гиббсовская перестройка независимого случайного поля с произвольным значением спина. Мы выписываем все члены разложения в явном виде, что необходимо для дальнейшего. В § 1.5 строится гиббсовская перестройка гауссова поля, где, наоборот, читатель может ознакомиться с одним из видов уравнений Кирквуда — Зальцбурга. В § 6 даются два примера низкотемпературных разложений: модель Изинга с дискретной симметрией и модель с непрерывной симметрией. § 1.7 посвящен обзору других известных типов кластерных разложений и их применений.

Глава II посвящена получению оценок семиинвариантов финитных функционалов от случайного поля, для которого получено вакуумное экспоненциально регулярное кластерное разложение. Эти оценки являются решающими для доказательства кластерности трансфер-матрицы, получаемого в главе III.

Кластерная структура трансфер-матрицы является обобщением (на бесконечно частичный случай) структуры таких важных классов операторов как, например, псевдодифференциальные операторы, многомерные теплицевы операторы или резольвенты конечночастичных операторов Шрёдингера, где имеется главная часть (типа свертки), а остальные слагаемые являются компактными по части или всем переменным. Использование кластерной структуры для исследования спектра трансфер-матрицы см., например, в [19], [22], [99], [100]; см. также § 3.3 главы III.

С физической точки зрения возникающие здесь модели отвечают решетчатым моделям квантовой теории поля или квантовым решетчатым моделям при нулевой температуре (в основном состоянии). В последнее время в физической литературе активно исследуется спектр калибровочных теорий на решетке при малой константе $1/g^2$. Настоящая работа может служить строгой математической базой для таких вычислений.

Формально статья не требует специальных знаний, но полезно знакомство с основами статистической физики. Техника данной работы непривычна для классической математики. Но после некоторого навыка доказательства простых комбинаторных оценок, которые часто опускаются, для рядов, члены которых занумерованы конечными подмножествами решетки, не составят у читателя особого труда. Нумерация своя в каждой главе.

В заключение хочу поблагодарить Р. А. Минлоса и Я. Г. Синая за ценные обсуждения и замечания, способствовавшие улучшению изложения.

ГЛАВА I

ВАКУУМНЫЕ КЛАСТЕРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

§ 1.1. Семиинварианты и диаграммы

Если в дальнейшем мы говорим о системе случайных величин, то считаем, что они заданы на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ). Конкретный вид этого вероятностного пространства для нас часто неважен.

Математическое ожидание случайной величины f относительно меры μ обозначим

$$\langle f\rangle \equiv \langle f\rangle_\mu = \int\limits_\Omega f\,d\mu,$$

снабжая $\langle\cdot\rangle$ индексом μ, если это необходимо. Характеристическая функция случайной величины f тогда равна $\langle e^{\lambda f}\rangle$ (для мнимых λ). Мы будем всегда предполагать, что все моменты $\langle f^n\rangle$ существуют. Тогда формальный ряд Тейлора $\langle e^{\lambda f}\rangle$ в точке $\lambda = 0$ имеет вид

$$\langle e^{\lambda f}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\langle f^n\rangle. \tag{1.1}$$

Семиинварианты, обозначаемые

$$\langle f, \ldots, f\rangle \equiv \langle f^{,n}\rangle, \tag{1.2}$$

определяются как коэффициенты формального ряда Тейлора

$$\ln\langle e^{\lambda f}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\langle f^{,n}\rangle. \tag{1.3}$$

Семиинварианты для системы случайных величин $f_1, \ldots, f_k$, для которых мы применяем два обозначения ($f^{\cdot}_{\mathcal{N}}$ — система случайных величин f_i, $i \in \mathcal{N} = \{1, \ldots, k\}$)

$$\langle f_1, \ldots, f_k\rangle \equiv \langle f^{\cdot}_{\mathcal{N}}\rangle \tag{1.4}$$

считаются полилинейными симметрическими функциями своих аргументов $f_1, \ldots, f_k$ и определяются подстановкой $\lambda = 1$,

$$f = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k,$$

$$\langle f^{,n}\rangle = \sum_{i_1=1}^{k} \ldots \sum_{i_n=1}^{k} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_n} \langle f_{i_1}, \ldots, f_{i_n}\rangle \tag{1.5}$$

в формулу (1.3), т. е. из формального ряда Тейлора логарифма функции $\langle e^{\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k}\rangle$ в точке

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Эквивалентным определением является

$$\langle f_1, \ldots, f_k\rangle = \left.\frac{\partial^k \ln\langle e^{\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k}\rangle}{\partial\lambda_1 \ldots \partial\lambda_k}\right|_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0} \tag{1.5'}$$

(λ_i чисто мнимые).

Обозначим через $\mathfrak{A}$ структуру (см. дополнение) всех разбиений

$$\alpha = (T_1, \ldots, T_k) \quad (k = 1, \ldots, n),$$

$$T_i \cap T_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad T_1 \cup \ldots \cup T_k = \mathcal{N},$$

множества $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$.

Беря экспоненту от правой части (1.3) и приравнивая ее коэффициент при λ^n соответствующему коэффициенту правой части (1.1), мы получим, учитывая (1.5), что для любых случайных величин $f_1, \ldots, f_n$ имеет место равенство

$$(1.6) \qquad \langle f_1 \ldots f_n \rangle = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \langle f'_{T_1} \rangle \ldots \langle f'_{T_k} \rangle,$$

где f'_T — набор случайных величин f_i, $i \in T$.

Если взять логарифм от правой части (1.1) и приравнять его к правой части (1.3), то получим формулу, обратную к (1.6):

$$(1.7) \qquad \langle f_1, \ldots, f_n \rangle = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} (-1)^{k-1} (k-1)! \langle f_{T_1} \rangle \ldots \langle f_{T_k} \rangle,$$

где

$$f_T = \prod_{i \in T} f_i.$$

Формулу (1.6) или (1.7) можно взять за определение семиинвариантов. Мы приведем еще четыре важнейших свойства семиинвариантов.

I. *Для любой гауссовой системы случайных величин* $f_1, \ldots, f_n$

$$(1.8) \qquad \langle f_1, \ldots, f_n \rangle = 0, \quad n > 2.$$

Это следует из того, что логарифм характеристической функции гауссовой системы является многочленом степени 2. Свойство (1.8) может быть принято за определение гауссовой системы.

II. *Если существует разбиение* ζ: $A \cup B = \mathcal{N}$ *такое, что система* $\{f_i,\ i \in A\}$ *и система* $\{f_j,\ j \in B\}$ *взаимно независимы, то*

$$(1.9) \qquad \langle f_1, \ldots, f_n \rangle = 0.$$

Докажем это свойство индукцией по n. Перепишем (1.6) в виде

$$\langle f'_{\mathcal{N}} \rangle = \langle f_{\mathcal{N}} \rangle - \sum_{\alpha \neq 1} = \langle f_{\mathcal{N}} \rangle - \sum_{\alpha}{}' - \sum_{\alpha}{}'',$$

где в $\sum'$ суммирование по всем $\alpha < \zeta$, а в $\sum''$ — по остальным α, отличным от 1. Все члены $\sum''$ равны нулю по предположению индукции. В то же время

$$\sum{}' = \langle f_A \rangle \langle f_B \rangle = \langle f_{\mathcal{N}} \rangle.$$

Отсюда и следует (1.9).

III. (Обобщенное разложение по связным диаграммам.) *Пусть* $\beta = (B_1, \ldots, B_k) \in \mathfrak{A}$. *Тогда*

$$(1.10) \qquad \langle f_{B_1}, \ldots, f_{B_k} \rangle = \sum_{\alpha}{}' \langle f'_{A_1} \rangle \ldots \langle f'_{A_m} \rangle,$$

где суммирование по всем разбиениям $\alpha = (A_1, \ldots, A_m) \in \mathfrak{A}$ *таким, что* $\alpha \vee \beta = 1$. *Знак* $\vee$ *определен в дополнении.*

Если доказать это для случая $|B_1| = 2$, $|B_i| = 1$, $i \geqslant 2$, то (1.10) нетрудно доказывается по индукции. В этом же случае разложим по формуле (1.6) выражения $\langle f_{B_1} f_2 \ldots f_n \rangle$ и $\langle f_1 f'_1 f_2 \ldots f_n \rangle$, где $f_{B_1} = f_1 f'_1$. Приравнивая эти разложения, индукцией по n доказываем требуемое утверждение.

IV. *Если f ограничена, то*

$$(1.11) \qquad |\langle f^{,n} \rangle| \leqslant C^n n!$$

с константой C, зависящей от $\sup |f| = c_1$.

Доказательство этого просто. Так как

$$|\langle f^n \rangle| \leqslant c_1^n,$$

то производящая функция моментов $\langle e^{\lambda f}\rangle$ является целой функцией λ, не обращающейся в 0 в области $|\lambda| < 1/2c_1$, поэтому ее логарифм аналитичен в этой области и применяя формулу Коши для производных (при подходящем выборе контура интегрирования) мы получаем результат. Условие ограниченности f можно несколько ослабить. Сама же оценка (1.11) неулучшаема.

Остальная часть этого параграфа посвящена диаграммной технике вычисления семиинвариантов и моментов. Пусть задана гауссова система случайных величин $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \sum, \mu)$. Пусть $F = \prod_{i=1}^{k} \sigma_i$. Виковское произведение $:F:$ определяется как перпендикуляр из точки F на подпространство в $L_2(\Omega, \sum, \mu)$, порожденное всеми произведениями вида

$$\sigma_1^{n_1} \ldots \sigma_k^{n_k}, \quad \sum_i n_i \leqslant k-1 \quad (n_i = 0, \ldots, k-1).$$

Эквивалентным образом (см., например, [91]) можно определить $:F:$, как производную $\frac{\partial^k}{\partial a_1 \ldots \partial a_k}$ от правой части равенства при $a_1 = \ldots a_k = 0$

$$(1.12) \qquad : \exp \sum_{j=1}^{k} a_j\sigma_j : = \frac{\exp \sum a_j\sigma_j}{\langle \exp \sum a_j\sigma_j \rangle}.$$

Рассмотрим теперь множество $V \overset{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\}$. Его точки будут называться вершинами. Каждой вершине i сопоставим упорядоченное множество

$$W_i = \{(i, j) \colon j = 1, \ldots, k_i\}$$

отростков. Пусть

$$W = W_1 \cup \ldots \cup W_n.$$

Диаграммой $G = G(V, W)$ будем называть разбиение множества W такое, что каждый элемент этого разбиения имеет мощность 1 или 2. Элементы мощности 1 назовем свободными отростками, а мощности 2 — ребрами диаграммы G.

Пусть отростку (i, j) сопоставлена случайная величина σ_{ij} (все они образуют гауссову систему) с $\langle\sigma_{ij}\rangle = 0$. Сопоставим каждому ребру $\{(i, j), (k, l)\}$ диаграммы число $\langle\sigma_{ij}\sigma_{kl}\rangle$. Тогда диаграмме G сопоставим случайную величину

$$(1.13) \qquad I_G = \Big(\prod_L \langle\sigma_{ij}\sigma_{kl}\rangle\Big) \prod_{i=1}^{n} : \prod_{j \in \widetilde{W}_i} \sigma_{ij} : ,$$

где L — множество всех ребер G, $\widetilde{W}_i$ — множество всех свободных отростков вершины i. Рассмотрим теперь все одновершинные диаграммы G с k отростками и сопоставленными им гауссовыми $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$. Мы докажем формулу

$$(1.14) \qquad \sigma_1 \ldots \sigma_k = \sum I_G,$$

где суммирование проводится по всем диаграммам с одной вершиной и k отростками. Действительно, из (1.12) имеем

$$(1.15) \qquad \exp \sum a_j\sigma_j = : \exp \sum a_j\sigma_j : \exp \frac{1}{2} \sum a_i a_j \langle\sigma_i\sigma_j\rangle.$$

Приравнивая коэффициенты при $a_1 \ldots a_k$ у обеих частей равенства, получаем (1.14).

Вернемся теперь к диаграммам общего вида и положим

$$F_i = \prod_{j=1}^{k_i} \sigma_{ij}.$$

Предложение 1.1. *Следующие выражения*

1) $\langle \Pi F_i \rangle$,
2) $\langle F_1, \ldots, F_n \rangle$,
3) $\langle \Pi{:}F_i{:} \rangle$,
4) $\langle {:}F_1{:}, \ldots, {:}F_n{:} \rangle$

равны

$$\sum I_G,$$

где сумма берется по вакуумным (т. е. без свободных отростков) диаграммам G, причем соответственно по:

1) *всем (вакуумным) G;*
2) *всем связным G;*
3) *всем G без петель (петлей называется ребро вида $\{(i, j), (i, k)\}$);*
4) *всем связным G без петель.*

Доказательство. 1) Это есть переформулировка формулы (1.6).

2) Это есть частный случай обобщенного разложения по связным диаграммам (1.10), если учесть свойство (1.8).

3) и 4) доказываются индукцией, используя (1.14), а также 1) или 2) соответственно.

§ 1.2. Кластерные разложения

Пусть задано направленное (по возрастанию) семейство конечных множеств $V \uparrow \mathbb{Z}^\nu$ и последовательность мер μ_V на S^V, где S — множество значений поля в каждой точке $t \in \mathbb{Z}^\nu$ (множество значений спина), которое предполагается измеримым пространством.

Пусть Σ — стандартная σ-алгебра на $S^{\mathbb{Z}^\nu} = \Omega$, Σ_A — ее σ-подалгебра, зависящая от точек $t \in A \subset \mathbb{Z}^\nu$. Мы будем иногда отождествлять Σ_A со стандартной σ-алгеброй на S^A. Будем писать $F = F_A$, если F измерима относительно Σ_A.

Определение. Пусть для любой ограниченной F_A, $|A| < \infty$, и любого V из нашего семейства имеет место

$$\langle F_A \rangle_V \equiv \langle F_A \rangle_{\mu_V} = \sum_R b_R^{(V)}, \tag{2.1}$$

где сумма берется по всем конечным $R \subset V$, а числа $b_R^{(V)} = b_R^{(V)}(F_A)$ обладают следующими свойствами:

С1. $b_R^{(V)}$ сходятся к некоторым числам b_R для всех R при $V \uparrow \mathbb{Z}^\nu$,

С2. $|b_R^{(V)}|$ равномерно по V ограничены числами $\hat{b}_R$, причем ряд $\sum\limits_R \hat{b}_R$ сходится.

Легко видеть, что тогда

$$\langle F_A \rangle = \lim_V \langle F_A \rangle_V$$

существуют и определяют предельную меру μ на Ω, причем

$$\langle F_A \rangle = \sum b_R. \tag{2.2}$$

Мы тогда будем говорить, что для предельной меры имеет место кластерное разложение (2.2).

Если для разных систем μ_V (например, для различных «граничных условий») предельные числа b_R одни и те же, то и предельная мера μ одна и та же (не зависит от «граничных условий»). Часто можно доказать, что $b_R^{(V)}$ стабилизируются начиная с некоторого $V = V(R)$.

Пусть теперь выполнено также условие

С3. $b_R^{(V)}$ аналитически зависят от некоторых параметров в открытой области Λ_0 вещественного пространства этих параметров и аналитически продолжаются в некоторую область $\Lambda_1 \supset \Lambda_0$ комплексного пространства, причем в Λ_1 равномерно выполнено условие С2.

Тогда по теореме Витали предельные $\langle F_A \rangle$ аналитически зависят от параметров в Λ_0.

Мы показали, таким образом, как существование кластерного разложения влечет существование, единственность и аналитичность предельной меры μ.

В следующих параграфах для ряда случаев мы построим кластерные разложения, причем $b_R^{(V)}$ и b_R будут выписаны в явном виде. Мы докажем также регулярность этих кластерных разложений, которая играет важную роль в получении равномерных кластерных оценок и доказательстве кластерности трансфер-матрицы.

Далее мы используем некоторые обозначения из § 1.3.

Пусть теперь фиксировано $\mathfrak{A}$. В дальнейшем будет использовано условие: в (2.1) только те $b_R^{(V)}$ отличны от нуля, для которых существует набор Γ множеств из $\mathfrak{A}$ такой, что $\widetilde{\Gamma} = R$ и набор $\{A, \Gamma\}$ связен.

Кластерное разложение при этом будет называться экспоненциально регулярным, если для всех F_{A_1}, F_{A_2} и R таких, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, имеет место

$$b_R(F_{A_1}F_{A_2}) = \sum b_{R_1}(F_{A_1})\, b_{R_2}(F_{A_2}) + \widetilde{b}_R(F_{A_1}F_{A_2}), \tag{2.3}$$

где сумма берется по парам (R_1, R_2) таким, что

$$R_1 \cup R_2 = R, \qquad (A_1 \cup R_1) \cap (A_2 \cup R_2) = \varnothing,$$

и

$$|\widetilde{b}_R(F_{A_1}F_{A_2})| < c(F_{A_1}F_{A_2})\,(C\lambda)^{\delta_R(\mathfrak{A},\,\{A_1,\,A_2\})}, \tag{2.4}$$

где λ достаточно мало́.

В случае, если не существует набора Γ такого, что $\widetilde{\Gamma} = R$ и набор $\{A_1, A_2, \Gamma\}$ связен, то

$$b_R(F_{A_1}F_{A_2}) = b_{R_1}(F_{A_1})\, b_{R_2}(F_{A_2}), \tag{2.5}$$

где R_1 и R_2 определяются единственным образом.

§ 1.3. Связность

Здесь мы даем определения, обозначения и простые леммы, используемые в дальнейших частях этой работы.

Множество $A \subset \mathbb{Z}^\nu$ называется d-связным, если для любых двух точек $t, t' \in A$ существует последовательность $t = t_1, t_2, \ldots, t_n = t'$ точек $t_i \in A$ таких, что

$$|t_i - t_{i-1}| \leqslant d \quad \text{для} \quad i = 2, \ldots, n.$$

Набор (неупорядоченный) $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ подмножеств $A_i \subset \mathbb{Z}^\nu$ называется связным, если связен следующий граф G_Γ: он имеет вершины $1, \ldots, n$, причем между i и j существует ребро тогда и только тогда, когда

$$A_i \cap A_j \neq \varnothing.$$

Л е м м а 3.1. *Существует константа $C = C(\nu, d)$ такая, что число различных d-связных множеств A мощности r, содержащих заданную точку t, не превосходит C^r.*

Лемма 3.2. *Существует константа $C = C(\nu, \rho)$ такая, что число связных наборов*

$$\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\},$$

в которых все A_i попарно различны, $\widetilde{\Gamma} = \bigcup A_i$, содержит фиксированную точку t и $\operatorname{diam} A_i \leqslant \rho$, не превосходит C^n.

Доказательство этих лемм просто и мы его не приводим.

Мы будем рассматривать в дальнейшем системы $\mathfrak{A}$ конечных подмножеств $\mathbb{Z}^\nu$. Всегда предполагается, что $\mathfrak{A}$ связна (т. е. $G_{\mathfrak{A}}$ связен), трансляционно инвариантна и диаметр элементов $\mathfrak{A}$ равномерно ограничен.

Для любого $A \subset \mathbb{Z}^\nu$ обозначим:

d_A — минимальное d такое, что существует 1-связное множество B, содержащее A, и такое, что $|B| = d$;

$d_A(\mathfrak{A})$ — минимальное d такое, что существует связной набор $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_d\}$, $A_i \in \mathfrak{A}$, и такой, что

$$\widetilde{\Gamma} \equiv \bigcup_{i=1}^{d} A_i \supset A. \tag{3.1}$$

Пусть α — некоторая конечная система множеств. Тогда $\delta_A(\mathfrak{A}, \alpha)$ — минимальное d такое, что существует набор Γ с $|\Gamma| = d$ и $\widetilde{\Gamma} = A$ и такой, что набор Γ с добавленными к нему $B_i \in \alpha$ является связным;

$d_{\mathfrak{A}}(B_1, \ldots, B_n)$ — минимальное d такое, что существуют $A_1, \ldots, A_d \in \mathfrak{A}$ такие, что набор $\{B_1, \ldots, B_n, A_1, \ldots, A_d\}$ связен.

Соглашение о константах. Далее C, C_1, C_2, ... будут обозначать положительные константы зависящие только от размерности ν и, возможно, от рассматриваемой системы $\mathfrak{A}$. В одной формуле одна буква, например, C, может обозначать различные числа. Все вводимые константы легко оцениваются.

Нетрудно убедиться, что

$$C_1 d_A \leqslant d_A(\mathfrak{A}) \leqslant C_2 d_A. \tag{3.2}$$

Лемма 3.3. *Число подмножеств $B \subset \mathbb{Z}^\nu$, содержащих фиксированную точку t и таких, что $d_B = r$, не превосходит C^r.*

Доказательство. Пусть $B_1, \ldots, B_p$ — все такие подмножества. Пусть D_i 1-связно, $D_i \supset B_i$ и $|D_i| = d_{B_i} = r$. Для каждого i существует не более 2^r подмножеств среди $D_1, \ldots, D_p$, совпадающих с D_i (так как если $D_i = D_j$, то $B_j \subset D_i$, а у D_i не более 2^r подмножеств). Поэтому лемма следует из леммы 1.

Лемма 3.4. *Пусть фиксировано $\mathfrak{A}$. Тогда для любого C существуют C_1, C_2 такие, что для любого конечного $T \subset \mathbb{Z}^\nu$ и для достаточно малых $\lambda > 0$*

$$\sum_{\Gamma} (C\lambda)^{|\Gamma|} \leqslant (C_1\lambda)^n C_2^{|T|},$$

где суммирование по всем Γ таким, что $|\Gamma| \geqslant n$ и набор $\{\Gamma, T\}$ связен.

Доказательство. Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ — все максимальные связные поднаборы Γ (единственным образом определенные). Для каждого $i = 1, \ldots, r$ выберем первую в лексикографическом порядке точку t_i среди точек $\widetilde{\Gamma}_i \cap T$.

Число лексикографически упорядоченных наборов $(t_1, \ldots, t_r)$ не превосходит $2^{|T|}$. Число различных Γ_i для данного t_i подсчитывается в лемме 3.2.

