Отдельный оттиск

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТОМ
XXVI
ВЫПУСК
1 (157)

1971

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ И ТЕОРИЯ ГАЛУА

В. А. Малышев

Целью настоящей заметки является показать неожиданную связь между теорией вероятностей и теорией Галуа. В данной работе эта связь показывается на примере вопроса о рациональности производящих функций для случайного блуждания в квадранте. Дело в том, что для случайных блужданий на полупрямой производящие функции стационарных вероятностей рациональны, если рациональны производящие функции скачков. Это утверждение может быть получено методом факторизации Винера — Хопфа, который, однако, не обобщается на задачи в четверти плоскости. Аналитическая теория здесь отличается от одномерного случая гораздо большей сложностью и своеобразием, которое и проявляется, в частности, в рассматриваемом ниже вопросе (см. также [1], [2]).

Рассмотрим однородную цепь Маркова с дискретным временем, множество состояний которой есть $\{\alpha=(k, l)\colon k, l\geqslant 0$ целые$\}$. Пусть $p_{\alpha\beta}$ — переходные вероятности, причем если $\alpha=(k, l)$, $\beta=(k+i, l+j)$, то $p_{\alpha\beta}=p_{ij}$ при $k, l\geqslant 1$; $p_{\alpha\beta}=p'_{ij}$ при $k\geqslant 1$, $l=0$; $p_{\alpha\beta}=p''_{ij}$ при $k=0$, $l\geqslant 1$ и $p_{\alpha\beta}=p^0_{ij}$ для $k=l=0$. При этом $|i|$, $|j|\leqslant 1$, причем, конечно, у p'_{ij} всегда индекс $j\geqslant 0$ и т. д. Имеет место следующее уравнение в производящих функциях (где x, $y\in \mathbf{C}$ — полю комплексных чисел, $|x|$, $|y|\leqslant 1$) [1]:

$$Q(x, y)\,\pi(x, y)=q(x, y)\,\pi(x)+\tilde{q}(x, y)\,\tilde{\pi}(y)+q_0(x, y)\,\pi_{00}, \tag{1}$$

где

$$\pi(x, y)=\sum_{i, j=1}^{\infty}\pi_{ij}x^{i-1}y^{j-1},\quad \pi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\pi_{i0}x^{i-1},$$

$$\tilde{\pi}(y)=\sum_{j=1}^{\infty}\pi_{0j}y^{j-1},\quad Q(x, y)=xy\left(1-\sum p_{ij}x^iy^j\right),$$

$$q(x, y)=x\left(\sum p'_{ij}x^iy^j-1\right),\qquad \tilde{q}(x, y)=y\left(\sum p''_{ij}x^iy^j-1\right),$$

$$q_0(x, y)=\sum p^0_{ij}x^iy^j-1.$$

Случайное блуждание назовем невырожденным, если из любой точки (k, l), $k, l\geqslant 1$, можно прийти с положительной вероятностью в любую такую же точку, не заходя на границы.

Лемма 1. *Если случайное блуждание невырождено, то многочлен $Q(x, y)$ неприводим в кольце* $\mathbf{C}[x, y]$.

Пусть $\mathbf{C}(x)$, $\mathbf{C}(y)$ — поля рациональных функций от x и y соответственно с коэффициентами в $\mathbf{C}$. Рассмотрим алгебраическое расширение $\mathbf{C}_Q(x, y)$ поля $\mathbf{C}(x)$, порожденное элементом y, удовлетворяющим уравнению $Q(x, y)=0$. Это расширение является расширением Галуа, причем группа Галуа есть циклическая группа второго порядка. Обозначим ξ ее нетривиальный элемент. Аналогично пусть η — нетривиальный автоморфизм Галуа поля $\mathbf{C}_Q(x, y)$ над полем $\mathbf{C}(y)$. Их явный вид:

$$\xi y=\frac{p_{1,-1}x^2+p_{0,-1}x+p_{-1,-1}}{y\,(p_{11}x^2+p_{01}x+p_{-1,1})},\qquad \eta x=\frac{p_{-1,1}y^2+p_{-1,0}y+p_{-1,-1}}{x\,(p_{11}y^2+p_{10}y+p_{1,-1})}.$$

Определение. Группой случайного блуждания (или уравнения (1)) назовем группу $\varkappa$ автоморфизмов поля $\mathbf{C}_Q(x, y)$, порожденную ξ и η. Положим $\delta=\eta\xi$ и $\varkappa_0=\{\delta^n\}\subset\varkappa$.

Теорема 1. *$\varkappa$ является группой четвертого порядка тогда и только тогда, когда либо 1) случайное блуждание простое, т. е. $p_{11}=p_{1,-1}=p_{-1,1}=p_{-1,-1}=0$, либо 2) блуждание внутри четверти плоскости является композицией независимых случайных блужданий по двум осям с точностью до p_{00}, т. е.*

$$\sum p_{ij}x^iy^j=p(x)\,\tilde{p}(y)+\tilde{p}_{00}.$$

[1]) π_{kl} — стационарные вероятности.