§ 1.4. Возмущение независимого поля

В обозначениях § 1.2 пусть на S задана вероятностная мера μ^0. Пусть μ^0_A — произведение этих мер, определенное на S^A. Через μ^0 мы будем обозначать также $\mu^0_{\mathbb{Z}^\nu}$, что не приведет к недоразумениям, $\langle\cdot\rangle_0 = \langle\cdot\rangle_{\mu^0}$. Пусть задана система $\mathfrak{A}$ (см. § 1.3) и для каждого $A \in \mathfrak{A}$ задана функция Φ_A (измеримая относительно Σ_A) на Ω. Набор $\Phi = (\Phi_A)$ называется потенциалом.

Положим

$$k_A = \exp(-\lambda\Phi_A) - 1, \qquad k_\Gamma = \prod_{A\in\Gamma} k_A$$

для каждого набора Γ (§ 1.3) множеств из $\mathfrak{A}$. Далее константы C, C_i будут зависеть только от ν, $\mathfrak{A}$, Φ.

В этом параграфе мы будем предполагать, что существуют константы $\lambda_0 > 0$ и $C > 0$ такие, что равномерно для $0 \leqslant \lambda < \lambda_0$ и для всех Γ

$$|\langle k_\Gamma\rangle_0| \leqslant (C\lambda)^{|\Gamma|}. \tag{4.1}$$

Приведем пример потенциалов, для которых выполнено условие (4.1).

Мы потребуем, чтобы функции Φ_A были равномерно ограничены снизу и имели вид

$$\Phi_A = \sum_{\alpha=1}^{N_A} \varphi^{(A)}_{\alpha, t_1} \cdots \varphi^{(A)}_{\alpha, t_n}, \tag{4.2}$$

где $A = \{t_1, \ldots, t_n\}$, причем N_A и математические ожидания $\langle|\varphi^{(A)}_{\alpha, t_i}|^p\rangle_0$ для любого $p > 0$ ограничены равномерно по α, A, t_i (но не по p).

С помощью неравенства

$$|\langle k_\Gamma\rangle_0| = \left|\left\langle \prod_{A\in\Gamma} \int_0^\lambda \exp(-\lambda'\Phi_A)\cdot(-\Phi_A)\,d\lambda'\right\rangle_0\right| \leqslant (C_1\lambda)^{|\Gamma|}\left\langle \prod_{A\in\Gamma} |\Phi_A|\right\rangle_0,$$

используя независимость меры $\langle\cdot\rangle_0$, мы получаем (4.1) для этого случая.

Гиббсовская мера μ_V (в объеме V) задается плотностью

$$\frac{d\mu_V}{d\mu_0} = Z_V^{-1}\exp(-\lambda U_V), \tag{4.3}$$

где

$$U_V = \sum_{A\subset V} \Phi_A, \qquad Z_V = \langle\exp(-\lambda U_V)\rangle_0$$

существует ввиду (4.1).

Обозначим $\langle\cdot\rangle_V = \langle\cdot\rangle_{\mu_V}$.

Теорема 4.1. *При условии* (4.1) μ_V *имеет кластерное разложение* (*для любой последовательности* $V \nearrow \mathbb{Z}^\nu$) *для* $0 \leqslant \lambda < \lambda_0$ *с достаточно малым* $\lambda_0 > 0$.

Основой доказательства этой теоремы является следующая формула. Фиксируем некоторое $B \subset V$. Тогда

$$\exp(-\lambda U_V) = \prod_{A\subset V}(1 + k_A) = \sum k_\Gamma = \sum_\Gamma{}' k_\Gamma \exp(-\lambda U_{V-(B\cup\widetilde{\Gamma})}), \tag{4.4}$$

где в первой сумме $\sum$ суммирование по всем Γ (включая пустой), а в $\sum'$ — по всем $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_k\}$ таким, что набор $\{B, \Gamma\}$ связен. Последнее равенство может быть получено, если разбить $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ на максимальный $\Gamma' \subset \Gamma$ такой, что $\{B, \Gamma'\}$ связен, и пересуммировать по всем Γ'' таким, что $\widetilde{\Gamma}'' \subset V - (B \cup \widetilde{\Gamma}')$, воспользовавшись

$$\sum k_{\Gamma''} = \exp(-\lambda U_{V-(B\cup\widetilde{\Gamma}')}).$$

Подставляя (4.4) в $\langle\psi_B \exp(-\lambda U_V)\rangle_0$, деля на Z_V, имеем

$$\langle\psi_B\rangle_V = \sum_{\Gamma}{}' \langle\psi_B k_\Gamma\rangle_0 f^{(V)}_{B\cup\tilde\Gamma}, \tag{4.5}$$

где

$$f^{(V)}_{B\cup\tilde\Gamma} = Z_{V-B\cup\tilde\Gamma}/Z_V, \quad B\subset V.$$

Пусть для каждого $A\subset\mathbb{Z}^\nu$ фиксировано одноточечное множество $t_A\in A$. Тогда, если применить (4.4) к $f^{(V)}_{A-t_A}$, получим

$$f^{(V)}_A = f^{(V)}_{A-t_A} - \sum_{\Gamma}{}'' \langle k_\Gamma\rangle_0 f^{(V)}_{A\cup\tilde\Gamma}, \tag{4.6}$$

$$f_\varnothing = 1,$$

где в $\sum''$ суммирование по всем связным Γ таким, что $t_A\in\tilde\Gamma$ и $\tilde\Gamma\subset V-(A-t_A)$. Мы получим сейчас явный ряд для $\langle\psi_B\rangle_V$ и для $f^{(V)}_A$.

Пусть $\mathscr{B}$ — множество всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^\nu$. Проведем между двумя точками $B_1, B_2\in\mathscr{B}$ ребро, если $B_1 = B_2 - t_{B_2}$ или наоборот. $\mathscr{B}$ тогда есть связное дерево. Вершина $\varnothing$ является самой нижней вершиной этого дерева. Для каждой вершины $B\in\mathscr{B}$ точно $|B|$ вершин лежит ниже $\mathscr{B}$.

Рассмотрим для любого $q = 0, 1, \ldots$ конечную последовательность пар

$$\gamma = [(B_1, \Gamma_1), \ldots, (B_q, \Gamma_q)],$$

где

$$B_i = B_i(\gamma)\in\mathscr{B}$$

и наборы множеств $\Gamma_i = \Gamma_i(\gamma)$ из $\mathfrak{A}$ таковы, что

1) для $p>1$ B_p лежит ниже $B_{p-1}\cup\tilde\Gamma_{p-1}$ в $\mathscr{B}$;

2) для $p>1$ Γ_p — непустой связной набор такой, что

$$t_{B_p}\in\tilde\Gamma_p\subset V-(B_p-t_{B_p}).$$

Лемма 4.1.

$$\langle\psi_B\rangle_V = \sum_{\gamma}{}^{(V)} a_\gamma, \tag{4.7}$$

где

$$a_\gamma = \langle\psi_B k_{\Gamma_1(\gamma)}\rangle_0 \langle -k_{\Gamma_2(\gamma)}\rangle_0 \ldots \langle -k_{\Gamma_q(\gamma)}\rangle_0,$$

и суммирование по всем γ, *удовлетворяющим условиям* 1) *и* 2) *и следующему условию:*

3) $B_1(\gamma) = B$, $\Gamma_1(\gamma)$ *может быть либо пустым* ($k_\varnothing = 1$) *или таким, что* $\{B, \Gamma_1\}$ *связен.*

Итерируя систему (4.6), мы получим

$$f_A = 1 + \sum_{\gamma} \tilde a_\gamma, \tag{4.8}$$

где

$$\tilde a_\gamma = \langle -k_{\Gamma_1}\rangle_0 \ldots \langle -k_{\Gamma_q}\rangle_0$$

удовлетворяют условиям 1) и 2), причем условию 2) также для $p\geqslant 1$ и, кроме того, B_1 лежит ниже A или $B_1 = A$. Формула (4.7) следует тогда из (4.5) и (4.8).

Мы можем (пока формально) считать, что $V=\mathbb{Z}^\nu$, т. е. в условии 2) заменить V на $\mathbb{Z}^\nu$. Докажем абсолютную сходимость ряда $\sum a_\gamma$ в этих условиях. Отсюда очевидно следует существование кластерного разложения, так как каждый член ряда $\sum^{(V)} a_\gamma$ есть в то же время член ряда $\sum^{(\mathbb{Z}^\nu)} a_\gamma$.

Для доказательства абсолютной сходимости используем (4.1). Тогда

(4.9) $$|a_\gamma| \leqslant C(\psi_B)(C\lambda)^{|\Gamma_1|+\ldots+|\Gamma_q|},$$

где, например, если ψ_B ограничена, то

$$C(\psi_B) = \sup |\psi_B|,$$

или, например, в $L_2(d\mu^0)$

$$C(\psi_B) = \|\psi_B\|_2^{(0)},$$

и тогда

$$|\langle\psi_B k_\Gamma\rangle_0| \leqslant C(\psi_B)(C\lambda)^{|\Gamma|}.$$

Обозначим

$$r_i = |B_i \cup \widetilde{\Gamma}_i - B_{i+1}| = |B_i| + |\widetilde{\Gamma}_i| - 1 - |B_{i+1}|,$$

т. е. r_i определяет, насколько мы спускаемся вниз по дереву $\mathscr{B}$, выбирая B_{i+1}.

Имеем

$$\sum_{i=1}^{q-1} r_i \leqslant |B| + \sum_i |\widetilde{\Gamma}_i|,$$

поэтому для заданных чисел $|\widetilde{\Gamma}_1|, \ldots, |\widetilde{\Gamma}_q|$ число различных последовательностей $(r_1, \ldots, r_{q-1})$ не превосходит

$$2^{|B| + \sum_{i=1}^{q} |\widetilde{\Gamma}_i|}.$$

Используя доказательство леммы 3.4, мы видим, что число последовательностей γ таких, что

$$|\Gamma_1(\gamma)| = N_1, \ldots, |\Gamma_q(\gamma)| = N_q,$$

не превосходит

(4.10) $$4^{|B|}C^{N_1+\ldots+N_q}.$$

Из (4.9) и (4.10) очевидным образом следует абсолютная сходимость всего ряда.

Определим носитель γ

$$\operatorname{supp}\gamma = \widetilde{\Gamma}_1 \cup \ldots \cup \widetilde{\Gamma}_q.$$

Обозначая

(4.11) $$b_R(\psi_B) \equiv b_R = \sum_{\gamma:\ \operatorname{supp}\gamma = R} a_\gamma$$

$$b_R = 0, \quad \text{если} \quad \{\gamma: \operatorname{supp}\gamma = R\} \quad \text{пусто},$$

$$b_\varnothing = a_\varnothing = \langle\psi_B\rangle_0,$$

пересуммируем наш ряд

(4.12) $$\langle\psi_B\rangle_V = \sum_R^{(V)} b_R.$$

Этот ряд дает искомое кластерное разложение. В частности, для $V = \mathbb{Z}^\nu$ мы получаем моменты

$$\langle\psi_B\rangle = \sum_R b_R,$$

которые определяют предельное вероятностное распределение μ на Ω, называемое предельной перестройкой Гиббса меры μ_0.

Для доказательства регулярности кластерного разложения заметим, что для любого множества R

(4.13) $$\sum_{R' \subseteq R} b_{R'}(\psi_B) = \langle\psi_B\rangle_R = Z_R^{-1}\langle\psi_B \exp(-\lambda U_R)\rangle_0,$$

поэтому, если $R_1 \cup B_1$ не пересекается с $R_2 \cup B_2$, то

$$\langle \psi_{B_1}\psi_{B_2}\rangle_{R_1\cup R_2} - \langle \psi_{B_1}\rangle_{R_1} \langle \psi_{B_2}\rangle_{R_2} =$$
$$= \sum_{R' \subset R_1\cup R_2} b_{R'}(\psi_{B_1}\psi_{B_2}) - \sum_{R'_1 \subseteq R_1} b_{R'_1}(\psi_{B_1}) \sum_{R'_2 \subseteq R_2} b_{R'_2}(\psi_{B_2}).$$

Правая часть последней формулы представляется в виде суммы a_γ для γ таких, что в наборе $\Gamma_1(\gamma) \cup \ldots \cup \Gamma_q(\gamma)$ есть $A \in \mathfrak{A}$ такое, что $A \cap (B_1 \cup R_1) \neq \emptyset$, $A \cap (B_2 \cup R_2) \neq \emptyset$. Обозначим

$$\tilde{b}_R(\psi_{B_1}\psi_{B_2}) = \sum_{\operatorname{supp}\gamma = R} a_\gamma,$$

сумма берется по γ, удовлетворяющим этому условию. Отсюда индукцией по R получается (2.3). Оценка (2.4) следует из (4.9) аналогично доказательству сходимости ряда.

§ 1.5. Возмущение гауссова поля

Пусть σ_t — трансляционно-инвариантное гауссово случайное поле на $\mathbb{Z}^\nu$, определенное средним и ковариацией, равными

$$\langle \sigma_t\rangle_0 = 0, \qquad \langle \sigma_t \sigma_{t'}\rangle_0 = \varphi(t - t').$$

Соответствующая вероятностная мера на пространстве конфигураций $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^\nu}$ обозначается μ_0, $\langle\cdot\rangle_0$ — среднее по этой мере.

Пусть $u(x)$ — вещественная функция на R, ограниченная снизу на R, причем $\langle u^2(\sigma_t)\rangle_0 < \infty$.

Рассмотрим новую меру μ_V на Ω с плотностью

$$\frac{d\mu_V}{d\mu_0} = Z_V^{-1} \exp\Big(-\sum_{t\in V} \varepsilon u(\sigma_t)\Big), \qquad \varepsilon > 0,$$

относительно μ_0, где V — конечное подмножество $\mathbb{Z}^\nu$. Обозначим $\langle\cdot\rangle_V$ среднее по μ_V.

Теорема 5.1. *Если*

$$d = \sum_{t:\ 0 \neq t \in \mathbb{Z}^\nu} |\varphi(t)| < 1, \qquad \varphi(0) = 1, \tag{5.1}$$

то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ для μ_V существует кластерное разложение.

Соответствующую предельную меру обозначим через μ. Определим это кластерное разложение.

Положим

$$f(x) = \exp(-\varepsilon u(x)), \qquad f_T = \prod_{t\in T} f(\sigma_t).$$

Тогда

$$Z_V = \Big\langle \prod_{t\in V} f(\sigma_t)\Big\rangle_0 = \langle f_V\rangle_0$$

и

$$Z_V \langle F_A\rangle_V = \langle F_A f_V\rangle_0. \tag{5.2}$$

Правая часть (5.2) есть момент $N+1$ случайной величины F_A, $f(\sigma_{t_1}), \ldots$ $\ldots, f(\sigma_{t_N})$, где $V = \{t_1, \ldots, t_N\}$; поэтому можно разложить этот момент по семиинвариантам, используя формулу (1.6)

$$\langle F_A f_V\rangle_0 = \sum_{T_1;\, T_2 \ldots T_p} \langle F_A,\ f_{T_1}\rangle_0 \langle f_{T_2}\rangle_0 \ldots \langle f_{T_p}\rangle_0 = \sum_{T_1 \subset V} \langle F_A,\ f_{T_1}\rangle_0 Z_{V-T_1}, \tag{5.3}$$

где во втором равенстве мы пересуммируем по $T_2, \ldots, T_p$, снова используя (1.6). Это дает искомое разложение в объеме V

$$(5.4) \qquad \langle F_A\rangle_V = \sum_{T_1\subset V} \langle F_A,\ f_{T_1}^{*}\rangle_0\, g_{T_1}^{(V)},$$
$$g_T^{(V)} = Z_{V-T}/Z_V.$$

Для $g_T^{(V)}$ получим систему уравнений. Для этого так же как в § 1.4 фиксируем для каждого непустого $A\subset \mathbb{Z}^\nu$ точку $t_A\in A$ и разложим $Z_{V-(A-\{t_A\})}$ по семиинвариантам. После пересуммирования аналогичного (5.3) получим

$$(5.5) \qquad Z_{V-(A-\{t_A\})} = \sum_T \langle f_T^{*}\rangle_0\, Z_{V-(A\cup T)},$$

где суммирование по всем T таким, что

$$t_A\in T\subset V-(A-\{t_A\}).$$

Обозначим

$$k_T = \langle f_T^{*}\rangle_0.$$

Тогда $k_{\{t_A\}} = k_0$ не зависит от t_A и из (5.5) следует, что

$$g_{A-\{t_A\}}^{(V)} = k_0 g_A^{(V)} + \sum_T{}' k_T g_{A\cup T}^{(V)},$$

где в $\sum'$ суммирование по всем T таким, что

$$t_A\in T\subset V-(A-\{t_A\}) \quad \text{и} \quad |T|>1.$$

Иначе говоря, мы пришли к следующей системе уравнений:

$$(5.6) \qquad \begin{cases} g_A^{(V)} - k_0^{-1} g_{A-\{t_A\}}^{(V)} + k_0^{-1}\sum\limits_T{}' k_T g_{A\cup T}^{(V)} = 0, & |A|>1,\\ g_A^{(V)} + k_0^{-1}\sum\limits_T{}' k_T g_{A\cup T}^{(V)} = k_0^{-1}, & |A|=1. \end{cases}$$

Здесь мы не будем доказывать регулярность кластерного разложения, поэтому мы используем другой метод для его получения.

Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство функций $\psi=(\psi_A)$ на множестве всех непустых конечных подмножеств $A\subset\mathbb{Z}^\nu$. Норма в $\mathscr{B}$ определяется так:

$$\|\psi\| = \sup_A\left[\left(\frac{k_0}{2}\right)^{|A|} |\psi_A|\right].$$

Рассмотрим линейный оператор $L=E-R+K$ в $\mathscr{B}$, где E — единичный оператор, $R\psi=\psi'$, $\psi'=(\psi'_A)$ и

$$\psi'_A = \begin{cases} k_0^{-1}\psi_{A-\{t_A\}}, & |A|\geqslant 2,\\ 0, & |A|=1.\end{cases}$$

Легко видеть, что $\|R\|\leqslant 1/2$.

Оператор K переводит вектор (ψ_A) в (ψ''_A), где

$$\psi''_A = k_0^{-1}\sum_{\substack{T:\ |T|>1,\\ T\cap A=t_A}} k_T\psi_{A\cup T}.$$

Заметим, что k_0 равномерно по $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_0$ отделено от нуля, так как $u(x)$ ограничена в некоторой окрестности нуля. Имеем

$$(5.7) \qquad \|K\|\leqslant k_0^{-1}\sum_{\substack{T:\ 0\in T\subset\mathbb{Z}^\nu,\\ |T|>1}}\left(\frac{2}{k_0}\right)^{|T|-1}|k_T|.$$

Лемма 5.1. *Если выполнены условия теоремы 5.1, то для каждого $\delta > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\| K \| < \delta$ при $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$.*

Эту лемму мы докажем ниже.

Отсюда следует, что $L = E - R + K$ обратим в $\mathscr{B}$. Пусть $\mathscr{B}_V \subset \mathscr{B}$ — подпространство векторов $\psi = (\psi_A)$, у которых $\psi_A = 0$, если A не содержится в V. Пусть P_V — стандартная проекция $\mathscr{B}$ на $\mathscr{B}_V$. В условиях леммы 5.1

$$(5.8) \qquad \| P_V K P_V \| \leqslant \delta, \qquad \delta \leqslant 1/4,$$

для всех V и, следовательно, $P_V\, L\, P_V$ обратим в $\mathscr{B}_V$ и равномерно по V для $| \varepsilon | < \varepsilon_0$

$$\| (P_V\, L\, P_V)^{-1} \| \leqslant 4.$$

Обозначим $\chi = (\chi_A)$, $\chi_A = k_0^{-1} \delta_{|A|,1}$. Пусть $g = (g_A)$ и $g^{(V)} = (g_A^{(V)})$ — единственные решения уравнений

$$(5.9) \qquad Lg = \chi, \qquad P_V\, L\, P_V g^{(V)} = P_V \chi.$$

Лемма 5.2. *$g_A^{(V)}$ стремится к g_A при $V \uparrow \mathbb{Z}^\nu$, причем $g_A^{(V)}$ и g_A ограничены $2\left(\frac{K_0}{2}\right)^{-|A|}$.*

Последнее утверждение следует из (5.8) и (5.9). Сходимость предоставляется доказать читателю, например, как это сделано в предыдущем параграфе. Существование кластерного разложения следует теперь из леммы 5.2 и следующей леммы.

Лемма 5.3.

$$\sum_{\substack{T:\, |T| = n, \\ T \subset \mathbb{Z}^\nu}} | \langle F_A,\ f_T' \rangle_0 | \leqslant C (F_A) (C\varepsilon)^n,$$

где C не зависит от F_A.

Оценки семиинвариантов. Положим

$$\hat{f}(x) = f(x) - 1 = \int_0^\varepsilon (-u(x))\, e^{-\varepsilon' u(x)}\, d\varepsilon'$$

и заметим, что

$$(5.10) \qquad \langle f(\sigma_{t_1}),\ \ldots,\ f(\sigma_{t_n}) \rangle_0 \equiv \langle \hat{f}(\sigma_{t_1}),\ \ldots,\ \hat{f}(\sigma_{t_n}) \rangle_0.$$

Мы будем оценивать эти семиинварианты при условиях теоремы 5.1.

Положим далее $t_1 = 0$ и всегда будем считать, что $t_1, t_2, \ldots, t_n$ попарно различны. $\sum^{(n)}$ будет обозначать сумму по всем лексикографически упорядоченным последовательностям $(t_2, \ldots, t_n)$, компоненты которых отличны от 0 и попарно различны, т. е. по всем подмножествам

$$T = \{t_2, \ldots, t_n\} \not\ni 0.$$

Мы докажем следующую лемму.

Лемма 5.4.

$$(5.11) \qquad \sum\nolimits^{(n)} | \langle f(\sigma_0),\ f(\sigma_{t_2}),\ \ldots,\ f(\sigma_{t_n}) \rangle_0 | \leqslant (C\varepsilon)^n.$$

Отсюда будет следовать лемма 5.1. Лемма 5.3 доказывается аналогично.

Доказательство. Пусть $h_n(\sigma_t)$ — нормированный полином Эрмита относительно μ_0, т. е.

$$\langle h_n^2 (\sigma_t) \rangle_0 = 1 \quad \text{и} \quad :\sigma_t^n: = \sqrt{n!}\, h_n (\sigma_t)$$

— соответствующий полином Вика (напомним, что мы считаем $\langle \sigma_t^2 \rangle = 1$).

Разложим $\hat{f}(\sigma_t)$ по полиномам Эрмита в $L_2(d\mu_0)$

$$\hat{f}(\sigma_t)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m h_m(\sigma_t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{\sqrt{m!}}\ :\sigma_t^m:. \tag{5.12}$$

Тогда

$$\sum_{m=0}^{\infty}(a_m)^2=\int|\hat{f}|^2\,d\mu_0\leqslant(C\varepsilon)^2, \tag{5.13}$$

и поэтому $|a_m|\leqslant C\varepsilon$. Подставив (5.12) в семиинвариант, получим

$$\langle\hat{f}(\sigma_0),\ \ldots,\ \hat{f}(\sigma_{t_n})\rangle_0= \tag{5.14}$$

$$=\sum_{m_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{m_n=1}^{\infty}\frac{a_{m_1}\ldots a_{m_n}}{\sqrt{m_1!\ldots m_n!}}\langle:\sigma_0^{m_1}:,\ \ldots,\ :\sigma_{t_n}^{m_n}:\rangle_0,$$

если последний ряд абсолютно сходится.

Зафиксируем значения $(m_1,\ \ldots,\ m_n)$ и рассмотрим

$$\sum_{(t_2,\ \ldots,\ t_n)}\langle:\sigma_0^{m_1}:,\ :\sigma_{t_2}^{m_2}:,\ \ldots,\ :\sigma_{t_n}^{m_n}:\rangle_0,$$

где сумма берется по всевозможным $(t_2,\ \ldots,\ t_n)$,

$$t_i\in\mathbb{Z}^\nu,\qquad t_i\neq 0,\qquad t_i\neq t_j\ \text{ при }\ i\neq j.$$

Согласно предложению 1.1

$$\sum_{(t_2,\ \ldots,\ t_n)}\langle:\sigma_0^{m_1}:,\ \ldots,\ :\sigma_{t_n}^{m_n}:\rangle_0=\sum_G I_G, \tag{5.15}$$

где суммирование в правой части по всевозможным связным вакуумным диаграммам G без петель, состоящим из следующих объектов:

1) упорядоченного множества вершин $\{1,\ \ldots,\ n\}$;

2) взаимно однозначного отображения τ: $\{1,\ \ldots,\ n\}\to\mathbb{Z}^\nu$ такого, что $\tau(1)=0$;

3) каждой вершине i соответствуют m_i упорядоченных отростков $(i,\ 1)$, $(i,\ 2),\ \ldots,\ (i,\ m_i)$;

4) отростку $(i,\ j)$ сопоставлена случайная величина $\sigma_{ij}=\sigma_{t_i}$, где $t_i=\tau(i)$.

Пусть $\mathfrak{A}_N$ есть множество всевозможных наборов $\alpha=(x_1,\ \ldots,\ x_{N/2})$ таких, что $0\neq x_i\in\mathbb{Z}^\nu$, $N=m_1+\ldots+m_n$.

Зафиксируем подстановку $\pi=\begin{pmatrix}2 & \ldots & n\\ \pi(2) & \ldots & \pi(n)\end{pmatrix}$ и положим $\hat{m}_1=m_1$, $\hat{m}_i=m_{\pi(i)}$, $i\geqslant 2$. Для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}_N$ и каждого π мы построим класс $G_\pi(\alpha)$ связных диаграмм, отвечающих фиксированным $(m_1,\ \ldots,\ m_n)$. Класс $G_\pi(\alpha)$ может быть пуст; в противном случае он содержит не более $\prod_{i=1}^{n} m_i(m_i-2)(m_i-4)\ldots$ диаграмм. Кроме того, вклад каждой диаграммы $G\in G_\pi(\alpha)$ равен $\prod_{i=1}^{N/2}\varphi(x_i)$. Мы опишем алгоритм построения $G_\pi(\alpha)$. Этот алгоритм строит вершины и соединяет отростки шаг за шагом.

1-й шаг. Мы начинаем с вершины $t_1=\hat{t}_1\equiv 0$ и соединяем отросток (1,1) с любым из $\hat{m}_2$ отростков вершины $\hat{t}_2=x_1$. 1-й шаг закончен, далее построение идет по индукции.

Пусть после k шагов построены вершины $\hat{t}_1,\ \hat{t}_2,\ \ldots,\ \hat{t}_l$, $l\leqslant k$, соответственно с $\hat{m}_1,\ \ldots,\ \hat{m}_l$ отростками. Пусть $r_1,\ \ldots,\ r_l$ отростков среди, соответственно, $\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_l$, еще не связаны. На каждом шаге строится одно ребро и 0 или 1 новая вершина.

$(k+1)$-ый шаг. Рассмотрим вершину $\hat{t}_i$, $1 \leqslant i \leqslant l$, такую, что $\hat{t}_i = x_1 + \ldots + x_k$. Такая вершина существует согласно индуктивному построению.

Возможны два случая: $r_i > 0$ или $r_i = 0$.

1) Если $r_i > 0$, рассмотрим точку $\hat{t}_i + x_{k+1}$. Если $\hat{t}_i + x_{k+1}$ не совпадает ни с одной из $\hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_l$, то мы строим новую вершину $\hat{t}_{l+1} = \hat{t}_i + x_{k+1}$ и соединяем первый из r_i несвязанных отростков вершины $\hat{t}_i$ с произвольным из $\hat{m}_{l+1}$ отростков вершины $\hat{t}_{l+1}$.

Если $\hat{t}_i + x_{k+1}$ совпадают с некоторой $\hat{t}_j$, $j \leqslant l$, мы соединяем первый из r_i несвязанных отростков $\hat{t}_i$ с произвольным из r_j несвязанных отростков $\hat{t}_j$. В случае $r_j = 0$ считаем класс $G_\pi(\alpha)$ пустым. В противном случае переходим к следующему шагу.

2) Если $r_i = 0$, мы выбираем первую из $\hat{t}_j$, $1 \leqslant j \leqslant l$, такую, что $r_j \neq 0$, и соединяем первый из несвязанных принадлежащих ей отростков с произвольным несвязанным отростком вершины $\hat{t}_p = \hat{t}_j + x_{k+1}$ (аналогично случаю 1). Если все r_j, $1 \leqslant j \leqslant l$, равны 0, $G_\pi(\alpha)$ по определению пуст.

Мы получаем комбинаторный множитель

$$\hat{m}_i (\hat{m}_i - 2)(\hat{m}_i - 4) \ldots$$

для вершины с $\hat{m}_i$ отростками, поскольку после произвольного выбора отростка мы выбирали первый из оставшихся отростков.

Очевидно, что всякая диаграмма G содержится по крайней мере в одном из $G_\pi(\alpha)$.

Итак, при фиксированных $(m_1, \ldots, m_n)$

$$(5.16) \qquad \sum_G |I_G| \leqslant (n-1)! \Big(\sum_{x \neq 0} |\varphi(x)| \Big)^{N/2} \prod_{i=1}^{n} m_i (m_i - 2)(m_i - 4) \ldots$$

Из (5.14) и (5.15) следует, что

$$\sum{}^{(n)} |\langle f(\sigma_0), \ldots, f(\sigma_{t_n}) \rangle_0| =$$
$$= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{(t_2, \ldots, t_n)} |\langle f(\sigma_0), \ldots, f(\sigma_{t_n}) \rangle_0| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{m_n=1}^{\infty} \frac{|a_{m_1}| \ldots |a_{m_n}|}{\sqrt{m_1! \ldots m_n!}\,(n-1)!} \sum_G |I_G| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{m_n=1}^{\infty} |a_{m_1}| \ldots |a_{m_n}| \, 2m_1 \ldots 2m_n \, d^{\frac{m_1 + \ldots + m_n}{2}} \leqslant (\mathrm{const}\,\varepsilon)^n$$

для достаточно малых ε с константой, зависящей от $(1 - d)^{-1}$.

§ 1.6. Низкотемпературные разложения

Мы дадим здесь два примера низкотемпературных кластерных разложений.

Модель Изинга в области фазовых переходов 1 рода. Мы рассмотрим здесь модель Изинга с взаимодействием

$$(6.1) \qquad U = -\beta \sum_{|t-t'|=1} \sigma_t \sigma_{t'}, \qquad \sigma_t = \pm 1,$$

для достаточно больших $\beta > 0$. Мы предположим здесь известными определение контуров для этой модели (см. [4]). Полезно знакомство с ее простейшими свойствами.

Рассмотрим эту систему в объеме V с $(+)$-граничными условиями или $(+)$-чистую фазу в бесконечном объеме, которая получается предельным переходом из $(+)$-граничных условий. Мы будем рассматривать неупорядоченные наборы контуров $\theta = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$, некоторые из которых могут совпадать. Назовем θ допустимым, если любые два из его контуров непересекаются (и, следовательно, различны).

Пусть $\theta = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$ допустим. Обозначим $\rho(\theta)$ вероятность того, что $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ присутствуют в конфигурации.

Корреляционные уравнения Минлоса — Синая [4] имеют вид

$$(6.2)\qquad \begin{cases} \rho(\theta) = e^{-\beta|\Gamma(\theta)|} \sum\limits_{\overline{\theta}} (-1)^{|\overline{\theta}|} \rho(\theta^0 \cup \overline{\theta}), \\ \rho(\varnothing) = 1. \end{cases}$$

Они легко выводятся методом включения исключения. Здесь мы фиксировали для каждого допустимого θ некоторый контур $\Gamma = \Gamma(\theta) \in \theta$ такой, что $|\Gamma(\theta)|$ (длина Γ) не меньше длины любого другого контура $\Gamma' \in \theta$. Суммирование в $\sum\limits_{\overline{\theta}}$ ведется по всем допустимым $\overline{\theta}$ (включая пустой) таким, что:

1) каждый $\overline{\Gamma} \in \overline{\theta}$ пересекается с $\Gamma(\theta)$;

2) набор $\theta^0 \cup \overline{\theta}$ допустим, где $\theta^0 = \theta - \Gamma(\theta)$.

Будем искать явное решение (6.2) в виде ряда. Для этого рассмотрим всевозможные последовательности

$$\gamma = (\theta_1, \ldots, \theta_n) = (\theta_1(\gamma), \ldots, \theta_n(\gamma))$$

допустимых наборов контуров, удовлетворяющих требованиям:

$$(6.3)\qquad \begin{cases} \theta_n = \varnothing, \quad \theta_i \neq \varnothing \quad (i = 1, \ldots, n-1), \\ \theta_j(\gamma) \supseteq \theta^0_{j-1}(\gamma) \qquad (j = 2, \ldots, n), \end{cases}$$

причем любой $\Gamma \in \theta_j - \theta^0_{j-1}$ пересекается с $\Gamma(\theta_{j-1}(\gamma))$. Положим

$$(6.4)\qquad \begin{cases} a_\gamma = \varepsilon_\gamma \exp\left[-\beta \sum\limits_{j=1}^{n-1} |\Gamma(\theta_j)|\right], \\ \varepsilon_\gamma = (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n-1} |\theta_{j+1} - \theta^0_j|}. \end{cases}$$

Лемма 6.1.

$$(6.5)\qquad \rho(\theta) = \sum_\gamma a_\gamma,$$

где суммирование ведется по всем γ таким, что $\theta_1(\gamma) = \theta$, при этом ряд в правой части абсолютно сходится.

Формула (6.5) нетрудно получается формальной итерацией системы (6.2). Докажем абсолютную сходимость. Каждому γ соответствует последовательность пар чисел

$$r(\gamma) = [(r^1_1, r^1_2), \ldots, (r^n_1, r^n_2)],$$

где $r^1_j = |\Gamma(\theta_j)|$, а r^2_j равно сумме длин всех $\Gamma \in \theta_{j+1} - \theta^0_j$. Число γ таких, что $r(\gamma) = r$ для данной последовательности r, не превосходит C^r, где

$$r \,| = \sum_{j=1}^{n-1} (r^j_1 + r^j_2).$$

Отсюда и из (6.4) следует, что

$$\sum_{\gamma} |a_\gamma| \leqslant \sum_{r} (Ce^{-\beta})^{|r|}. \tag{6.6}$$

Действительно, набор $\{\Gamma(\theta_j)\colon j=1, \ldots, n-1\}$ с точностью до перестановки совпадает с набором

$$\theta_1 \cup (\theta_2 - \theta_1^0) \cup \ldots \cup (\theta_{n-1} - \theta_{n-2}^0).$$

Ряд (6.6) очевидно сходится. Лемма доказана.

Положим

$$\widetilde{\theta} = \bigcup_{\Gamma \in \theta} \Gamma,$$

и для каждого $R \subset \widetilde{\mathbb{Z}}^\nu$ (множество ребер двойственной решетки) положим

$$b_R = \sum\nolimits^R a_\gamma, \tag{6.7}$$

где в $\sum^R$ суммирование по всем γ таким, что

$$\bigcup_{\theta \in \gamma} \widetilde{\theta} = R, \tag{6.8}$$

и положим $b_R = 0$, если не существует γ, удовлетворяющих (6.8). Заметим, что

$$|b_R| \leqslant (Ce^{-\beta})^{|R|}, \tag{6.9}$$

где $|R|$ — число единичных ребер в R (т. е. длина R) и

$$b_{\widetilde{\theta}} = (e^{-\beta})^{|\widetilde{\theta}|}. \tag{6.10}$$

Пусть ψ_θ случайная величина, равная 1, если все $\Gamma \in \theta$ присутствуют в конфигурации и 0 в остальных случаях.

Мы доказали, таким образом, теорему.

Теорема 6.1. *Для всех ψ_θ существует кластерное разложение*

$$\langle \psi_\theta \rangle = \sum b_R,$$

причем выполнены оценки (6.9) *и* (6.10).

Здесь вместо $\mathbb{Z}^\nu$ мы рассматриваем $\widetilde{\mathbb{Z}}^\nu$, а в качестве $\mathfrak{A}$ мы рассматриваем множество ребер единичной длины. Более того, так же, как в § 1.4, можно убедиться, что это кластерное разложение является экспоненциально регулярным; поэтому из основной теоремы главы II получаем

Следствие 6.1.

$$|\langle \psi_{\theta_1}, \ldots, \psi_{\theta_n} \rangle| \leqslant (Ce^{-\beta})^{\delta(\theta_1, \ldots, \theta_n)} \prod_{i=1}^{n} u_i C^{d_{\widetilde{\theta}_i}}, \tag{6.11}$$

где $\delta(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ — минимальное $|R|$ такое, что существует R с $\widetilde{R} \supset \bigcup \widetilde{\theta}_i$ и набор $(R, \widetilde{\theta}_1, \ldots, \widetilde{\theta}_n)$ связен. Мы рассматриваем R, как набор элементов из $\mathfrak{A}$, а $\widetilde{\theta}_i$ как подмножества $\widetilde{\mathbb{Z}}^\nu$. Применение этого утверждения к анализу трансфер-матрицы в этом случае будет дано в другом месте.

Случай непрерывной симметрии. Рассмотрим гауссово поле $\sigma(t)$ на $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu = 3$, задаваемое гауссовой мерой μ_a с

$$\langle \sigma(t) \rangle_a = a, \qquad \langle \sigma(t), \sigma(t') \rangle_a = \varphi(t - t'),$$

где преобразование Фурье функции $\varphi(t)$ равно

$$\widetilde{\varphi}(\vec{k}) = \left(\nu - \sum_{i=1}^{\nu} \cos k^i\right)^{-1}, \qquad \vec{k} = (k^1, \ldots, k^\nu),$$

и a — любое вещественное число.

Рассмотрим также поле $\sigma^{(m)}(t) = \sigma(mt)$, где m — положительное целое число. Соответствующую гауссову меру обозначим $\mu_{m,a}$. Для нее

$$(6.12)\qquad \begin{cases} \langle\sigma^{(m)}(t)\rangle_{m,a} = a, \\ \langle\sigma^{(m)}(t),\ \sigma^{(m)}(t')\rangle_{m,a} = \varphi^{(m)}(t-t') = \varphi(mt-mt'). \end{cases}$$

Преобразование Фурье $\widetilde{\varphi}^{(m)}(k)$ функции $\varphi^{(m)}(t)$ легко вычисляется, при этом функции

$$g^{(m)}(\vec{k}) = [\widetilde{\varphi}^{(m)}(\vec{k})]^{-1} \text{ и } g(\vec{k}) = [\widetilde{\varphi}(\vec{k})]^{-1}$$

обладают свойством

$$(6.13)\qquad g(0) = g^{(m)}(0) = 0.$$

Рассмотрим теперь функции $\Phi(t)$ и $\Phi^{(m)}(t)$, являющиеся преобразованиями Фурье $g(k)$ и $g^{(m)}(k)$ соответственно. Из результатов Добрушина [7] следует (с помощью (6.13)), что множество крайних точек всех стационарных гиббсовских полей с взаимодействием

$$U^{(m)} = \frac{1}{2}\sum_{t,\,t'} \Phi^{(m)}(t-t')\,\sigma^{(m)}(t)\,\sigma^{(m)}(t')$$

исчерпывается гауссовыми полями (6.12) для всевозможных a.

Рассмотрим теперь потенциал

$$(6.14)\qquad U^{(m)} + \varepsilon\sum_t u(\hat{\sigma}_t),$$

где u удовлетворяет условиям § 1.5, $\hat{\sigma}_t = T_t\hat{\sigma}_0$, где T_t — сдвиг случайных величин на вектор $t \in \mathbb{Z}^\nu$, а $\hat{\sigma}_0$ представляется следующей линейной комбинацией:

$$(6.15)\qquad \hat{\sigma}_0 = (\sigma^{(m)}(0) - \sigma^{(m)}(e_1)) - (\sigma^{(m)}(e_2) - \sigma^{(m)}(e_2+e_1)),$$

где e_1, e_2, e_3 — координатные векторы единичной длины.

Рассмотрим новую меру

$$\frac{d\mu_V}{d\mu_{m,0}} = \hat{Z}_V^{-1}\exp\Big(-\varepsilon\sum_{t\in V} u(\hat{\sigma}_t)\Big).$$

Используя результаты предыдущего параграфа, можно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 6.2. *Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ и достаточно больших m пределы*

$$\lim_V \langle F_A\rangle_{\mu_V} \stackrel{\text{def}}{=} \langle F_A\rangle_{(0)}$$

существуют и имеют кластерное разложение. Все экстремальные стационарные гиббсовские поля для взаимодействия (6.14) *даются формулой* (a — *вещественное число*)

$$\langle F_A\rangle_{(a)} = \langle F_A(\sigma^{(m)}(t) + a)\rangle_{(0)}.$$

Эта теорема позволяет исследовать фазовые переходы в низкотемпературном случае (большие β), например, для взаимодействия

$$\beta\,[U^{(m)} + \sum (\hat{\sigma}_t)^4].$$

Действительно, заменой

$$\sigma(t) \to \frac{\sigma(t)}{\sqrt{\beta}}$$

дело сводится к предыдущей теореме с $\varepsilon = \beta^{-1}$.

§ 1.7. Другие разложения и задачи

1. Вакуумные кластерные разложения. 1°. Контурные модели Минлоса — Синая. В фундаментальной работе [4] была построена техника контурных разложений не только в модели Изинга, о которой речь шла в § 1.6, но и для более общих случаев низкотемпературных систем с дискретным спином в случае спонтанного нарушения симметрии. (См. также [16].)

2°. Случай отсутствия симметрии. Пирогов и Синай [14], [94] в серии работ применили технику [4] для нахождения точки фазовых переходов в случае отсутствия симметрии в низкотемпературных системах с дискретным спином. Ими, по существу, построено кластерное разложение для этих случаев. Случай отсутствия фазового перехода в этой ситуации по существу с помощью кластерных разложений исследовался в [93].

3°. Контурные модели с непрерывным временем. Такие модели введены в [21] и там же для них построена контурная техника в низкотемпературном случае, позволяющая методом [4] получить кластерное разложение. Кластерные разложения для таких моделей, конечно, возможны и в высокотемпературном случае. Эти модели тесно связаны с исследованием основных состояний квантовых спиновых систем. Различные расширения класса таких систем сделаны в [15].

4°. Квантовые спиновые системы. Высокотемпературные разложения для квантовых спиновых систем получены в [95], см. также [32]. Контурная техника построена Жинибром и Робинсоном. Существенные усиления и обобщения сделаны в [15] с использованием контурной техники из [21].

5°. Системы с нефинитным потенциалом. Одномерные решетчатые (и непрерывные) системы рассматривались в [10], [23]. Эта же техника была использована в [16]. Решетчатый газ в высокотемпературном случае рассматривался еще в [3].

6°. Фермионные модели. Фермионные модели на языке грассмановых переменных были введены в [79]. Кластерное разложение в высокотемпературном случае для калиброванных моделей с фермионами было получено в [96]. Для фермионных моделей типа Юкавы на решетке любой размерности могут быть получены кластерные разложения с помощью сведéния к настоящему случайному полю (формула Мэттьюза — Салама), что ранее было сделано для двумерной модели Юкавы в квантовой теории поля [72], [73].

Некоторые другие результаты для фермионных систем, связанные с кластерным разложением см. в [8], [74], [83]—[85].

7°. $P(\varphi)$-модели. Основой для исследования $\lambda{:}P(\varphi){:}_2$ моделей в теории поля является разложение Глимма — Джаффе — Спенсера [11]. Некоторые необходимые технические леммы см. в [57]. На решетке любой размерности кластерное разложение для этих моделей есть, конечно, частный случай результатов § 5. В квантовой теории поля сверхперенормируемые модели были построены в конечном объеме с помощью совсем другого кластерного разложения, принадлежащего Глимму — Джаффе [65], которого мы здесь совсем не касаемся. Исследования по модели ${:}\varphi^4{:}_3$, продолжающие [65], см. в [59]—[71]. Некоторое упрощение самого разложения достигнуто в [86]. Анализ трудностей этого разложения на примере иерархических моделей проведен Галлавотти с сотрудниками [88].