Процедура нахождения рациональных решений уравнения (1) приводится ниже. В поле $C_Q(x, y)$ это уравнение принимает вид

$$q\pi(x)+\tilde{q}\tilde{\pi}(y)+\pi_{00}q_0=0. \tag{2}$$

Введем обозначение $f_h=hf$, где $h\in\varkappa$, $f\in C_Q(x, y)$.

Теорема 2. *Пусть группа $\varkappa$ конечна и $f\cdot f_\delta\cdot f_{\delta^2}\cdot\ldots\cdot f_{\delta^{n-1}}\neq 1$, где $2n$ — порядок группы $\varkappa$ и $f=\tilde{q}q_\eta/\tilde{q}q_\eta$. Тогда рациональные решения уравнения* (1), *удовлетворяющие условиям $\pi\in C(x)$, $\pi\in C(y)$, существуют, единственны и определяются по формулам* (1), (2) *и*

$$\pi=\frac{\psi_{\delta^{n-1}}+\psi_{\delta^{n-2}}f_{\delta^{n-1}}+\ldots+\psi f_{\delta^{n-1}}f_{\delta^{n-2}}\cdot\ldots\cdot f_\delta}{1-f\cdot f_\delta\cdot\ldots\cdot f_{\delta^{n-1}}},\quad \text{где}\quad \psi=\frac{q_0\tilde{q}_\eta}{q_\eta\tilde{q}}-\frac{q_{0\eta}}{q_\eta}. \tag{3}$$

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 производящая функция для стационарных вероятностей рациональна тогда и только тогда, когда функции $\pi(x)$ и $\pi(y)$, определяемые формулами* (3) *и* (2), *не имеют полюсов в единичном круге.*

Теорема 3. *Пусть для невырожденного случайного блуждания с группой четвертого порядка*

$$f\cdot f_\delta=1. \tag{4}$$

Тогда производящая функция стационарных вероятностей рациональна тогда и только тогда, когда

$$\psi_\delta+\psi f_\delta=1. \tag{5}$$

В условиях теоремы 3 производящая функция также может быть найдена в явном виде. Обозначим $C_0(x, y)$ подполе поля $C_Q(x, y)$ элементов, инвариантных относительно δ. Группа $\varkappa_0$ действует как на мультипликативной группе $C_Q^*=C_Q(x, y)\setminus 0$, так и на аддитивной группе C_Q^+ поля $C_Q(x, y)$. В дальнейшем основную роль играет тривиальность групп когомологий Галуа $H^1(\varkappa_0, C_Q^*)$ и $H^1(\varkappa_0, C_Q^+)$. Рассмотрим 1-коцепь α: $\varkappa_0\to C_Q^*$, задаваемую формулой $\alpha(1)=1$, $\alpha(\delta)=f$. Ввиду условия (4) она является коциклом, а ввиду тривиальности $H^1(\varkappa_0, C_Q^*)$ — кограницей. Иначе говоря, $f=a/a_\delta$ для некоторого $a\in C_Q(x, y)$, легко строящегося в явном виде (теорема Гильберта 90 в мультипликативной форме).

Из уравнения (2) и его сдвига на η легко исключить $\tilde{\pi}$ и, пользуясь тем, что $\pi_\eta=\pi_\delta$, получить ($\pi_{00}=1$)

$$\rho_\delta-\rho=\psi a_\delta,\qquad \rho=a\pi. \tag{6}$$

Но из (5) следует, что $\mathrm{Tr}_{C_0}^{C_Q}(\psi a_\delta)=0$. Пользуясь теперь, аналогично предыдущему, аддитивной формой теоремы Гильберта 90, находим элемент $b\in C_Q(x, y)$ такой, что $\psi a_\delta=b-b_\delta$. Из (6) имеем тогда $(\rho+b)_\delta-(\rho+b)=0$, или $\rho+b=c$, где c инвариантен относительно δ. Далее, например, если $a_\xi=a$, то $c=-b_\xi+\gamma$, $\gamma\in C_0\cap C(x)$, и γ надо выбрать так, чтобы $\pi=\dfrac{c-b}{a}$ и $\tilde{\pi}$ не имели полюсов в единичном круге.

Теорема 4. *Для невырожденных случайных блужданий производящая функция стационарных вероятностей может быть рациональна лишь на некотором замкнутом, нигде не плотном множестве пространства параметров p_{ij}, p'_{ij}, p''_{ij}, p^0_{ij}.*

Аналитический характер производящих функций в нерациональном случае приводится в [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Малышев, Аналитический метод в теории случайных блужданий в четверти плоскости: простое блуждание с косым отражением, Труды советско-японского симпозиума по теории вероятностей в г. Хабаровске, 1969, 176—184.

[2] В. А. Малышев, Положительные случайные блуждания и обобщенные эллиптические интегралы, ДАН 196 : 3 (1971).