8°. Другие подходы в высокотемпературном случае. «Алгебраический» подход из монографии Рюэлля [3] обобщался на другие системы в [19], [51]. Ранний подход Добрушина [7] к доказательству единственности гиббсовского поля был применен к доказательству аналитичности, т. е. по существу к получению кластерного разложения, в [26]. «Полимерный» подход см. в [87].

Для случая систем с дискретным спином интересные двойственные разложения в высокотемпературной и низкотемпературной области выписывались в работах Грубера, Мерлини (см. библиографию в [25]). Замечание о приближенной двойственности см. в [20].

Помимо этих подходов существуют разные формальные ряды теории возмущений в многочисленных физических работах.

9°. Аналитическое продолжение. В области действия теоремы Янга—Ли с помощью аналитического продолжения возможно получение оценки семиинвариантов, т. е., по существу, кластерных разложений [12].

10°. Квазисостояния. Так можно назвать линейный функционал на алгебре локальных наблюдаемых (являющийся состоянием на каждой финитной алгебре) и не продолжаемый до состояния на всей квазилокальной алгебре. Существуют, конечно, независимые квазисостояния, аналогичные полям с независимыми значениями. Интересно применить кластерные разложения для возмущения таких квазисостояний.

11°. Системы с непрерывным спином при низких температурах. Первое такое разложение для $:P(\varphi):_2$ моделей теории поля (с двумя основными состояниями) в низкотемпературной области получено Глиммом, Джаффе, Спенсером [77]. Попытка упрощения и усиления этого разложения предпринята в [98], [103], где успех пока достигнут только для случая одного основного состояния.

Случай счетного числа основных состояний (взаимодействие типа sine-Gordon) рассмотрен Бриджесом [76]. Этот случай очень важен, так как он связан преобразованием двойственности с кулоновской плазмой. Результаты для систем с непрерывной симметрией см. в § 1.6.

12°. Некоторые применения вакуумных кластерных разложений. О применениях к анализу спектра трансфер-матрицы мы скажем ниже. По существу, все результаты для рассмотренных моделей в соответствующих областях изменения параметров получены с помощью кластерных разложений. Многочисленные результаты о центральной и локальной предельной теоремах (эквивалентность большого и малого канонического ансамбля), о которых мы вообще не упоминаем, анализ эффекта Хиггса [79], доказательства критерия конфайнмента Вильсона [78] — [80] для различных случаев.

Применение кластерного разложения в задачах перечисления графов см. в [90].

2. N-частичные кластерные разложения и спектр гамильтониана в моделях теории поля. Первое такое разложение получено Глиммом, Джаффе, Спенсером [50] для $\lambda P(\varphi)_2$ моделей с малыми λ, при этом $N \to \infty$, если $\lambda \to 0$.

Кластерное разложение для всех N в некоторой области $0 < \lambda < \lambda_0$, λ_0 не зависит от N, получено для многих решетчатых моделей в главе III.

Оценки семиинвариантов с ограничениями на носитель функционалов и более грубые оценки, недостаточные для получения N-частичного разложения, могут быть получены другими методами [12], [13], [51], [89], [18]. Метод [19] действует только в двумерном случае. После появления работы [50] Спенсером были получены кластерные разложения для двухчастичных ядер Бете — Солпитера [42]. Эти разложения применялись для исследования спектра гамильтониана в двухчастичной области [43], [45] — [47], [52], [53]. Определение N-частичных ядер Бете — Солпитера см. в [48], [50]. Нетривиальность S-матрицы доказана в [41], [49].

Техника, развитая в главе II, по-видимому, позволяет получить оценки ядер Бете — Солпитера для любого N.

Анализ спектра в решетчатых моделях основывается, с одной стороны, на кластерном разложении трансфер-матрицы (т. е. на полном кластерном разложении, рассматриваемом в главах II, III) и , с другой стороны, на ряде идей работы [17].

Одночастичные подпространства в моделях с ближайшими соседями были построены в [22], для модели с неближайшими соседями исследовались в [100], для калибровочной модели без фермионов — в [107]. Инвариантные подпространства вплоть до N-частичного порога выделены в [99] и проанализирована структура гамильтониана в них (см. § 3.3 главы III).

Мы выделим следующие задачи для решетчатых моделей, которые кажутся реальными в настоящее время.

1°. Выход в инфракрасную область, т. е. неинтегрируемое убывание корреляций. Первый важнейший сдвиг состоял бы в анализе диполь-дипольного взаимодействия, т. е., на языке § 1.5, случая, когда ряд $\sum \mid \varphi(t) \mid$ расходится, а ряд $\sum \varphi(t)$ сходится. Этот вопрос тесно связан с кластерными разложениями в низкотемпературном случае, если имеется непрерывная симметрия.

2°. Анализ спектра решетчатых моделей — кандидатов на роль модели для единой теории (сильных) взаимодействий и других реальных систем (см. физический обзор в [101]).

3°. Доказательство асимптотической полноты теории рассеяния Хаага — Рюэлля в решетчатых моделях (которая существует по [22]).

4°. Анализ теории рассеяния в случае, если в теории есть солитонные секторы и теория в вакуумном секторе не является асимптотически полной. Это связано с поверхностью раздела фаз и поверхностным натяжением [28], [21].

ГЛАВА II
РАВНОМЕРНЫЕ СИЛЬНЫЕ КЛАСТЕРНЫЕ ОЦЕНКИ

§ 2.1. Оценки семиинвариантов функционалов от независимого виртуального поля

Пусть дано множество V. Пусть для любого непустого конечного $A \subset V$ задано число $f(A)$. Набор чисел $f(A)$ мы будем рассматривать как моменты виртуального поля. По индукции мы определим семиинварианты $g(A)$ этого виртуального поля формулой

$$f(A) = \sum g(B_1) \ldots g(B_k), \tag{1.1}$$

где суммирование по всем разбиениям $B_1 \cup \ldots \cup B_k$ множества A.

Пусть теперь V конечно и $\alpha = (A_1, \ldots, A_k)$,— любое его разбиение. Положим

$$f(\alpha) = \prod_{i=1}^{k} f(A_i), \qquad g(\alpha) = \prod_{i=1}^{k} g(A_i). \tag{1.2}$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — структура всех разбиений множества V (см. дополнение). Соотношение (1.1) можно записать в виде

$$f(\alpha) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} g(\beta). \tag{1.3}$$

Из формулы обращения Мёбиуса следует

$$g(\alpha) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \mu_{\mathfrak{A}}(\beta, \alpha) f(\beta). \tag{1.4}$$

Явное выражение для $\mu_{\mathfrak{A}}(\beta, \alpha)$ доказано в [92]. Так,

$$\mu_{\mathfrak{A}}(\beta, 1) = (-1)^{|\beta|-1}(|\beta| - 1)!,$$

а для произвольного α получается как следствие формулы (7) дополнения.

Пусть теперь дан граф G с множеством вершин V. (Для всех рассматриваемых ниже графов будем предполагать, что между любыми двумя вершинами имеется не более одного ребра.) Обозначим G_A, $A \subset V$ — подграф графа G, натянутый на множество A вершин. Назовем G_B компонентой G_A, если $B \subset A$ и между B и $A - B$ нет ребер.

Виртуальное поле $f(A)$ назовем независимым относительно G, если для всякого $A \subset V$

$$f(A) = f(A_1) \ldots f(A_k) \tag{1.5}$$

для всех разбиений $(A_1, \ldots, A_k)$ множества A таких, что G_{A_i} есть компонента G_A для всех i.

Лемма 1.1. *Если G_A не связен и f — независимое виртуальное поле, то*

$$g(A) = 0. \tag{1.6}$$

Доказательство в точности совпадает с доказательством свойства II семиинвариантов в § 1.1.

Обозначим

$$C_f(A) = \max \left| \prod_{i=1}^{k} f(B_i) \right|, \tag{1.7}$$

где максимум берется по всем разбиениям $(B_1, \ldots, B_k)$ множества A.

Теорема 1.1. *Если G_A связен и виртуальное поле f независимо относительно G, то*

$$|g(A)| \leqslant C_f(A) \cdot \frac{3}{2} \prod_{t \in A} 3v_t, \tag{1.8}$$

где $v_t = v_t^{(A)}$ — число ребер в G_A, инцидентных с вершиной $t \in A$.

Для доказательства этой теоремы заметим, что с помощью леммы 1.1 можно переписать формулу (1.3) в виде

$$f(\alpha) = \sum_{\substack{\beta:\ \beta \leqslant \alpha, \\ \beta \in \mathfrak{A}_G}} g(\beta) \tag{1.9}$$

(определение $\mathfrak{A}_G$ см. в дополнении).

Если рассматривать α в (1.9) только принадлежащие $\mathfrak{A}_G$, то можно использовать формулу обращения Мёбиуса для $\mathfrak{A}_G$ и записать для $\alpha \in \mathfrak{A}_G$

$$g(\alpha) = \sum_{\beta \leqslant \alpha,\ \beta \in \mathfrak{A}_G} \mu_{\mathfrak{A}_G}(\beta, \alpha) f(\beta). \tag{1.10}$$

Лемма 1.2.

$$|\mu_{\mathfrak{A}_G}(0, 1)| \leqslant \prod_{t \in V} v_t. \tag{1.11}$$

Доказательство. Используем следствие А.1 дополнения, обозначая $|V| = n$. Тогда

$$|\mu_{\mathfrak{A}_G}(0, 1)| \leqslant m_1 \leqslant \widetilde{m}_1, \tag{1.12}$$

где $\widetilde{m}_1$ — число подмножеств X множества ребер G таких, что $|X| = n - 1$ и X не содержит ни одного тока.

Для оценки $\widetilde{m}_1$ заметим сначала, что X должно быть связным деревом.

Определим взаимно однозначное отображение φ_X множества X на некоторое $A \subset V$ такое, что $|A| = n - 1$, следующим образом. Рассмотрим произвольное ребро $\gamma_1 \in X$ и выберем в качестве $\varphi_X(\gamma_1)$ любую из двух вершин, инцидентных γ_1. Предположим по индукции, что определили $\varphi_X(\gamma_1), \ldots, \varphi_X(\gamma_m)$ для $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in X$. Пусть V_m есть множество вершин, инцидентных каким-либо из $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Выберем γ_{m+1} таким, что одна из его вершин принадлежит V_m; это возможно сделать в силу связности X. Кроме того, обе вершины γ_{m+1} не могут принадлежать V_m, иначе $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{m+1}\}$ содержало бы цикл, поскольку $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ связно по построению.

Положим $\varphi_X(\gamma_{m+1})$ равным той из двух вершин γ_{m+1}, которая принадлежит V_m, если она не совпадает ни с одной из ранее определенных $\varphi_X(\gamma_1), \ldots, \varphi_X(\gamma_m)$, и другой — в противном случае.

Определим отображение ψ_X множества V в множество всех ребер G, положив $\psi_X(v) = \gamma_i$, если $\varphi_X(\gamma_i) = v$, $v \in V$, а в случае, если не существует такого γ_i, положим $\psi_X(v)$ равным любому γ_i, инцидентному с v. ψ_X различны для различных X; поэтому число всевозможных X не превосходит числа всех отображений множества V во множество ребер, ставящих в соответствие каждому $v \in V$ инцидентное ему ребро. Число таких отображений равно $\prod\limits_{t \in V} v_t$. Лемма доказана.

Теорема очевидным образом следует из (1.10) для $G = G_A$, $\alpha = 1$, если будет доказана

Лемма 1.3.

$$\sum_{\beta \in \mathfrak{A}_G} |\mu_{\mathfrak{A}_G}(\beta, 1)| \leqslant \frac{3}{2} \prod_{t \in V} 3v_t. \tag{1.13}$$

Заметим, что

$$\mu_{\mathfrak{A}_G}(\beta, 1) = \mu_{\mathfrak{A}_{G(\beta)}}(0, 1), \tag{1.14}$$

где $G(\beta)$ получается из G отождествлением вершин, принадлежащих одному блоку разбиения β, т. е. вершинами $G(\beta)$ являются блоки β. Вершины B_i и B_j соединены ребром, если в G существовало ребро между какими-либо $b_1 \in B_1$ и $b_2 \in B_2$.

Итак, согласно свойству 1 дополнения,

$$\mu_{\mathfrak{A}_{G(\beta)}}(0, 1) = \mu_{[\beta, 1]}(\beta, 1) = \mu_{\mathfrak{A}_G}(\beta, 1).$$

Доказательство леммы 1.3. Построим по индукции дерево $\mathfrak{G}$ согласно следующим правилам.

1. Вершины $\mathfrak{G}$ имеют порядок $1, 2, \ldots, n$, и каждая вершина окрашена в красный или голубой цвет.

2. Каждой вершине t соответствует ровно один граф $G(\beta_t)$, $\beta_t \in \mathfrak{A}_G$, и подмножество D_t вершин $G(\beta_t)$.

3. Вершина порядка 1 единственна. Она красная. Соответствующие ей $G(\beta_t) = G$ и $D_t = \varnothing$. Эта вершина является наивысшей вершиной дерева $\mathfrak{G}$.

4. Над каждой вершиной порядка k (k-вершиной) лежит ровно одна $(k-1)$-вершина.

5. Пусть k-вершина t построена, и ей соответствуют $G(\beta_t)$ и D_t.

Пусть $v_t(\xi)$ есть число ребер $G(\beta_t)$, инцидентных с вершиной ξ графа $G(\beta_t)$. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — все вершины $G(\beta_t)$, не лежащие в D_t, и пусть

$$v_t(\xi_1) \leqslant v_t(\xi_2) \leqslant \ldots \leqslant v_t(\xi_m).$$

Под t построим не более $v_t(\xi_1)$ красных $(k+1)$-вершин и не более одной голубой $(k+1)$-вершины.

Голубой вершине соответствует тот же $G(\beta_t)$, что и t, а к D_t добавляется вершина ξ_1 (если $m \neq 0$). В случае $m = 0$ голубая вершина не строится.

Исходя из $G(\beta_t)$, можно построить новый граф $G(\beta_{t'})$ не более $v_t(\xi_1)$ способами, если отождествлять ξ_1 с одной из вершин $G(\beta_t)$, соединенной с ξ_1 ребром и не лежащей в D_t.

Каждый такой $G(\beta_{t'})$ будет соответствовать построенной красной $(k+1)$-вершине. $D_{t'}$ для этой вершины совпадает с D_t для t (это определение корректно, поскольку при построении $G(\beta_{t'})$ мы не отождествляли вершин, принадлежащих D_t).

Предложение 1.1. *Для всякого* $\beta \in \mathfrak{A}_G$ *найдется красная* $t \in \mathfrak{S}$ *такая, что* $\beta = \beta_t$.

Доказательство. Пусть $v_1 \leqslant v_2 \leqslant \ldots \leqslant v_n$ для вершин $1, \ldots, n$ графа G.

1-й случай. $\{1\}$ образует отдельный блок β. В таком случае построим голубую вершину t порядка 2 с $\beta_t = 0$ и соответствующим D_t, имеющим одну вершину.

2-й случай (противоположный первому). При построении красных вершин порядка 2 выберем из них любую такую t, что $G(\beta_t)$ получен из G отождествлением двух вершин, лежащих в одном блоке разбиения β. При этом $\beta_t \leqslant \beta$ и $D_t = \varnothing$.

Таким образом, мы свели задачу к случаю, когда граф имеет на одну вершину меньше. Доказательство завершается индукцией.

Положим для каждого $t \in \mathfrak{S}$

$$\gamma_t = \prod_{\xi \in G(\beta_t)} v_t(\xi).$$

Пусть t есть k-вершина, t' — $(k+1)$-вершина под t. Если t' голубая, то по построению,

$$\gamma_t = \gamma_{t'}. \tag{1.15}$$

Если t' красная, то

$$\gamma_{t'}/\gamma_t \leqslant \frac{v_t(\xi_1)+v_t(\xi_r)-2}{v_t(\xi_1)\,v_t(\xi_r)} \leqslant \frac{2}{v_t(\xi_1)}, \tag{1.16}$$

где ξ_r — вершина, с которой отождествлена ξ_1 при построении $G(\beta_{t'})$.

Из (1.16) получаем

$$\sum \gamma_{t'} \leqslant 2\gamma_t, \tag{1.17}$$

где суммирование берется по всем красным $(k+1)$-вершинам, расположенным под t. Следовательно,

$$\sum_{\substack{\text{красным } t\\ \text{порядка } k+1}} \gamma_t \leqslant 2 \sum_{\substack{\text{красным } t\\ \text{порядка } k}} \gamma_t + 2 \sum_{\substack{\text{голубым } t\\ \text{порядка } k}} \gamma_t \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{\substack{\text{красным } t\\ \text{порядка } k}} \gamma_t + 2 \sum_{\substack{\text{красным } t\\ \text{порядка } k-1}} \gamma_t + 2 \sum_{\substack{\text{голубым } t\\ \text{порядка } k-1}} \gamma_t \leqslant \ldots \leqslant 2 \sum_{\substack{\text{красным } t\\ \text{порядка } \leqslant k}} \gamma_t.$$

Положим

$$a_k = \sum_{\substack{\text{красным } t\\ \text{порядка } k}} \gamma_t.$$

Имеем

$$a_{k+1} \leqslant 2 \sum_{i=1}^{k} a_i,$$

откуда следует, что $a_k \leqslant 3^k a_1$.

Учитывая предложение 1.1, лемму 1.2 и (1.14) имеем

$$\sum_{\beta \in \mathfrak{A}_G} |\mu(\beta, 1)| \leqslant \sum_{\text{красным } t} \gamma_t \leqslant a_1 \sum_{k=1}^{n} 3^k \leqslant \frac{3}{2} \prod_{i=1}^{n} 3v_i.$$

Лемма 1.3 доказана.

§ 2.2. Оценки числа пересечений

Пусть дана совокупность α конечных (не обязательно попарно различных) множеств $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{Z}^\nu$. Определим $v_i = v_i(\alpha)$ — число A_j ($j = 1, \ldots, n$) таких, что $A_i \cap A_j \neq \varnothing$; $u_i = u_i(\alpha)$ — число A_j ($j = 1, \ldots, n$) таких, что $A_i = A_j$.

Теорема 2.1. *Существует константа C, зависящая только от ν и такая, что для всякого X и каждой системы $\alpha = (A_1, \ldots, A_N)$ 1-связных конечных подмножеств $\mathbb{Z}^\nu$*

$$C\sum_{i=1}^{N} |A_i| + \sum_{i=1}^{N} \ln u_i \geqslant \sum_{i=1}^{N} \ln v_i. \tag{2.1}$$

Доказательство. Удобно использовать следующие обозначения. Разобьем α на классы эквивалентности: A_i и A_j эквивалентны, если они совпадают как множества. Совокупность всех классов эквивалентности обозначим $\mathscr{A}$. Обозначим $\mathscr{A}_k$ совокупность всех классов эквивалентности мощности k; $\mathscr{A}^r$ — совокупность всех классов эквивалентности таких, что если A_i принадлежит одному из этих классов, то $|A_i| = r$; $\mathscr{A}_k^r$ — совокупность классов эквивалентности, состоящих из k элементов, каждый из которых имеет мощность r.

Положим

$$\alpha_k = |\mathscr{A}_k|, \qquad \alpha^r = |\mathscr{A}^r|, \qquad \alpha_k^r = |\mathscr{A}_k^r|.$$

Пусть $\alpha_{kr;k'r'}$ есть число пар (χ, χ'), $\chi \in \mathscr{A}_k^r$, $\chi' \in \mathscr{A}_{k'}^{r'}$ таких, что (каждый) представитель класса χ имеет непустое пересечение с (каждым) представителем χ'.

Нам понадобятся следующие очевидные свойства этих чисел:

1. (симметрия) $\quad \alpha_{kr;\,k'r'} = \alpha_{k'r';\,kr}$

2. (нормализация) $\sum\limits_{k} k\alpha_k = \sum\limits_{k,\,r} k\alpha_{kr} = N.$

3. Пусть фиксировано A_i. Тогда число классов в $\mathscr{A}^r$, элементы которых имеют непустое пересечение с A_i, не превосходит

$$|A_i|\, C^r.$$

Это следует из леммы 3.1 главы I.

Теперь мы можем переписать (2.1):

$$C\sum_{k,\,r} rk\alpha_k^r + \sum_{k,\,r} k\alpha_k^r \ln k \geqslant \sum_{i=1}^{N} \ln v_i. \tag{2.2}$$

Из определений следует, что

$$\sum_{i:\,\mathscr{A}_k^r} v_i = k \sum_{k',\,r'} k'\alpha_{kr,\,k'r'}, \tag{2.3}$$

где суммирование в $\sum\limits_{i:\,\mathscr{A}_k^r}$ по всем i таким, что A_i является представителем класса, принадлежащего $\mathscr{A}_k^r$. Следовательно,

$$\sum_{i:\,\mathscr{A}_k^{ri}} \ln v_i \leqslant k\alpha_k^r \ln \frac{k\sum\limits_{k',\,r'} k'\alpha_{kr;\,k'r'}}{k\alpha_{kr}}. \tag{2.4}$$

Здесь мы использовали неравенство

$$\gamma_1 \ldots \gamma_k \leqslant \left(\frac{\gamma}{k}\right)^k \tag{2.5}$$

для всех $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ таких, что $\gamma_1 + \ldots + \gamma_k = \gamma$, $\gamma > 0$.

Согласно (2.4) достаточно доказать, что

$$C\,dN + \sum_{k,r} k\alpha_k^r \ln k\alpha_k^r \geqslant \sum_{k,r} k\alpha_k^r \ln \beta_{kr}, \tag{2.6}$$

где

$$\beta_{kr} = \sum_{k',r'} k'\alpha_{kr;\,k'r'} \quad \text{и} \quad d = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |A_i|$$

есть средняя мощность системы $A_1, \ldots, A_N$.

Из свойства 3 следует, что

$$\sum_k \alpha_{kr;\,k'r'} \leqslant r'C^r\alpha_{k'}^{r'},$$

и поэтому

$$\sum_k \beta_{kr} = \sum_{k',r'} k' \sum_k \alpha_{kr;\,k'r'} \leqslant \sum_{k',r'} k'r'C^r\alpha_{k'}^{r'} = C^r\,dN. \tag{2.7}$$

Обозначим $\delta_{kr} = k\alpha_k^r$ и будем доказывать, что

$$C\,dN + \sum_{k,r} \delta_{kr} \ln \delta_{kr} \geqslant \sum_{k,r} \delta_{kr} \ln \beta_{kr} \tag{2.8}$$

при условии (2.7).

Для фиксированных r и δ_{kr}

$$\sum_k \delta_{kr} \ln \beta_{kr}$$

достигает масимального значения, когда β_{kr} пропорциональны δ_{kr}. Достаточно доказать это утверждение для случая

$$\delta_{k\,r} \ln \beta_{k\,r} + \delta_{k,r} \ln \beta_{k_2r}$$

с фиксированной суммой $\beta = \beta_{k\,r} + \beta_{k\,r}$ и фиксированными δ_{k_ir}. Но это результат простого вычисления.

Из этого утверждения следует, что

$$\sum_k \delta_{kr} \ln \beta_{kr} \leqslant \sum_k \delta_{kr} \ln \delta_{kr} \frac{\sum_k \beta_{kr}}{\sum_k \delta_{kr}} \leqslant \sum_k \delta_{kr} \ln \frac{\delta_{kr} C^r\,dN}{\delta_r}, \tag{2.9}$$

где

$$\delta_r = \sum_k \delta_{kr}.$$

Согласно (2.9) достаточно доказать, что

$$C\,dN + \sum_{k,r} \delta_{kr} \ln \delta_{kr} \geqslant \sum_{k,r} \delta_{kr} \ln \frac{\delta_{kr}\,C^r\,dN}{\delta_r}, \tag{2.10}$$

или, эквивалентно, что

$$C\,d \geqslant -\sum_r \tilde{\delta}_r \ln \tilde{\delta}_r, \tag{2.11}$$

где $\tilde{\delta}_r = \delta_r/N$ удовлетворяет условиям

$$\sum \tilde{\delta}_r = 1; \quad \sum r\tilde{\delta}_r = d.$$

Но

$$(2.12)\qquad -\sum_{r\leqslant e^d}\tilde{\delta}_r\ln\tilde{\delta}_r\leqslant\ln e^d=d$$

есть известное свойство энтропии.

В то же время

$$(2.13)\qquad -\sum_{r>e^d}\tilde{\delta}_r\ln\tilde{\delta}_r\leqslant\sum_{r>e^d}r\tilde{\delta}_r+\sum_{r>e^d}\frac{r}{e^r}\leqslant 2d.$$

Первое неравенство в (2.13) следует из альтернативы: либо

$$\tilde{\delta}_r\geqslant e^{-r},$$

и тогда

$$-\tilde{\delta}_r\ln\tilde{\delta}_r\leqslant\tilde{\delta}_r\cdot r,$$

либо

$$\tilde{\delta}_r<e^{-r},$$

тогда

$$-\tilde{\delta}_r\ln\tilde{\delta}_r\leqslant r/e^r$$

(так как x/e^x монотонно убывает по x).

Тогда (2.11) следует из (2.12) и (2.13). Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Существует $C>0$ такое, что для всякой системы $A_1, \ldots, A_N$*

$$(2.14)\qquad C\sum_{i=1}^{N}d_{A_i}+\sum_{i=1}^{N}\ln u_i\geqslant\sum_{i=1}^{N}\ln v_i.$$

Доказательство. Доказательство проводится так же, как в теореме 2.1, со следующими изменениями: $\mathcal{A}^r$ обозначает совокупность всех классов, каждый представитель которых A_i имеет $d_{A_i}=r$. Свойство 3 следует из леммы 3.3 главы I. Теорема доказана.

Пусть теперь даны система $\mathcal{A}$, состоящая из N не обязательно различных конечных подмножеств $A_1, \ldots, A_N\subset\mathbb{Z}^\nu$, и m попарно различных точек $t_1, \ldots, t_m\in\mathbb{Z}^\nu$.

Разобьем систему $\mathcal{A}$ на классы двумя различными способами. Первое разбиение $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таково, что

$$\alpha_1\cup\ldots\cup\alpha_n=\mathcal{A},\quad \alpha_i\cap\alpha_j=\varnothing\quad\text{для}\quad i\neq j$$

и все A_j, принадлежащие одному α_i, совпадают как множества, но если A_i и A_j принадлежат различным классам, они различны.

Второе разбиение $\delta_1, \ldots, \delta_m$ таково, что для всякого i любое $A_k\in\delta_i$ содержит точку t_i.

(Второе разбиение не определяется этим условием однозначно. Будем рассматривать произвольное такое разбиение, предполагая его существование.)

Лемма 2.1. *Во введенных обозначениях*

$$(2.15)\qquad \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\ln|\alpha_i|\leqslant\sum_{i=1}^{m}|\delta_i|\ln|\delta_i|+\sum_{i=1}^{N}|A_i|.$$

Доказательство. Положим

$$k_{ij}=|\alpha_i\cap\delta_j|.$$

Тогда

$$(2.16)\qquad \sum_{j=1}^{m} |\delta_j| \ln |\delta_j| \geqslant \sum_{i,j} k_{ij} \ln k_{ij}.$$

Рассмотрим класс α_i. Пусть существует в точности r классов $\delta_{j_1}, \ldots, \delta_{j_r}$ таких, что

$$\alpha_i \cap \delta_{j_1} \neq \varnothing, \ \ldots, \ \alpha_i \cap \delta_{j_r} \neq \varnothing.$$

Тогда для $A \in \alpha_i$ $|A| \geqslant r$.

Поскольку

$$\sum_{p=1}^{r} k_{ij_p} = |\alpha_i|,$$

то согласно энтропийному неравенству

$$\sum_j k_{ij} \ln k_{ij} \geqslant \frac{r|\alpha_i|}{r} \ln \frac{|\alpha_i|}{r} = |\alpha_i| \ln \frac{|\alpha_i|}{r}.$$

Так как

$$\sum_{A \in \alpha_i} |A| \geqslant |\alpha_i| r,$$

то

$$(2.17)\qquad \sum_{A \in \alpha_i} |A| + \sum_j k_{ij} \ln k_{ij} \geqslant |\alpha_i| \ln |\alpha_i|.$$

Из (2.17) и (2.16) следует (2.15).

Из этой леммы и теоремы 2.1 получаем

Следствие 2.1. *Пусть даны N 1-связных (не обязательно различных) конечных подмножеств $A_1, \ldots, A_N \subset \mathbb{Z}^\nu$ и m попарно различных точек $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{Z}^\nu$.*

Тогда

$$C \sum_{i=1}^{N} |A_i| + \sum_{j=1}^{m} |\delta_j| \ln |\delta_j| \geqslant \sum_{i=1}^{N} \ln v_i$$

Следствие 2.2. *Если отказаться от требования 1-связности множеств $A_1, \ldots, A_N$ в условиях следствия 2.1, оставив все прочие требования, то*

$$C \sum_{i=1}^{N} d_{A_i} + \sum_{j=1}^{m} |\delta_j| \ln |\delta_j| \geqslant \sum_{i=1}^{N} \ln v_i$$

или

$$C \sum_{i=1}^{N} d_{A_i}(\mathfrak{A}) + \sum_{j=1}^{m} |\delta_j| \ln |\delta_j| \geqslant \sum_{i=1}^{N} \ln v_i.$$

Это следует из теоремы 2.2, леммы 2.1 главы II и неравенства (3.2) главы I.

§ 2.3. Равномерные оценки семиинвариантов функционалов от поля, имеющего экспоненциально регулярное кластерное разложение

В этом параграфе будет предполагаться, что мера μ имеет экспоненциально регулярное кластерное разложение в смысле § 1.2

$$(3.1)\qquad \langle \psi_B \rangle = \sum b_R, \qquad b_R = b_R(\psi_B).$$

Мы будем предполагать выполненными условия (2.3), (2.4) и, в частности,

$$(3.2)\qquad |b_R(\psi_B)| \leqslant C(\psi_B)(C\lambda)^{\delta_R(\mathfrak{A}, B)}.$$

Пусть даны локальные $\psi_{B_1}, \ldots, \psi_{B_n}$. Назовем сечением ζ функцию, которая каждому непустому $D \subset \{1, \ldots, n\}$ сопоставляет $R = \zeta(D) \subset \mathbb{Z}^\nu$ такое, что:

1. $b_{\zeta(\{i\})}(\psi_{B_i}) \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.
2. $\zeta(D) = \bigcup_{i \in D} \zeta(\{i\})$.

Определим граф G_ζ с вершинами $\{1, \ldots, n\}$, соединяя пару вершин i и j ребром тогда и только тогда, когда

$$[B_i \cup \zeta(\{i\})] \cap [B_j \cup \zeta(\{j\})] \neq \varnothing.$$

Для заданных $\psi_{B_1}, \ldots, \psi_{B_n}$ и ζ определим виртуальное поле $f_\zeta(D)$ на $\{1, \ldots, n\}$ индукцией по мощности D. Если подграф D_ζ графа G_ζ, построенный на множестве вершин D, несвязен, и K_α — все его связные компоненты, то положим

$$f_\zeta(D) = \prod_\alpha f_\zeta(K_\alpha). \tag{3.3}$$

Если же D_ζ связен, то положим

$$f_\zeta(D) = \frac{1}{m_\zeta(D)} \widetilde{b}_{\zeta(D)} \Bigl(\prod_{i \in D} \psi_{B_i} \Bigr), \tag{3.4}$$

где $m_\zeta(D)$ — число *различных* ограничений ζ'_D на D всевозможных сечений ζ' таких, что

$$\zeta(D) = \bigcup_{i \in D} \zeta'(\{i\}), \tag{3.5}$$

и граф D_ζ связен; $\widetilde{b}_R$ определено в формуле (2.3) главы I.

По определению для всех ζ $f_\zeta(D)$ является независимым виртуальным полем относительно графа G_ζ.

Теорема 3.1. *Если μ имеет экспоненциально регулярное кластерное разложение, то при достаточно малых λ выполнена следующая оценка:*

$$|\langle \psi_{B_1}, \ldots, \psi_{B_n} \rangle| \leqslant C_\psi C^{\sum_{i=1}^n d_{B_i}(\mathfrak{A})};$$

$$(C\lambda)^{d_{\mathfrak{A}}(B_1, \ldots, B_n)} \prod_{i=1}^n u_i, \tag{3.6}$$

где $C_\psi = C_f(\{1, \ldots, n\})$ *определена в* (1.7) главы II, *где*

$$f(D) = \Bigl\langle \prod_{i \in D} \psi_{B_i} \Bigr\rangle. \tag{3.7}$$

Остальная часть этого параграфа посвящена доказательству этой теоремы.

Для заданных моментов $f_\zeta(D)$ виртуального поля можно определить семиинварианты $g_\zeta(D)$, используя (1.1) из главы II.

Лемма 3.1.

$$\langle \psi_{B_1}, \ldots, \psi_{B_n} \rangle = \sum_\zeta g_\zeta(\{1, \ldots, n\}). \tag{3.8}$$

Действительно, по определению,

$$\langle \psi_{B_1}, \ldots, \psi_{B_n} \rangle = \sum f(D_1) \ldots f(D_k) (-1)^{k-1} (k-1)! \tag{3.9}$$

и

$$\langle \psi_{B_1}, \ldots, \psi_{B_n} \rangle_\zeta \overset{\text{def}}{\equiv} g_\zeta(\{1, \ldots, n\}) = \sum f_\zeta(D_1) \ldots f_\zeta(D_k) (-1)^{k-1} (k-1)!, \tag{3.10}$$

где в (3.9) и (3.10) суммирование происходит по всем разбиениям $(D_1, \ldots, D_k)$ множества $\{1, \ldots, n\}$; поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что

$$f(D_1) \ldots f(D_k) = \sum_{\zeta} f_\zeta(D_1) \ldots f_\zeta(D_k) \tag{3.11}$$

для любого разбиения $(D_1, \ldots, D_k)$.

Подставим в левую часть (3.11) разложение (3.1) для $f(D)$. Тогда слева мы получим сумму членов вида

$$b_{R_1}(f_{D_1}) \ldots b_{R_k}(f_{D_k}). \tag{3.12}$$

В правой части (3.11) рассмотрим только те ζ, для которых

$$R_i = \zeta(D_i) \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, k.$$

В силу (3.3) и (3.4) соответствующие левые и правые части равны. Лемма доказана.

Воспользуемся теперь независимостью виртуального поля $f_\zeta(D)$. Тогда

$$g_\zeta(D) = 0, \tag{3.13}$$

если подграф D_ζ графа G_ζ, натянутый на вершины из D, несвязен; поэтому можно использовать формулу обращения Мёбиуса (как в § 2.1) для структуры $\mathfrak{A}_{G_\zeta}$. Функцию Мёбиуса этой структуры будем обозначать μ_ζ. Имеем

$$\langle \psi_{B_1}, \ldots, \psi_{B_n} \rangle_\zeta = \sum_{\delta} \mu_\zeta(\delta, 1) f_\zeta(D_1) \ldots f_\zeta(D_k), \tag{3.14}$$

где суммирование по всем разбиениям $\delta = (D_1, \ldots, D_k) \in \mathfrak{A}_{G_\zeta}$.

Отсюда, используя (3.8), (3.13), лемму 1.2 главы II и формулу (1.14) из главы II, имеем

$$|\langle \psi_{B_1}, \ldots, \psi_{B_n} \rangle| \leqslant \sum_{\zeta}{}' \sum_{\delta=(D_1, \ldots, D_k) \in \mathfrak{A}_{G_\zeta}} \prod_{i=1}^{k} v_i(\zeta, \delta) f_\zeta(D_i), \tag{3.15}$$

где в $\sum'$ суммирование по всем ζ таким, что G_ζ связен; $v_i(\zeta, \delta)$ — число $j = 1, \ldots, k$ таких, что

$$[\zeta(D_i) \cup (\bigcup_{l \in D_i} B_l)] \cap [\zeta(D_j) \cup (\bigcup_{l \in D_j} B_l)] \neq \varnothing.$$

Правая часть (3.15) не превосходит выражения (мы используем (3.4), (3.3) из этой главы и (2.3) из главы I)

$$\sum_{\alpha} \sum_{R_1, \ldots, R_k} \prod_{i=1}^{k} |\tilde{b}_{R_i}(\prod_{l \in \alpha_i} \psi_{B_l})| v_i(R_1, \ldots, R_k), \tag{3.16}$$

где $v_i(R_1, \ldots, R_k)$ — число $j = 1, \ldots, k$ таких, что

$$(R_i \cup \tilde{B}_i) \cap (R_j \cup \tilde{B}_j) \neq \varnothing, \qquad \tilde{B}_i = \bigcup_{l \in \alpha_i} B_l.$$

Суммирование в (3.16) по всем разбиениям $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ множества $\{1, \ldots, n\}$ и всем $R_1, \ldots, R_k \subset \mathbb{Z}^\nu$ таким, что:

1. Граф $G(R_1, \ldots, R_k)$ с вершинами $\{1, \ldots, k\}$ и ребрами между вершинами i и j, если

$$(R_i \cup \tilde{B}_i) \cap (R_j \cup \tilde{B}_j) \neq \varnothing,$$

является связным.

2. Для некоторого ζ

$$R_i = \zeta(\alpha_i) \quad (i = 1, \ldots, k)$$

и граф $G_\zeta(\alpha_i)$ связен.

Выражение (3.16) может лишь увеличиться, если мы заменим условие 2 на более слабое условие

2'. Для всех $i = 1, \ldots, k$ существует набор Γ_i множеств из $\mathfrak{A}$ такой, что набор $(\Gamma_i;\ B_l,\ l \in \alpha_i)$ связен, и $\widetilde{\Gamma}_i = R_i$.

Будем оценивать (3.16) в условиях 1 и 2'. Используя (3.2), имеем

$$\prod_{i=1}^{k} |\widetilde{b}_{R_i}(\prod_{l \in \alpha_i} \psi_{B_l})| \leqslant C_\psi (C\lambda)^{\sum_{i=1}^{k} \delta_{R_i}(\mathfrak{A}, \alpha_i)}. \tag{3.17}$$

Для всех α и всех $i = 1, \ldots, k$ выберем точку $t_i(\alpha)$, являющуюся первой в лексикографическом порядке среди точек $\widetilde{B}_i$. Пусть

$$\eta(\alpha) = (t_1(\alpha), \ldots, t_k(\alpha))$$

— набор этих точек для данного α. Положим

$$u(\eta) = \sum_{t \in \eta} \ln u_t,$$

где u_t — число $t' \in \eta$ таких, что $t = t'$. Используя следствие 2.2, мы получим

$$\prod_{i=1}^{k} v_i(R_1, \ldots, R_k) \leqslant \exp[u(\eta(\alpha))]\, C^{\sum_{i=1}^{k} d_{Q_i}(\mathfrak{A})}, \tag{3.18}$$

где

$$Q_i = R_i \cup \widetilde{B}_i.$$

Ввиду условия 2'

$$\begin{aligned} d_{Q_i}(\mathfrak{A}) &\leqslant \delta_{R_i}(\mathfrak{A}, \alpha_i) + d_{\widetilde{B}_i}(\mathfrak{A}) \leqslant \\ &\leqslant \delta_{R_i}(\mathfrak{A}, \alpha_i) + \sum_{l \in \alpha_i} d_{B_l}(\mathfrak{A}) + d_{\mathfrak{A}}(B_l,\ l \in \alpha_i). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} d_{Q_i}(\mathfrak{A}) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \delta_{R_i}(\mathfrak{A}, \alpha_i) + \sum_{j=1}^{n} d_{B_j}(\mathfrak{A}) + d_{\mathfrak{A}}(B_1, \ldots, B_n). \tag{3.20}$$

Заметим, что нам нужна лишь существенно более слабая оценка, чем (3.20), в которой правая часть (3.20) умножена на некоторую константу.

Используя (3.17), (3.18), (3.20), мы видим, что (3.16) можно оценить выражением

$$\begin{aligned} &C_\psi \exp[\sum_{i=1}^{n} d_{B_i}(\mathfrak{A}) \ln C + d_{\mathfrak{A}}(B_1, \ldots, B_n) \ln C] \times \\ &\times \sum_{\alpha} \exp[u(\eta(\alpha))] \sum_{R_1, \ldots, R_k} \exp[\sum_{i=1}^{k} \delta_{R_i}(\mathfrak{A}, \alpha_i) \ln(\lambda C)]. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Просуммируем теперь по всем $R_1, \ldots, R_k$, удовлетворяющим условиям 1, 2', при фиксированном α

$$\sum_{R_1, \ldots, R_k} (C\lambda)^{\sum_{i=1}^{k} \delta_{R_i}(\mathfrak{A}, \alpha_i)} \leqslant C_1^{\sum_{i=1}^{k} |B_i|} (C_2\lambda)^{d_{\mathfrak{A}}(B_1, \ldots, B_n)}. \tag{3.22}$$

Это утверждение более слабое, чем лемма 4 § 1.3. Тогда (3.21) ограничено выражением

$$C_\psi \exp\left[\sum_{i=1}^{n} d_{B_i}(\mathfrak{A}) \ln C + d_{\mathfrak{A}}(B_1, \ldots, B_n) \ln (C\lambda)\right] \sum_{\alpha} \exp\left[u(\eta(\alpha))\right]. \tag{3.23}$$

Оценим последнюю сумму.

Пусть β_i $(i = 1, \ldots, m)$ — группы совпадающих точек среди $s_1, \ldots, s_n$,

$$|\beta_1| + \ldots + |\beta_m| = n,$$

где s_i — первая в лексикографическом порядке точка множества B_i. Занумеруем β_i так, чтобы для любых $1 \leqslant i < j \leqslant m$ точка $\tilde{s}_i \in \beta_i$ была меньше (в смысле лексикографического порядка), чем $\tilde{s}_j \in \beta_j$.

Всякое разбиение α индуцирует разбиения множеств β_i; поэтому

$$\sum_{\alpha} \exp\left[u(\eta(\alpha))\right] = \tag{3.24}$$

$$= \sum_{\delta_1} \sum_{(\delta_2', \delta_2)} \sum_{(\delta_3', \delta_3)} \ldots \sum_{(\delta_m', \delta_m)} |\delta_1|^{|\delta_1|} |\delta_2|^{|\delta_2|} \ldots |\delta_m|^{|\delta_m|}.$$

Здесь δ_1 есть всевозможные разбиения β_1; (δ_k', δ_k) — всевозможные разбиения β_k, $2 \leqslant k \leqslant m$; δ_k обозначает те блоки разбиения (δ_k', δ_k), которые дают вклад в оцениваемую сумму; $|\delta_k|$ — количество таких блоков; δ_k' — блоки разбиения (δ_k', δ_k), не дающие вклада в сумму.

Поскольку число способов построить разбиение δ_k' множества из j_k фиксированных элементов такое, что блоки δ_k' не дают вклада в сумму, не превосходит

$$2^{2j_k} (2j_k)!/(j_k)!, \tag{3.25}$$

сумма (3.24) не превосходит

$$\sum_{\delta_1} |\delta_1|^{|\delta_1|} \sum_{j_2=0}^{|\beta_2|} C_{|\beta_2|}^{j_2} 4^{j_2} \frac{(2j_2)!}{(j_2)!} \sum_{\delta_2} |\delta_2|^{|\delta_2|} \sum_{j_3=0}^{|\beta_3|} C_{|\beta_3|}^{j_3} 4^{j_3} \frac{(2j_3)!}{(j_3)!} \times$$

$$\times \sum_{\delta_3} |\delta_3|^{|\delta_3|} \ldots \sum_{j_m=0}^{|\beta_m|} C_{|\beta_m|}^{j_m} 4^{j_m} \frac{(2j_m)!}{(j_m)!} \sum_{\delta_m} |\delta_m|^{|\delta_m|},$$

где $\sum_{\delta_k}$ означает суммирование по всевозможным разбиениям множества из $|\beta_k| - j_k$ элементов.

Так как

$$\sum_{j_k=0}^{|\beta_k|} C_{|\beta_k|}^{j_k} 4^{j_k} \frac{(2j_k)!}{(j_k)!} \sum_{\delta_k} |\delta_k|^{|\delta_k|} \leqslant C^{|\beta_k|} |\beta_k|^{|\beta_k|},$$

то сумма (3.25) не превосходит

$$C^n \prod_{i=1}^{m} |\beta_i|^{|\beta_i|}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\prod_{i=1}^{m} |\beta_i|^{|\beta_i|} \leqslant \prod_{i=1}^{n} v_i,$$

получаем согласно теореме 2.2 главы II и неравенству (3.2) из главы I результат теоремы.

Дополнение к главе II. Вычисление функций Мёбиуса структуры

С целью сделать эту статью независимой, мы даем здесь полный вывод явного вида функции Мёбиуса для структуры разбиений связного графа. Мы следуем в основном Рота [92], исправляя неточное доказательство основной теоремы.

Структуры. Пусть дано конечное частично упорядоченное множество P с отношением порядка $\leqslant$. Верхняя грань множества $X \subset P$ определяется как элемент $p \in P$ такой, что $x \leqslant p$ для всех $x \in X$. Наименьшая верхняя грань (н. в. г.) есть верхняя грань, которая $\leqslant$ всех других верхних граней.

P называется структурой, если любые два элемента p_1, p_2 имеют н. в. г. $p_1 \vee p_2$ и наибольшую нижнюю грань (н. н. г.), определяемую двойственным образом.

Далее P всегда предполагается структурой. Наибольший и наименьший элементы P обозначаются 0 и 1 соответственно.

Пример 1. $P = \mathfrak{A}$ есть множество всех разбиений $\alpha = (A_1, \ldots, A_k)$ множества $\{1, \ldots, n\}$, причем $\alpha \leqslant \beta = (B_1, \ldots, B_l)$, если каждый блок A_i разбиения α содержится в некотором блоке β.

Пример 2. Пусть G — связный граф, множество вершин которого есть $\{1, \ldots, n\}$ и пусть $\mathfrak{A}_G \subset \mathfrak{A}$ есть множество всех разбиений $\alpha = (A_1, \ldots, A_k)$ таких, что каждый блок A_i есть связный подграф G.

Легко убедиться, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_G$ — структуры.

Элементарные сведения о функциях Мёбиуса. Рассмотрим множество всех (комплексных или вещественных) функций $f(x, y)$ двух переменных $x, y \in P$ таких, что $f(x, y)$ может быть отлична от нуля, лишь если $x \leqslant y$. Это множество функций образуют алгебру (инцидентности) над числовым полем с обычными сложением и умножением на скаляр и с умножением типа свертки

$$h(x, y) = \sum_{z:\ x \leqslant z \leqslant y} f(x, z)\, g(z, y). \tag{1}$$

Эта алгебра имеет единицу — символ Кронекера $\delta(x, y)$. ζ-функция определяется как

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leqslant y, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Лемма А. 1. *ζ-функция обратима в алгебре инцидентности.*

Доказательство. Определим функцию Мёбиуса $\mu_P = \mu(x, y)$ структуры P индукцией по мощности сегмента

$$[x, y] = \{z:\ x \leqslant z \leqslant y\}:$$

$$\begin{cases} \mu(x, x) = 1, \\ \mu(x, y) = -\sum\limits_{z:\ x \leqslant z < y} \mu(x, z). \end{cases} \tag{2}$$

Легко убедиться, что $\mu\zeta = \zeta\mu = \delta$.

Лемма А. 2 (формула обращения Мёбиуса). *Пусть $f(x)$ — функция на P и*

$$g(x) = \sum_{y \leqslant x} f(y).$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{y \leqslant x} g(y)\, \mu_P(y, x). \tag{4}$$

Доказательство.

$$\sum_{y\leqslant x} g_1(y)\,\mu(y,\ x)=\sum_{y\leqslant x}\sum_{z\leqslant y} f(z)\,\mu(y,\ x)=$$
$$=\sum_{y\leqslant x}\sum_{z} f(z)\,\zeta(z,\ y)\,\mu(y,\ x)=\sum_{z} f(z)\,\delta(z,\ x)=f(x).$$

Следующие свойства функций Мёбиуса, необходимые нам в дальнейшем, легко следуют из определения (2).

1. Пусть $z,\ z'\in[x,\ y]$. Тогда

$$\mu_P(z,\ z')=\mu_{[x,\ y]}(z,\ z'). \tag{5}$$

2. Пусть P^* — частично упорядоченное множество, двойственное к P (т. е. P^* совпадает с P как множество, а отношение частичной упорядоченности заменено на обратное). Тогда

$$\mu_P(x,\ y)=\mu_{P^*}(y,\ x). \tag{6}$$

3. Пусть $P\times Q$ декартово произведение структур P и Q, т. е. множество пар $(p,\ q)$, $p\in P$, $q\in Q$, причем $(p_1,\ q_1)\leqslant(p_2,\ q_2)$ тогда и только тогда, когда $p_1\leqslant p_2$ и $q_1\leqslant q_2$.

Тогда

$$\mu_{P\times Q}((p_1,\ q_1),\ (p_2,q_2))=\mu_P(p_1,\ p_2)\mu_Q(q_1,\ q_2). \tag{7}$$

4. (Принцип включения — исключения.) Пусть P — структура всех подмножеств x некоторого множества; $x\leqslant y$ означает $x\subseteq y$. Тогда

$$\mu_P(x,\ y)=(-1)^{|y|-|x|}, \tag{8}$$

где $|\,x\,|$ есть число элементов в x.

Это следует из того, что P изоморфна произведению двухточечных сегментов $[0,\ 1]$, где $0<1$.

Соответствия Галуа. Пусть P и Q — две структуры. Соответствием Галуа между P и Q называется пара отображений ρ: $P\to Q$ и π: $Q\to P$ такая, что

1. ρ и π меняют порядок;
2. $\pi(\rho(p))\geqslant p$ и $\rho(\pi(q))\geqslant q$ для всех $p\in P$, $q\in Q$.

Лемма А. 3. *Пусть π, ρ задают соответствие Галуа. Пусть, кроме того, $\pi(q)=0$ тогда и только тогда, когда $q=1$.*

Тогда

$$\mu_Q(0,\ 1)=\sum_{a:\ \rho(a)=0}\mu_P(0,\ a). \tag{9}$$

Доказательство. Из определения соответствия Галуа следует, что $\pi(x)\geqslant b$ тогда и только тогда, когда $x\leqslant\rho(b)$ (так как $\pi(x)\geqslant b$ влечет за собой $x\leqslant\rho(\pi(x))\leqslant\rho(b)$ и обратно). Иначе говоря, это означает, что

$$\sum_{a\geqslant b}\delta_P(\pi(x),\ a)=\zeta_Q(x,\ \rho(b)). \tag{10}$$

Зафиксируем x и рассмотрим $\zeta_Q(x,\ \rho(b))$ и $\delta_P(\pi(x),\ a)$ как функции на P (от b и a соответственно). Применим к (10) формулу обращения Мёбиуса

$$\delta_P(\pi(x),\ 0)=\sum_{a\geqslant 0}\zeta_Q(x,\ \rho(a))\,\mu_{P^*}(a,\ 0)= \tag{11}$$
$$=\sum_{a\geqslant 0}\zeta_Q(x,\ \rho(a))\,\mu_P(0,\ a).$$

Положим $n=\zeta-\delta$. Из условия леммы следует, что

$$\delta_P(\pi(x),\ 0)=1-n_Q(x,\ 1).$$

Перепишем (11) в виде

$$1-n_Q(x,\ 1)=\zeta_Q(x,\ \rho(0))+\sum_{a>0}\mu_P(0,\ a)\,\zeta_Q(x,\ \rho(a)).$$

Поскольку $\rho(0)=\rho(\pi(1))=1$, то $\zeta_Q(x,\ \rho(0))=1$. Следовательно,

$$-n_Q(x,\ 1)=\sum_{a>0}\mu_P(0,\ a)\,\zeta_Q(x,\ \rho(a)).$$

Так как $\mu=\delta-\mu n$, то

$$\mu_Q(0,\ 1)=-\sum_{0\leqslant x\leqslant 1}\mu_Q(0,\ x)\,n_Q(x,\ 1)=$$
$$=\sum_{0\leqslant x\leqslant 1}\sum_{a>0}\mu_Q(0,\ x)\,\mu_P(0,\ a)\,\zeta_Q(x,\ \rho(a))=$$
$$=\sum_{a>0}\mu_P(0,\ a)\,\delta_Q(0,\ \rho(a))=\sum_{a:\ \rho(a)=0}\mu_P(0,\ a).$$

Лемма А. 4. *Пусть L — структура, а подмножество $R\subset L$ таково, что $1\notin R$, $0\notin R$ и для каждого $x\in L$, $x\neq 0$ найдется $y\in R$ такое, что $y\leqslant x$. Пусть $k\geqslant 2$ и q_k — число подмножеств $X\subset R$ таких, что $|X|=k$ и н. в. г. X есть 1.*

Тогда

$$\mu_L(0,\ 1)=q_2-q_3+q_4-\ldots \tag{12}$$

Доказательство. Положим в лемме А. 3 $Q=L^*$, P — структура всех подмножеств R.

Введем $\pi(x)$, $x\in Q$, как множество элементов $y\in R$ таких, что $y\leqslant x$. Для $A\subset R$ положим $\rho(A)$ равным н. в. г. A в L. Тогда (12) следует из (8) и леммы А. 3.

Явное вычисление функции Мёбиуса. Определим ранг $r(p)$ элемента $p\in P$ как максимальное число r минус 1 такое, что существует последовательность $x_1,\ \ldots,\ x_r\in P$ такая, что $0=x_1<x_2<\ldots<x_r=p$. Элементы ранга 1 называются атомами.

Пусть R есть множество атомов P. P называется геометрической структурой (или M-структурой), если:

1. Любой элемент P является н. в. г. некоторого множества атомов.
2. Если p — атом, a — произвольный элемент, то либо $p\leqslant a$, либо $p\vee a$ покрывает a (т. е. не существует элемента x такого, что $a<x<p\vee a$).

Другие эквивалентные определения даны в [105].

Множество атомов X называется независимым, если r (н. в. г. X) $=|X|$, и порождающим, если н. в. г. X равна 1.

В геометрической структуре с $r(1)=n-1$ всякое независимое порождающее подмножество атомов содержит в точности $n-1$ элемент.

Замечание А. 1. Нетрудно доказать, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_G$ геометрические структуры. Последнее свойство легко доказывается для них непосредственно (поэтому мы не станем доказывать его в общем случае). Если между каждыми двумя вершинами графа G проходит не более одной линии (ребра), то множество атомов $\mathfrak{A}_G$ можно отождествить с ребрами G: разбиение α является атомом, если все его блоки содержат по одному элементу, за исключением одного, который содержит два элемента; отождествим α с ребром, проходящим через эти два элемента.

Подмножество атомов T называется током, если T не является независимым, но все его (собственные) подмножества независимы.

Замечание А. 2. T есть ток в $\mathfrak{A}_G$, если соответствующее множество ребер G (построенное в замечании А. 1) является замкнутым путем без самопересечений, т. е. каждая вершина G инцидентна 2 или 0 ребрам T.

Доказательство. Такой путь C не является независимым, поэтому если $T \supset C$, то $T = C$.

Предположим теперь, что множество всех атомов P занумеровано каким-либо образом: $a_1, \ldots, a_k$.

Если

$$T = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}\}$$

— ток, $i_1 < \ldots < i_l$, то

$$T' = \varphi(T) = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{l-1}}\}$$

называется разомкнутым током.

Через $\varphi^{-1}(T')$ обозначим некоторый ток T такой, что $\varphi(T) = T'$. Очевидно, в ситуации замечания А.2 такой ток единствен.

Теорема А. 1 (Рота). *Пусть P — геометрическая структура. Тогда*

$$\mu_P(0, 1) = (-1)^{r(1)} \dot{m}_1,$$

где m_1 есть число подмножеств $X \subset R$ множества атомов, таких что:

1. $|X| = r(1)$;

2. *X не содержит разомкнутых токов.*

Доказательство [1]). Для фиксированной нумерации элементов множества R всех атомов мы можем занумеровать множество всех разомкнутых токов $T'_1, \ldots, T'_\sigma$ таким образом, что

(13) $$f(T'_i) \leqslant f(T'_j), \quad \text{если} \quad i < j,$$

где $f(T') = i_k$ есть номер (в зафиксированной нумерации R) последнего атома в $T' = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$, $i_1 < \ldots < i_k$.

Обозначим R^i_j — множество всех порождающих подмножеств $X \subset R$ таких, что $|X| = j$ и X не содержит $T'_1, T'_2, \ldots, T'_i$; $R^{i,A}_j$ — множество всех порождающих подмножеств $X \subset R$, таких, что $|X| = j$, X не содержит $T'_1, \ldots, T'_{i-1}$, но содержит ток $\varphi^{-1}(T'_i)$; $R^{i,B}_j$ — множество всех порождающих подмножеств $X \subset R$ таких, что $|X| = j$, X не содержит $T'_1, \ldots, T'_{i-1}$, содержит T'_i, но не содержит $\varphi^{-1}(T'_i)$.

Тогда для $i = 0, 1, \ldots$ имеем

(14) $$|R^i_j| = |R^{i+1}_j| + |R^{i+1, A}_j| + |R^{i+1, B}_j|.$$

Докажем, что для всех $i = 0, 1, \ldots$

(15) $$\mu_P(0, 1) = |R^i_2| - |R^i_3| + |R^i_4| - \ldots$$

индукцией по i. Для $i = 0$ — это утверждение леммы А. 4. Для всякого $i > 0$ по индукции и согласно формуле (14) имеем:

$$\begin{aligned}\mu(0, 1) &= |R^{i-1}_2| - |R^{i-1}_3| + |R^{i-1}_4| - \ldots = \\ &= |R^i_2| - |R^i_3| + |R^i_4| - \ldots + |R^{i,A}_2| + (|R^{i,B}_2| - |R^{i,A}_3|) - \\ &\qquad - (|R^{i,B}_3| - |R^{i,A}_4|) + \ldots .\end{aligned}$$

Но $|R^{i,A}_2| = 0$, поскольку ток не может содержать в точности два элемента (всякие два атома образуют независимое подмножество).

Определим взаимно однозначное соответствие ζ между $R^{i,B}_j$ и $R^{i,A}_{j+1}$

[1]) Доказательство, данное в [92], не вполне корректно. Но идеи его могут быть восстановлены, что и сделано.

следующим способом: для $X \in R_j^{i, B}$ положим

$$\zeta(X) = X \cup (\varphi^{-1}(T_i') - T_i').$$

$\zeta(X) \in R_{j+1}^{i, A}$, так как элемент $a_l = \varphi^{-1}(T_i') - T_i'$ не может принадлежать ни одному из $T_1', \ldots, T_{i-1}'$ согласно выбранной нумерации системы разомкнутых токов. Если при некотором $j < i$ $a_k \in T_j'$, то $l > f(T_i') \geqslant \geqslant f(T_j') \geqslant k$. Из (15) при $i = \sigma$ следует

$$\mu_P(0, 1) = (-1)^{r(1)} |R_{r(1)}^\sigma|,$$

так как если X не содержит разомкнутых токов (а следовательно, не содержит вообще токов), то X независимо. Поскольку X в то же время является порождающим, оно содержит в точности $r(1)$ элементов, поэтому $|R_j^\sigma| = 0$ для $j \neq r(1)$. Теорема доказана.

Следствие А. 1. *В ситуации замечания* А. 2

$$\mu_{\mathfrak{A}_G}(0, 1) = (-1)^{n-1} m_1,$$

где m_1 есть число подмножеств X ребер G таких, что $|X| = n - 1$ и X не содержит разомкнутых токов.

ГЛАВА III

КЛАСТЕРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ТРАНСФЕР-МАТРИЦЫ

§ 3.1. Трансфер-матрица и ее кластерность в высокотемпературном случае

Рассмотрим множество $T_0 \times \mathbb{Z} = T$, где $\mathbb{Z}$ — одномерная решетка, а T_0 — произвольное счетное множество. Далее мы будем отождествлять T_0 и $T_0 \times \{0\} \subset T$; пусть $T_i = T_0 \times \{i\}$.

Мы будем предполагать, что T_0 является решеткой (не обязательно целочисленной) в $\mathbb{R}^\nu$, т. е. счетным подмножеством $\mathbb{R}^\nu$, инвариантным относительно сдвигов на ν линейно независимых векторов (однако многие результаты верны без этого предположения), $0 \in T_0$.

Пусть теперь μ — мера на $\Omega = \mathbb{R}^T$, инвариантная относительно сдвига на вектор $(0, 1) \in T_0 \times \mathbb{Z}$. Пусть Σ — стандартная σ-алгебра на Ω, $\Sigma_0 = \Sigma_{T_0}$.

Физическим гильбертовым пространством назовем $\mathcal{H} = L_2(\Omega, \Sigma_0, \mu)$. Пусть $P_{\mathcal{H}}$ — ортогональный проектор на $\mathcal{H}$ в $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$. Пусть U_1 — оператор сдвига на вектор $(0, 1)$ в $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Трансфер-матрица (стохастический оператор) $\mathcal{F}$ определяется, как оператор в $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{F} = P_{\mathcal{H}} U_1 P_{\mathcal{H}}, \tag{1.1}$$

$\mathcal{F}$ имеет матричные элементы

$$(\xi_1, \mathcal{F}\xi_2)_{\mathcal{H}} = \langle \xi_1 (U_1 \xi_2) \rangle, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}, \tag{1.2}$$

где $\langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle_\mu$.

Если μ задает марковский случайный процесс в направлении «оси времени» $\mathbb{Z}$, то

$$(\xi_1, \mathcal{F}^n \xi_2)_{\mathcal{H}} = \langle \xi_1 (U_1^n \xi_2) \rangle. \tag{1.3}$$

Во многих случаях можно показать, что

1. $\mathcal{F}$ самосопряжен,
2. $\mathcal{F} \geqslant 0$.

Эти факты связаны со свойством положительности Остервальдера — Шрёдера (см. [81]).

Теперь мы будем предполагать, что находимся в условиях § 4 главы I, т. е. μ есть возмущение независимого поля; при этом на систему $\mathfrak{A}$ мы наложим одно дополнительное ограничение: проекция любого $A \in \mathfrak{A}$ на ось $\mathbb{Z}$ имеет диаметр, не превосходящий 1. Это обеспечивает выполнимость (1.3).

Определим специальный базис в $\mathscr{H}$. Этот базис возник в эргодической теории (см., например, [108]) и использовался в случае $\nu = 1$ при исследовании спектра трансфер-матрицы в [17].

Обозначим через $\mathscr{H}_x^{(0)}$ подпространство в $L_2(\Omega, \Sigma_x, \mu_0)$, ортогональное к константам. Пусть $g_x^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}_x^{(0)}$, причем $\langle | g_x^{(n)} |^p \rangle_0$ существуют для всех $p > 0$, $x \in T_0$.

Пусть T_0 вполне упорядочено некоторым отношением $<$. Если $T_0 = \mathbb{Z}$, то это обычный порядок, если $T_0 = \mathbb{Z}^\nu$, то лексикографический. Обозначим

$$T_{0,x} = \{y\colon\ y \in T_0,\ y < x\}$$

и P_x — ортогональный проектор в $\mathscr{H}$ на $L_2(\Omega, \Sigma_{T_{0,x}}, \mu)$.

Для любой $g_x \in \mathscr{H}_x^{(0)}$ положим

$$\hat{g}_x = g_x - P_x g_x, \tag{1.4}$$

т. е. мы центрируем условно относительно σ-алгебры $\Sigma_{T_{0,x}}$. Рассмотрим теперь $\hat{g}_x^{(n)}$ и ортогонализуем их по условной мере. Эта идея ортогонализации обобщает построение в [17] и принадлежит Р. А. Минлосу. Положим

$$\hat{f}_x^{(n)} = \hat{g}_x^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} c_k^{(n)} \hat{g}_x^{(k)} \tag{1.5}$$

и будем подбирать функции $c_k^{(n)}$, измеримые относительно $\Sigma_{T_{0,x}}$ так, чтобы $\hat{f}_k^{(n)}$ были ортогональны всем $\hat{g}_x^{(k)}$ при $k \leqslant n-1$ с вероятностью 1 относительно условной меры μ на $\Sigma_{T_{0,x}}$. Обозначив

$$M(\hat{g}_x^{(n)} \hat{g}_x^{(l)} / \Sigma_{T_{0,x}}) = a_{kl},$$

получим уравнения

$$a_{nl} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k^{(n)} a_{kl}. \tag{1.6}$$

Мы имеем

$$a_{kk} = 1 + O(\lambda) \tag{1.7}$$

и

$$\sum_{l\colon\ l \neq k} |a_{kl}| = O(\lambda), \tag{1.8}$$

равномерно по k и по условиям. Отсюда следует однозначная разрешимость уравнений (1.6) методом последовательных приближений.

Теперь мы условно нормируем $\hat{f}_x^{(n)}$, полагая

$$f_x^{(n)} = \hat{f}_x^{(n)} / [P_x (\hat{f}_x^{(n)})^2]^{1/2}.$$

Лемма 1.1. *Произведения* (I *означает набор* $((x_i, n_i),\ i = 1, \ldots, k)$)

$$f_I = f_{x_1}^{(n_1)} \ldots f_{x_k}^{(n_k)} \quad \text{и} \quad f_\varnothing \equiv 1$$

образуют ортонормированную систему в $\mathscr{H}$.

Доказательство. Докажем ортогональность и нормированность. Для этого достаточно заметить, что

$$M\,(f_x^{(n)} f_x^{(m)}/\Sigma_{T_0,\,x}) \equiv 1$$

при $n = m$ и равно 0 при $n \neq m$. Последовательно применяя формулу

$$M\xi = M\,[M\,(\xi/\Sigma_{T_0,\,x})],$$

получим результат.

Доказательство полноты мы дадим в некоторых предположениях в следующем параграфе. Перейдем к основному результату.

Пусть даны два набора I и I'. Если $I' = ((x_i', n_i'))$, то под $U_1 I'$ будем понимать тот же самый набор, но вместо точек $x_i' \in T_0$ берутся точки $x_i' \in T_1$. Пусть $J \subset I \cup (U_1 I')$ и $\omega(J)$ — семиинвариант $|J|$ случайных величин

$$f_x^{(n)},\ (x,\ n) \in J \cap I \quad \text{и} \quad f_y^{(m)},\ (y,\ m) \in J \cap (U_1 I').$$

Тогда

$$(f_I,\ \mathscr{F} f_{I'})_{\mathscr{H}} = \langle f_I\,(U_1 f_{I'})\rangle = \langle f_I f_{U_1 I'}\rangle = \sum \omega\,(J_1)\ \ldots\ \omega\,(J_k),$$

где суммирование ведется по всем разбиениям $J_1 \cup \ldots \cup J_k$ множества $I \cup (U_1 I')$.

Лемма 1.2. *Если либо $J \subset I$, либо $J \subset U_1 I'$, то*

$$\omega(J) = 0.$$

Действительно, достаточно доказать, что при этом $\langle f_J \rangle = 0$. Но это доказывается аналогично лемме 1.1.

Мы наложим теперь некоторое техническое условие на базис, сводящееся к тому, что функции $g_x^{(n)}$ «гладкие». Один из вариантов условия гладкости имеет вид

$$\text{(Глад)} \qquad \sum_{l:\ l \neq k} (\langle (g_x^{(l)} g_x^{(k)})^2 \rangle)^{1/2} \leqslant C < \infty,$$

где C не зависит от k. Это условие очевидно выполнено, если $\mathscr{H}_x^{(0)}$ конечномерно или если базис состоит из тригонометрических многочленов (с мерой Лебега). Другое, более широкое, условие сформулировано ниже.

Основной результат составляет

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия* § 1.4 *главы* I, *причем потенциал имеет вид* (4.2) *из главы* I. *Тогда для достаточно малых $\lambda > 0$ для всех наборов I и I'*

$$|\omega\,(J)| \leqslant (C\lambda)^{d_J(\mathfrak{A})},$$

где C не зависит от λ, J, I, I'.

§ 3.2. Доказательство теоремы

Сначала мы получим кластерное разложение для условного математического ожидания.

Пусть P_Λ — ортогональный проектор на $L_2(\Omega,\ \Sigma_\Lambda,\ \mu)$ в $L_2(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$. Наша цель здесь найти явный ряд для $P_\Lambda F_A$, где $A \subset \mathbb{Z}^\nu - \Lambda$, $F_A \in L_2$. Имеем

$$P_\Lambda F_A = M(F_A/\Sigma_\Lambda) = \langle F_A \rangle^{(\Lambda)},$$

где $\langle \cdot \rangle^{(\Lambda)}$ означает ожидание по условной гиббсовской мере на $\mathbb{Z}^\nu - \Lambda$ с фиксированными значениями случайного поля на множестве Λ.

Далее нам понадобится только случай, когда $\Lambda \subset T_0$, A состоит из одной точки $x \notin \Lambda$. Пусть Λ сначала конечно.

Тогда, так же как в § 1.4 главы I, мы получим кластерное разложение

$$(2.1)\qquad \langle F_x\rangle^{(\Lambda)}=\sum a_\gamma,$$

аналогичное (4.7) из главы I, однако, теперь a_γ являются функциями конфигурации $\omega=(\omega_t)$, заданной на Λ. А именно, a_γ является функцией только тех ω_t, $t\in\Lambda$, что $t\in\operatorname{supp}\gamma$. Пусть $I\subset\Lambda$. Обозначим

$$(2.2)\qquad \eta_I=\sum_{\gamma:\ \operatorname{supp}\gamma\cap\Lambda=I} a_\gamma$$

(I может быть пустым).

Пусть теперь все Φ_A равномерно ограничены. Тогда имеет место

Лемма 2.1.

$$(2.3)\qquad \langle F_x\rangle^{(\Lambda)}=\sum_{I\subset\Lambda}\eta_I,$$

причем

$$(2.4)\qquad \sup_\omega|\eta_I(\omega)|\leqslant C_1(C\lambda)^{\hat\delta(I)},$$

где $\hat\delta(I)$ *— наименьшее* d *такое, что существует связный набор* Γ *множеств из* $\mathfrak{A}$, *каждое из которых не принадлежит* Λ, *причем* $x\in\tilde\Gamma$, $I\subset\tilde\Gamma$.

Предельным переходом $\Lambda\uparrow T_{0,x}$ лемма 2.1 доказывается и для случая, когда $\Lambda=T_{0,x}$.

Доказательство леммы 2.1 проводится совершенно аналогично доказательству существования кластерного разложения в § 1.4 главы I.

Рассмотрим теперь некоторое $\eta_x=g_x^{(n)}$. Из (2.3) имеем

$$\eta_x-P_x\eta_x=\eta_x+\sum\eta_I,$$

где $I\subset T_{0,x}$ непусты и η_I удовлетворяют оценке (2.4), где мы можем считать $C_1=1$.

Мы докажем теперь (1.7) и (1.8). Аналогично (4.7) из главы I кластерное разложение для a_{kl} имеет вид абсолютно сходящегося ряда $\sum\eta_\gamma$, где

$$\eta_\gamma=\langle g_x^{(k)}g_x^{(l)}k_{\Gamma_1}\rangle_0\langle-k_{\Gamma_2}\rangle_0\,\ldots\,\langle-k_{\Gamma_q}\rangle_0.$$

При пустых Γ_i мы имеем

$$\eta_\gamma=\langle g_x^{(k)}g_x^{(l)}\rangle_0=\delta_{kl}.$$

Сумма остальных членов имеет порядок $O(\lambda)$. Общее условие «гладкости» будет иметь вид

$$(\text{Глад}_1)\qquad \sum_{l:\ l\neq k}|\langle g_x^{(k)}g_x^{(l)}k_\Gamma\rangle_0|=O(\lambda)$$

равномерно по k и k_Γ. Это условие следует из сформулированного ранее условия (Глад), что дает (1.7) и (1.8).

Переходим теперь к доказательству теоремы.

Лемма 2.2.

$$(2.5)\qquad f_x^{(n)}=\alpha_x+\sum_{I\subset T_{0,x}}\alpha_I,$$

где $\alpha_x=g_x^{(n)}$, *а* α_I *удовлетворяют оценкам* (2.4).

Доказательство. Как мы уже отмечали, это утверждение справедливо для $g_x^{(n)}-P_xg_x^{(n)}$. Из (1.6)—(1.8) аналогичное утверждение нетрудно доказать и для $\hat{f}_x^{(n)}$. Мы имеем также

$$P_x(\hat{f}_x^{(n)})^2 = 1 + \sum_{I \subset T_{0,\, x}} \beta_I,$$

где β_I удовлетворяют оценкам (2.4). Отсюда следует лемма 2.2.

Рассмотрим теперь некоторый набор $J = ((x_i, n_i),\ i = 1, \ldots, m)$ и

$$\omega(J) = \langle f_{x_1}^{(n_1)}, \ldots, f_{x_m}^{(n_m)} \rangle. \tag{2.6}$$

Подставляя в (2.6) выражения (2.5) для $x = x_i$, $n = n_i$, $(i = 1, \ldots, m)$, получим $\omega(J)$ в виде суммы членов вида

$$\langle \alpha_{B_1}, \ldots, \alpha_{B_m} \rangle;$$

при этом

$$|\langle \alpha_{B_1}, \ldots, \alpha_{B_m} \rangle| = (C\lambda)^{d_{\mathfrak{A}}(B_1, \ldots, B_m)} \prod_{i=1}^{m} u_i C^{d_{B_i}(\mathfrak{A})} \sup |\alpha_{B_i}|. \tag{2.7}$$

Эта оценка следует из теоремы 3.1 главы II.

Обозначим v_i — число $j = 1, \ldots, m$ таких, что $\hat{B}_i \cap \hat{B}_j \neq \varnothing$, где $\hat{B}_i = x_i \cup B_i$. Тогда по следствию 2.2 главы II

$$\prod_{i=1}^{m} u_i \leqslant \prod_{i=1}^{m} v_i \leqslant \prod_{i=1}^{m} C^{d_{\hat{B}_i}(\mathfrak{A})}.$$

Так как

$$d_{B_i}(\mathfrak{A}) \leqslant d_{\hat{B}_i}(\mathfrak{A}) \quad \text{и} \quad \hat{\delta}(B_i) \geqslant d_{\hat{B}_i}(\mathfrak{A}),$$

то ввиду (2.4)

$$|\langle \alpha_{B_1}, \ldots, \alpha_{B_m} \rangle| \leqslant (C\lambda)^{d_{\mathfrak{A}}(B_1, \ldots, B_m)} \prod_{i=1}^{m} (C\lambda)^{\hat{\delta}(B_i)}.$$

Пусть $B_1, \ldots, B_{m-1}$ и x_m фиксированы. Каждому B_m сопоставим набор:

$$\Gamma_m = \Gamma_m(B_m) \quad \text{с} \quad |\Gamma_m| = \hat{\delta}(B_m),$$

причем Γ_m — один из наборов, фигурирующих в определении $\hat{\delta}(B_m)$, связный и так далее. Каждый Γ_m отвечает не более, чем $C^{|\Gamma_m|}$ множествам B_m, поэтому

$$\sum_{B_m} (C\lambda)^{d_{\mathfrak{A}}(B_1, \ldots, B_m)} (C\lambda)^{\hat{\delta}(B_m)} \leqslant \sum_{\Gamma_m} (C\lambda)^{d_{\mathfrak{A}}(B_1, \ldots, B_{m-1}, \tilde{\Gamma}_m)} (C\lambda)^{|\Gamma_m|},$$

продолжая по индукции, получим

$$\sum_{B_m} (C\lambda)^{d_{\mathfrak{A}}(B_1, \ldots, B_m)} (C\lambda)^{\hat{\delta}(B_m)} \leqslant \tag{2.8}$$

$$\leqslant \sum_{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m} (C\lambda)^{d_{\mathfrak{A}}(\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_m)} (C\lambda)^{|\Gamma_1| + \ldots + |\Gamma_m|},$$

причем суммирование ведется по всем связным Γ_i таким, что $x_i \in \tilde{\Gamma}_i$.

Просуммируем в последней сумме по всем связным Γ_i таким, что

$$x_i \in \tilde{\Gamma}_i, \qquad |\Gamma_i| = d_i,$$

и

$$d_{\mathfrak{A}}(\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_m) + \sum d_i \geqslant d_{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_m). \tag{2.9}$$

Тогда (2.8) оценится величиной

$$(2.10)\qquad (C\lambda)^{d_{\mathfrak{A}}(x_1,\ldots,x_m)-\sum d_i}\prod_{i=1}^{m}(C_1\lambda)^{d_i}.$$

Суммируя теперь по d_i, причем, конечно,

$$\sum d_i \leqslant d_{\mathfrak{A}}(x_1,\ldots,x_m),$$

получим, что (2.10) оценивается как

$$(C_2\lambda)^{d_{\mathfrak{A}}(x_1,\ldots,x_m)}.$$

Случай, когда $\sum d_i > d_{\mathfrak{A}}(x_1,\ldots,x_m)$, рассматривается аналогично. Теорема доказана.

При доказательстве оценки (2.4) мы предполагали, однако, что Φ_A равномерно ограничены. Рассмотрим теперь общий случай. Некоторая трудность возникает из-за неограниченности функций, входящих во взаимодействие. Мы следующим способом видоизменим оценку (2.4). Вместо множителя $\prod \sup|\alpha_{B_i}|$ в правой части (2.7) мы будем согласно (3.6) из главы II использовать множитель

$$(2.11)\qquad \sup\prod_{j=1}^{k}\left|\left\langle\prod_{i\in T_j}\alpha_{B_i}\right\rangle\right|,$$

где sup берется по всем разбиениям $(T_1,\ldots,T_k)$ множества $\{1,\ldots,m\}$. Оценим, например, $\langle\prod_{j=1}^{m}\alpha_{B_j}\rangle$. Его можно представить в виде суммы членов вида

$$\left\langle\prod_l\langle k_{\Gamma_l}\rangle_0\right\rangle_\mu.$$

Будем считать, что в последнем произведении наборы Γ_l расположены в некотором порядке. Возьмем некоторый $\Gamma=\Gamma_l$ и все $A\in\Gamma$ разобьем на две группы Γ^1 и Γ^2. К первой группе отнесем те A, которые либо не пересекаются с Λ, либо не встречались более чем в q наборах Γ_k, расположенных ранее Γ. Ко второй группе отнесем остальные A. Обозначим

$$k_{\Gamma^{1,2}}=\prod_{A\in\Gamma^{1,2}}k_A$$

и, используя неравенство Шварца, получим

$$(2.12)\qquad |\langle k_\Gamma\rangle_0|\leqslant\sqrt{\langle k^2_{\Gamma^1}\rangle_0}\,\sqrt{\langle k^2_{\Gamma^2}\rangle_0}.$$

Для первого множителя в правой части (2.12) используем оценку

$$(2.13)\qquad \langle k^2_{\Gamma}\rangle_0=\left|\left\langle\prod_{A\in\Gamma}\left(\int_0^\lambda\exp(-\lambda'\Phi_A)\Phi_A\,d\lambda'\right)^2\right\rangle_0\right|\leqslant$$
$$\leqslant(C_1\lambda)^{2|\Gamma|}\left\langle\prod_{t\in\widetilde{\Gamma}\setminus\Lambda}|\psi_t|\right\rangle_0\prod_{t\in\widetilde{\Gamma}\cap\Lambda}|\psi_t|,$$

где ψ_t — произведение некоторого числа (равномерно ограниченного) функций вида $\varphi^A_{\alpha,t}$ из разложения (4.2) главы I.

Для оценки второго множителя поступим следующим образом. Для данного $t\in\Lambda$ и данного Γ^2 обозначим χ_t характеристическую функцию множества U_t тех конфигураций в Λ, для которых для данного Γ^2 $|\psi_t|>\lambda^{-1/2}$.

Мы оценим на U_t те k_A, для которых $t \in A$, так

$$|k_A| \leqslant \text{const}.$$

Эта оценка следует из ограниченности Φ_A снизу. На дополнении $\overline{U}_t$ к U_t оценим

$$|k_A| \leqslant \int_0^\lambda e^{-\lambda'\Phi_A} |\Phi_A| \, d\lambda' \leqslant c\sqrt{\lambda}. \tag{2.14}$$

Для любого фиксированного числа q из кластерного разложения следует оценка для всех $I \subset \Lambda$

$$\left|\left\langle \prod_{t \in I} \psi_t \right\rangle_\mu\right| \leqslant C^{|I|}. \tag{2.15}$$

Из изложенного получаем оценку (2.11) в виде

$$\prod_{j=1}^{n} (C\lambda)^{\hat{\delta}(B_j)},$$

откуда теорема следует так же, как и раньше.

Д о к а з а т е л ь с т в о п о л н о т ы б а з и с а. Мы сформулируем сначала два предположения относительно базиса $g_x^{(n)} = g^{(n)}$ в $\mathscr{H}_x^{(0)} = \mathscr{H}^{(0)}$, при которых мы будем доказывать полноту:

1. Любое произведение $g^{(n_1)} \ldots g^{(n_k)}$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд $\sum c_n g^{(n)}$, где $\sum |c_n| < C^k$ для некоторой константы C, не зависящей от k, $n_1, \ldots, n_k$.

Это условие тривиально выполняется, если $\mathscr{H}^{(0)}$ конечномерно, или если, например, базис тригонометрический.

2. Любое k_A разлагается в абсолютно сходящийся ряд

$$k_A = \sum c_{n_1 \ldots n_k} g_{x_1}^{(n_1)} \ldots g_{x_k}^{(n_k)}, \quad A = \{x_1, \ldots, x_k\},$$

где

$$\sum |c_{n_1 \ldots n_k}| \leqslant \lambda'$$

и $\lambda' = \lambda'(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$.

Это условие требует некоторой «гладкости» взаимодействия относительно данного базиса.

Л е м м а 2.3. *При условиях* 1, 2

$$f_x^{(n)} = g_x^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum a_{x_1 \ldots x_k}^{n_1 \ldots n_k} g_{x_1}^{(n_1)} \ldots g_{x_k}^{(n_k)} + O(\lambda'),$$

причем

$$\sum |a_{x_1 \ldots x_k}^{n_1 \ldots n_k}| \leqslant (C\lambda')^k,$$

где в $\sum$ *суммирование по всем наборам* $\begin{pmatrix} n_1 \ldots n_k \\ x_1 \ldots x_k \end{pmatrix}$ *с* $x_i \in T_{0,x}$, $O(\lambda') = \text{const}$.

Для доказательства достаточно заметить, что, как было показано ранее, $f_x^{(n)}$ представляется в виде суммы произведений k_A с некоторыми усреднениями в каждом произведении; поэтому разложим каждое k_A согласно предположению 2 и затем в каждой точке разложим согласно предположению 1. После этого получится искомое разложение.

Доказательство теоремы сводится теперь к применению метода последовательных приближений к системе

$$g_x^{(n)} = f_x^{(n)} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum a_{x_1 \ldots x_k}^{n_1 \ldots n_k} g_{x_1}^{(n_1)} \ldots g_{x_k}^{(n_k)} - O(\lambda'). \tag{2.16}$$

Для этого возьмем все члены в $k = 1$ (порядка $C\lambda'$) в правой части (2.16) и подставим вместо $g_{x_1}^{(n_1)}$ соответствующую правую часть (2.16). Затем то же самое проделаем с членами, где $k = 2$ (порядка $(C\lambda')^2$) и так далее. На m-м шаге получим остаточный член в виде ряда, сумма коэффициентов которого не превосходит $(C\lambda')^m$. Так как

$$\langle (g_{x_1}^{(n_1)} \ldots g_{x_k}^{(n_k)})^2 \rangle_0 \leqslant C^k,$$

то норма в $\mathscr{H}$ остаточного члена стремится к нулю, т. е. все $g_x^{(n)}$ могут быть разложены по нашему базису, поэтому все их произведения также могут быть разложены, откуда и следует полнота.

При разложении произведений мы снова пользуемся методом последовательных приближений, поочередно используя три формулы: разложение $g_x^{(n)}$ по базису f_I, формулу (2.16) и предположение 1.

§ 3.3. Спектральные свойства трансфер-матриц

Здесь мы дадим краткий обзор результатов без доказательств о спектре трансфер-матриц и сформулируем понятие кластерного оператора.

Рассмотрим модель Изинга в высокотемпературной области (малые β) на решетке $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geqslant 2$. Так как $\mathscr{H}_x^{(0)}$ одномерно в данном случае, то $g_x = g_x^{(1)}$ можно выбрать как значение конфигурации в точке x. Ортогонализация по условной мере здесь не нужна и

$$f_x = \frac{g_x - P_x g_x}{(P_x (g_x - P_x g_x)^2)^{1/2}}.$$

Введенный выше базис состоит из произведений

$$\hat{G}_I = \prod_{x \in I} f_x, \qquad I \subset T_0.$$

Обозначим L_N подпространство $\mathscr{H}$, порожденное всеми $\hat{G}_I$ при $|I| \leqslant N$. Пусть Q_N — ортогональный проектор на L_N.

Лемма 3.1. *Существует константа $C > 0$, не зависящая от β и N такая, что*

$$\| (1 - Q_N) \mathscr{F} \| \leqslant (C\beta)^{N+1}.$$

Эта лемма доказана в [99], где имеются также значительно более детальные оценки.

Теорема 3.1. *Пусть E_a — спектральное семейство для $\mathscr{F}$. Тогда для $a > (C\beta)^{N+1}$ имеет место (при всех N!)*

$$(1 - E_a) \mathscr{H}_N = (1 - E_a) \mathscr{H}.$$

Эта теорема является очевидным следствием предыдущей леммы. Она аналогична основной теореме Глимма, Джаффе, Спенсера из [50] в другой ситуации. Однако у них это утверждение доказано только для $N < N_0(\beta)$, где $N_0(\beta) \to \infty$ при $\beta \to 0$. В [50] это утверждение названо N-частичным кластерным разложением. Наше разложение равномерно по N, т. е. полно.

Для дальнейшего полезно следующее понятие элементарного кластерного оператора.

Рассмотрим пространство

$$l_2(\mathbb{Z}^{\nu n}) = l_2\{(x_1, \ldots, x_n)\colon x_i \in \mathbb{Z}^\nu\}.$$

Пусть $e(x_1, \ldots, x_n) \in l_2(\mathbb{Z}^{\nu n})$ равна 1 в точке $(x_1, \ldots, x_n)$ и равна 0 в остальных точках. Назовем оператор $A_{nk} : l_2(\mathbb{Z}^{\nu n}) \to l_2(\mathbb{Z}^{\nu k})$ элементарным кластерным, если его матричные элементы

$A_{nk}(x_1, \ldots, x_n;\ x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) = (e(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}),\ A_{nk}e(x_1, \ldots, x_n))$ удовлетворяют условиям

$$(3.1)\quad A(x_1, \ldots, x_n;\ x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) = A(x_1 + x, \ldots, x_{n+k} + x)$$

для всех $x \in \mathbb{Z}^\nu$;

$$(3.2)\qquad |A_{nk}(x_1, \ldots, x_{n+k})| \leqslant \lambda^{d} X,$$

для достаточно малого $\lambda > 0$, где

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}\} \subset \mathbb{Z}^\nu \cup \mathbb{Z}^\nu.$$

Нетрудно доказать, что «при фиксированном импульсе» (согласно трансляционной инвариантности (3.1) можно сделать преобразования Фурье и разложить в прямой интеграл) этот оператор компактен (и даже ядерный).

Если заданы операторы

$$A_{n_i k_i}\colon l_2(\mathbb{Z}^{\nu n_i}) \to l_2(\mathbb{Z}^{\nu k_i}),$$

то можно рассмотреть их тензорное произведение в конечном числе

$$\bigotimes_i A_{n_i k_i} : l_2(\mathbb{Z}^{\nu \sum n_i}) = \bigotimes_i l_2(\mathbb{Z}^{\nu n_i}) \to l_2(\mathbb{Z}^{\nu \sum k_i}) = \bigotimes_i l_2(\mathbb{Z}^{\nu k_i}).$$

Сумму таких операторов в конечном числе при фиксированных

$$n = \sum n_i \quad \text{и} \quad k = \sum k_i$$

будем называть кластерным оператором типа (n, k).

Рассмотрим пространство

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} l_2(\mathbb{Z}^{\nu k})$$

и обозначим P_k проектор на $l_2(\mathbb{Z}^{\nu k})$.

Оператор $A\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ будем называть кластерным, если все $P_k A P_n$ являются кластерными типа (n, k) с одной и той же константой λ.

Мы можем рассматривать симметрический (s) и антисимметрический (a) варианты предыдущих определений.

В случае $(\nu + 1)$-мерной модели Изинга $\mathcal{H}$ может быть отождествлено с

$$\mathcal{L}_a = \bigoplus_{k=0}^{\infty} l_2^{(a)}(\mathbb{Z}^{\nu k});$$

при этом $\hat{G}_I$ отождествляется с антисимметризованной $e(x_1, \ldots, x_n)$, $I = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Основная наша теорема 1.1 гл. III есть утверждение о том, что трансфер-матрица является кластерным оператором.

В [99] доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 3.2. *Для каждого* $N \geqslant 0$ *существует* $\beta_0 = \beta_0(N)$, *что при* $|\beta| < \beta_0$ *существует разложение* $\mathcal{H}$ *в ортогональную сумму подпространств* $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_N, \overline{\mathcal{H}}_{N+1}$ *такое, что*:

1) $\mathscr{H}_0$ *есть подпространство констант*;

2) $\mathscr{H}_{N+1}$ *и* $\mathscr{H}_s$ *инвариантны относительно* $\mathscr{F}$;

3) *спектр* $\mathscr{F}$ *в* $\mathscr{H}_s$ *лежит в отрезке* $[k_1\beta^s, k_2\beta^s]$, *где* k_1, k_2 — *константы, не зависящие от* β, $1 \leqslant s \leqslant N$;

4) *спектр* $\mathscr{F}$ *в* $\mathscr{H}_{N+1}$ *лежит в отрезке* $[0, k_2\beta^{N+1}]$;

5) $\mathscr{F}$ *на* $\mathscr{H}_s$ *является кластерным оператором типа* (s, s), *причем изоморфизм* $\mathscr{H}_s$ *с* $l_2^{(a)}(\mathbb{Z}^{\nu s})$ *указывается явным образом.*

Заметим, что кластерный оператор типа (1.1) является оператором свертки, типа (2, 2) — сводится к известной модели Фридрихса [111], типа (n, n) является обобщенной моделью Фридрихса, соответствующей n-частичному оператору Шрёдингера. Это позволяет изучить спектр в каждом из $\mathscr{H}_s$, $1 \leqslant s \leqslant N$, используя, например, уравнения Фаддеева — Якубовского [112].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Боголюбов Б. И. Хацет. О некоторых математических вопросах теории статистического равновесия.— ДАН, 1949, **66**, № 3, с. 321—324.

[2] Н. Н. Боголюбов, О. Я. Петрина, Б. И. Хацет. Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля.— Теорет. и матем. физика, 1969, 1, № 2, с. 251—274.

[3] Д. Рюэлль. Статистическая механика. Строгие результаты.— М.: Мир, 1971.

[4] Р. А. Минлос, Я. Г. Синай. Явление «разделения фаз» при низких температурах в некоторых решетчатых моделях газа. I.— Матем. сб., 1967, **73**, в. 3, с. 375—448; II.— Труды ММО, 1968, 19, с. 113—178.

[5] Б. И. Хацет. Асимптотичні розклади за степенями густини функцій розподілу систем в стані статистичной рівноваги.— Наукові записки Житомирського педагогічного институту, фізмат серия, 1957, 3, с. 113—138.

[6] Б. И. Хацет. Деякі властивості функцій розподілу систем у стані статистичної рівноваги.— Наукові записки Житомирського педагогічного інституту, фізмат серия, 1957, 3, с. 139—157.

[7] Р. Л. Добрушин. Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности.— Теор. вероятн. и ее примен., 1968, **13**, № 2, 201—229.

[8] А. Г. Басуев. Сходимость ряда теории возмущений для взаимодействия Юкавы.— Теорет. и матем. физика, 1975, **22**, № 2, 203—212.

[9] К. Хепп, Теория перенормировок.— М.: Наука, 1974.

[10] Р. Л. Добрушин. Аналитичность корреляционных функций одномерных классических систем со степенным убыванием потенциала.— Матем. сб., 1974, **94**, в. 1.

[11] Дж. Глимм, А. Джаффе, Т. Спенсер. Корпускулярная структура $P(\varphi)_2$-модели со слабым взаимодействием и другие применения высокотемпературных разложений I. Физика квантовополевых моделей. II. Кластерное разложение.— В кн.: Конструктивная теория поля.— М.: Мир, 1977, 169—267.

[12] М. Дюно, Б. Суйар. Кластерные свойства решетчатых и непрерывных систем.— В кн.: Гиббсовские состояния в статистической физике.— М.: Мир, 1978, 89—106.

[13] М. Дюно, Б. Суйар, Д. Яголницер. Убывание корреляций в системах с бесконечным радиусом взаимодействия.— В кн.: Гиббсовские состояния в статистической физике.— М.: Мир, 1978, 107—121.

[14] С. А. Пирогов, Я. Г. Синай. Фазовые переходы первого рода для малых возмущений модели Изинга.— Функц. анализ, 1974, 8, в. 1, с. 25—31.

[15] С. А. Пирогов. Фазовые диаграммы квантовых решетчатых систем.— ДАН, **242**, № 2, 1978.

[16] В. М. Герцик. Аналитичность корреляционных функций для решетчатых систем с нефинитным потенциалом в многофазном случае.— В кн.: Многокомпонентные случайные системы.— М.: Наука, 1978.

[17] Р. А. Минлос, Я. Г. Синай. Исследование спектров стохастических опера торов, возникающих в решетчатых моделях газа.— Теорет. и матем. физика, 1970, 2, № 2, с. 230—243.
[18] Р. А. Минлос, С. К. Погосян. Оценки функций Урселла, групповых функций и их производных.— Теорет. и матем. физика, 1977, 31, № 2, с. 199—213.
[19] Ф. Г. Абдулла-Заде, Р. А. Минлос, С. К. Погосян. Кластерные оценки для гиббсовских случайных полей и некоторые их применения.— В кн.: Многокомпонентные случайные системы.— М.: Наука, 1978, 5—30.
[20] В. А. Малышев. Возмущения гиббсовских случайных полей.— В кн.: Многокомпонентные случайные системы.— М.: 1978, Наука, с. 258—276.
[21] В. А. Малышев. Солитонные секторы в решетчатых моделях с непрерывным временем.— Функц. анализ, 1979, 13, в. 1, с. 31—41.
[22] В. А. Малышев. Одночастичные состояния и теория рассеяния марковских процессов.— В кн.: Взаимодействующие марковские процессы в биологии, Пущино, 1977, с. 176—196. (Lect. Notes Math., 1978, 653, 173—193.)
[23] R. L. Dobrushin. Analyticity of correlation functions in onedimensional classical systems with slowly decreasing potentials.— Commun. Math. phys., 1973, 32, p. 269—289.
[24] H. Moraal. Spectral properties of the Kirkwood — Salsburg operator.— Physica, 1977, 87A, p. 331—343.
[25] C. Gruber, A. Hintermann, D. Merlini. Group analysis of classical lattice systems.— Lect. Notes Phys., 1977, 60.
[26] R. B. Israel. High-temperature analyticity in classical lattice Systems.— Commun. Math. Phys., 1976, 50, p. 245—257.
[27] M. Duneau, B. Souillard. Cluster properties of lattice and continuous systems.— Commun. Math. Phys., 1976, 47, p. 155—166.
[28] G. Gallavotti. The phase separation line in the two-dimensional Ising model.— Commun. Math. Phys., 1972, 27, p. 103—136.
[29] G. Gallavotti, S. Miracle-Sole. Correlation functions of a lattice system.— Commun. Math. Phys., 1968, 7, p. 274—288.
[30] G. Gallavotti, S. Miracle-Sole, D. W. Robinson. Analyticity properties of a lattice gas.— Phys. Letters, 1967, 25A, p. 493—494.
[31] J. Groeneveld. Estimation methods for Mayer's graphical expansions. Thesis.— Amsterdam, 1967.
[32] J. Ginibre. Reduced density matrices of the anisotropic Heisenberg model.— Commun. Math., Phys., 1968, 10, № 2, p. 140—154.
[33] J. L. Lebowitz, O. Penrose. Convergence of virial expansions.— J. Math. Phys., 1964, 5, p. 841—847.
[34] O. Penrose. Convergence of fugarity expansions for fluids and lattice gases.— J. Math. Phys., 1963, 4, p. 1312—1320.
[35] O. Penrose. The remainder in Mayer's fugacity series.— J. Math. Phys., 1963, 4, p. 1488—1494.
[36] D. W. Robinson, D. Ruelle. Correlation functions of classical gases.— Ann. Phys., 1963, 25, p. 109—120.
[37] G. Gallavotti. High-temperature properties of random spin systems.— J. Math. Phys., 1970, 11, 141—146.
[38] Th. Spencer. The mass gap for the $P(\Phi)_2$ quantum field model with a strong external field.— Commun. Math. Phys., 1974, 39 p. 63—76.
[39] J. Dimock. The $P(\Phi)_2$ Green's functions: smoothness in the coupling constant.— J. Funct. Anal., 1976, 21, p. 340—368.
[40] J. Glimm, A. Jaffe. Two and three body equations in quantum field models.— Commun. Math. Phys., 1975, 44, p. 293—320.
[41] K. Osterwalder, R. R. Sénéor. The scattering matrix is non-trivial for weakly coupled $P(\varphi)_2$ models.— Helv. Phys. Acta, 1976, 49, p. 525—535.

[42] Th. Spencer. The decay of the Bethe—Salpeter kernel in $P(\varphi)_2$ quantum field models. Commun. Math. Phys., 1975, **44**, p. 143—165.
[43] J. Dimock. The non-relativistic limit of $P(\varphi)_2$ quantum field theories: two-particle phenomena.— Commun. Math. Phys., 1977, **57**, p. 51—66.
[44] R. Schrader. Local operator products and field equations in $P(\varphi)_2$ theories.— Institut für theoretische physik, Berlin, Preprint, 1974.
[45] Th. Spencer. The Bethe — Salpeter kernel in $P(\varphi)_2$.— Harvard univ., Preprint, 1975.
[46] J. Dimock, J. P. Eckmann. Spectral properties and bound-state scattering for weakly coupled $\lambda P(\varphi)_2$ models.— Ann. Phys., 1977, **103**, p. 289—314.
[47] Th. Spencer, F. Zirilli. Scattering states and bound states in $\lambda P(\varphi)_2$.— Commun. Math. Phys., 1976, **49**, p. 1—16.
[48] J. Glimm, A. Jaffe. Particles and bound states and progress toward unitarity and scaling.— International symposium on mathematical problems in theoretical physics. Kyoto, January, 1975.
[49] J. P. Eckmann, H. Epstein, J. Fröhlich. Asymptotic perturbation expansion for the S-matrix and the definition of time ordered functions in relativistic quantum field models.— Ann. Inst. Henri Poincare, 1976, **25**, № 1, p. 1—34.
[50] J. Glimm, A. Jaffe, Th. Spencer. The Wightman axioms and particle structure in the $P(\varphi)_2$ quantum field model.— Ann. Math., 1974, **100**, № 3, p. 585—632.
[51] J. P. Eckmann, J. Magnen, R. Sénéor. Decay properties and Borel summability for the Schwinger functions in $P(\varphi)_2$ theories. — Commun. Math. Phys., 1975, **39**, p. 251—271.
[52] F. Zirilli. The virial theorem and the Bethe — Salpeter equation. An application to φ_2^4 quantum field theory (in perturbation theory). Bollittino U.M.I. (5), 1977, **14-B**, p. 1—15.
[53] Ch. Burnap. Isolated one particle states in boson quantum field theory models.— Ann. Phys., 1977, **104**, № 1, p. 184—196.
[54] S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn. The scattering matrix for some nonepolynomial interactions. I, II.— Helv. Phys. Acta, 1973, **46**, № 4, p. 504—534, 535—545.
[55] S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn. The Wightman axioms and the mass gap for strong interactions of exponential type in two-dimensional space-time.— J. Funct. Anal., **16**, № 1 (1974), 39—82.
[56] J. Dimock. Asymptotic perturbation expansion in the $P(\varphi)_2$ quantum field theory.— Commun. Math. Phys., 1974, **35**, № 4, p. 347—356.
[57] J. Dimock, J. Glimm. Measures on Schwartz distribution space and applications to $P(\varphi)_2$ field theories.— Adv. Math., 1974, **12**, № 1, p. 58—83.
[58] B. Simon. Convergence of regularized, renormalized perturbation series for superrenormalizable field theories.— II.— Nuovo Cimento, 1969, **59A**, № 1, p. 199—213.
[59] J. Feldman. The $\lambda\varphi_3^4$ field theory in a finite volume. Thesis.— Harvard Univ. Cambridge, Massachusetts, July, 1974.
[60] J. Feldman. The $\lambda\varphi_3^4$ field theory in a finite volume.— Commun. Math. Phys., 1974, **37**, № 2, p. 93—120.
[61] J. Feldman. The nonperturbative renormalization of $(\varphi^4)_3$.— Harvard Univ., preprint, 1975.
[62] J. Feldman, K. Osterwalder. The Wightman axioms and the mass gap for weakly coupled $(\varphi^4)_3$ quantum field theories.— Ann. Phys., 1976, **97**, № 1, p. 80—135.
[63] J. Feldman, K. Osterwelder. The construction of $\lambda\varphi_3^4$ quantum field models.— Proc. Intern. Colloq. Math. methods of quantum field theory. Marseille, 1975.
[64] J. Glimm. Boson fields with the: φ^4: interaction in three dimensions.— Commun. Math. Phys., 1968, **10**, № 1, p. 1—47.
[65] J. Glimm, A. Jaffe. Positivity of the φ_3^4 hamiltonian.— Fortschr. Phys., 1973, **21**, № 7, p. 327—376.

[66] Y. M. Park, The $\lambda\varphi_3^4$ Euclidean quantum field theory in a periodic box.— J. Math Phys., 1975, **16**, № 11, p. 2183—2188.

[67] Y. M. Park. Lattice approximation of the $(\lambda\varphi_3^4 - \mu\varphi)_3$ field theory in a finite volume.— J. Math. Phys., 1975, **16**, № 5, p. 1065—1075.

[68] Y. M. Park. Convergence of lattice approximations and infinite volume limit in the $(\lambda\varphi^4 - \sigma\varphi^2 - \mu\varphi)_3$ field theory.— J. Math. Phys., 1977, **18**, № 3, p. 354—366.

[69] Ch. A. Burnap. The particle structure of boson quantum field theory models.— Harvard Univ., Cambridge, Massachusetts, Thesis, August, 1976.

[70] F. Constantinescu. Nontriviality of the scattering matrix for weakly coupled φ_3^4 models.— Ann. Phys. 1977, **108**, p. 37—48.

[71] J. S. Feldman, R. Raszka. The relativistic field equation of the $\lambda\varphi_3^4$ quantum field theory.— Ann. Phys., 1977, **108**, p. 212—229.

[72] J. Magnen, R. Sénéor. The Wightman axioms for the weakly coupled Yukawa model in two dimensions.— Commun. Math. Phys., 1976, **51**, p. 297—313.

[73] A. Cooper, L. Rosen. The weakly coupled $Yukawa_2$ field theory: cluster expansion and Wightman axioms.— Trans. Amer. Math. Soc., 1977, **234**, № 1, p. 1—88.

[74] P. Renourd. Analyticite et sommabilite «de Borel» des fonctions de Schwinger du modéle de Yukawa en dimension $d = 2$. I Approximation «a volume fini».— Ann. Itst. Henri Poincare, 1977, **27**, № 3, p. 237—277.

[75] J. Frölich, E. Seiler. The massive Thirring — Schwinger model (QED_2): convergence of perturbation theory and particle structure.— Helv. Phys. Acta, 1976, **49**, p. 889—924.

[76] D. C. Brydges. A rigorous approach to Debye screening in dilute classical Coulomb systems.— Commun. Math. Phys., 1978, **58**, p. 313—350.

[77] J. Glimm, A. Jaffe, T. Spencer. A convergent expansion about mean field theory. I. The expansion.— Ann. of Phys., 1976, **101**, 610—630; II. Convergence of the expansion, 631—669.

[78] R. B. Israel, C. R. Nappi. Quark confinement in the two dimensional lattice Higgs — Villiam model.— Harvard Univ. Preprint. 1978.

[79] K. Osterwalder, E. Seiler. Gauge theories on a lattice.— Ann. of Physics, 1978, **110**, p. 440—471.

[80] H. G. Dosch, V. F. Muller. Convergence of strong-coupling expansion and linear potential in lattice gauge theories.— Phys. lett., 1978, **74**, B, N 3, p. 241—242.

[81] R. S. Schor. The particle structure of ν-dimensional Ising models at low tem peratures.— Commun. Math. Phys., 1978, **59**, 213—233.

[82] P. J. Paes-Leme. Ornstein — Zernike and analyticity properties for classical lattice spin systems.— Rockfeller Univ. Preprint, 1977.

[83] D. C. Brydges. Cluster expansions for fermion fields by the time dependent Hamiltonian approach.— J. Math. Phys., 1976, 17, № 7 p. 1118—1124.

[84] P. Federbush. The semi-Euclidean approach in statistical mechanics. I. Basic expansion steps and estimates.— J. Math. Phys., 1976, 17, № 2, p. 200—203, II. The cluster expansion, a special axample.— J. Math. Phys., 1976, 17, № 2, p. 204—207.

[85] D. Brydges, P. Federbush. The cluster expansion in statistical mechanics.— Commun. Math. Phys., 1976, 49, p. 233—246.

[86] J. Magnen, R. Sénéor. Phase space cell expansion and Borel symmability for the Euclidean φ_3^4 theory.— Commun. Math. Phys., 1977, 56, p. 237—276.

[87] H. Kunz. Analyticity and clustering properties of unbounded spin systems.— Commun. Math. Phys., 1978, 59, p. 53—69.

[88] G. Benfatto, M. Cassandro, G. Gallavotti, F. Nicolo, E. Olivieri, E. Presutti, E. Scacciatelli. Some probabilistic techniques in field theory.— Commun. Math. Phys., 1978, 59, p. 143—166.

[89] D. Jagolnitzer, B. Souillard. On the analyticity in the potential in classical statistical mechanics.— Commun. Math. Phys., 1978, **60**, p. 131—152.

[90] N. Biggs. On cluster expansion in graph theory and physics.— Quart. J. Math., 1978, 29, № 114, p. 159—173.
[91] Б. Саймон. Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля.— М.: Мир, 1976.
[92] G. C. Rota. On the foundations of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions.— Zeitsch. Wahrscheinlichkeitstheorie, 1964, 2, S. 340—368.
[93] Д. Г. Мартиросян. К вопросу об оценке сверху числа периодических гиббсовых состояний для модели решетчатого газа.— УМН, 1975, 30, в. 6, с. 181—182.
[94] Ja. G. Sinai. Mathematical aspects of the theory of phase transitions.— Hungary, 1979.
[95] W. Greenberg. Correlation functionals of infinite volume quantum spin systems.— Commun. Math. Phys., 1969, 11, p. 314—320.
[96] L. Challifour, D. Weingarten. Cluster expansion for lattice gauge theories with fermions.— J. Math. Phys., 1978, 19, № 5, p. 1134—1136.
[97] G. Sylvester. Weakly coupled Gibbs measures.— Preprint, Rockfeller Univ. 1977.
[98] В. А. Малышев, Ю. А. Терлецкий. Гиббсовские поля с вещественными значениями.— Теория вероятн. и ее примен., 1980.
[99] V. A. Malyshev, R. A. Minlos. Invariant subspaces of clustering operator. I.— J. of Statist. Physics, 1979, 21, № 3.
[100] С. Лакаев, Р. А. Минлос. Одночастичный спектр трансфер-матрицы.— Теорет. и матем. физика, 1979, 30, с. 83—93.
[101] J. M. Drouffe, C. Itzykson. Lattice gauge field.— Phys. Reports C. 1978, 38, 3, p. 133—175.
[102] D. Brydges, P. Federbush. A new form of the Mayer expansion in classical statistical mechanics.— J. Math. Phys., 1978, 19, № 10, p. 2064—2067.
[103] Ю. А. Терлецкий. Гиббсовские случайные поля в низкотемпературной области.— ДАН, 1979, 246, № 3, с. 540—544.
[104] V. A. Malyshev, R. A. Minlos. Some results and problems in the study o infinite particle hamiltonians.— Proc. of Int. Symp. in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, Hungary, 1979.
[105] Г. Биркгоф. Теория структур.— М.: ИЛ, 1952.
[106] L. Gross. Decay of correlations in classical lattice models at high temperature.— Comm. Math. Phys., 1979, 68, p. 9—27.
[107] Ф. Абдулла-Заде. Полное кластерное разложение для решетчатых полей Янга — Миллса с группой калибровки U (1).— Деп. ВИНИТИ, 1979.
[108] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.
[109] V. A. Malyshev. Uniform cluster estimates for lattice models.— Comm. Math. Phys., 1979, 64, p. 131—157.
[110] V. A. Malyshev. Complete cluster expansion for weakly coupled Gibbs random fields.— In: «Many component systems».— Springer, 1979.
[111] К. Фридрихс. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Мир, 1969.
[112] Л. Д. Фаддеев. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1963, 69.

Поступила в редакцию 16 марта 1979 г.